

Timischl  
Kaiser

# Ingenieur- Mathematik

# 4



Voyage  
200

T1  
89

*Mathcad*

E. DORNER 

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur, GZ. 44.137/1-III/D/13/2000, für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten mit Ausnahme der Fachrichtung Kunst und Design für den IV. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik sowie für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den IV. Jahrgang nach den derzeit geltenden Lehrplänen im Unterrichtsgegenstand Mathematik und Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

<b>Buch-Nr. 100 073</b>
Timischl - Kaiser <b>Ingenieur-Mathematik 4</b>
© 2001 Verlag E. DORNER GmbH Ungargasse 35, 1030 Wien Tel.: 01 / 533 56 36, Fax: 01 / 533 56 36-15 E-Mail: office@dorner-verlag.at www.dorner-verlag.at
<b>ISBN 978-3-7055-0158-4</b>

Dazu ist lieferbar: <b>Ingenieur-Mathematik 4 Lösungen</b> <b>Buch-Nr. 100 074, ISBN 978-3-7055-0210-9</b> <b>Ingenieur-Mathematik 4</b> <b>Durchgerechnete Lösungen</b> <b>Buch-Nr. 120 713, ISBN 978-3-7055-0635-0</b>
---

6. Auflage, 2011

Alle Drucke sind im Unterricht parallel verwendbar.

Der Verlag E. DORNER verweist auf Seiten im Internet. Da der Verlag keinerlei Einfluss auf die Gestaltung und die Inhalte dieser Seiten hat, kann er weder direkt noch indirekt für Schäden oder Probleme verantwortlich gemacht werden, die infolge des Gebrauchs oder Missbrauchs von Informationen aus diesen Seiten entstehen können.

Wir danken den Herren Mag. Berndt Hortig,  
DI Dr. Ferdinand Paill, DI Günther Otschko und  
DI Franz Windisch für wertvolle Anregungen.

Niemand ist perfekt ...

... natürlich auch wir nicht. Umso dankbarer sind wir  
daher allen Verwendern dieses Werkes, wenn sie uns

- auf Fehler hinweisen,
- zu Verbesserungen anregen.

**Wolfgang Timischl**

**Gerald Kaiser**

E-Mail:

wolfgang.timischl@schule.at

gerald.kaiser@inode.at

*Umschlag, Satz, Computergaphik, Repro und Montage:*  
DOKU-Consult KG, Wien  
*Gesamtherstellung:* Verlag E. DORNER GmbH, Wien

**Wolfgang Timischl  
Gerald Kaiser**

# **Ingenieur- Mathematik**

# **4**

**E. DORNER** 

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Kegelschnitte</b> .....	4	<b>5.5.3</b>	Übertragungsverhalten von Systemen .....	232
1.1	Kreis .....	4	<b>6</b>	<b>Grundlagen der statistischen Methoden</b> .....	236
1.2	Ellipse .....	10	6.1	Diskrete Verteilungen .....	236
1.3	Hyperbel .....	15	6.1.1	Hypergeom. Verteilung .....	236
1.4	Parabel .....	20	6.1.2	Binomialverteilung .....	242
1.5	Nichtlineare Gleichungs- systeme .....	24	6.1.3	Poisson-Verteilung .....	247
<b>2</b>	<b>Diskrete Mathematik</b> .....	28	6.2	Normalverteilung .....	253
2.1	Abzähltechniken .....	28	6.2.1	Einführung .....	253
2.2	Modulare Arithmetik und Verschlüsselung .....	35	6.2.2	Das Wahrscheinlichkeits- netz .....	263
2.3	Schaltalgebra .....	44	6.2.3	Die Normalverteilung als Näherung .....	264
2.4	Simplex-Methode in der linearen Optimierung .....	58	6.2.4	Verteilung von Stichprobenkenngrößen ...	266
2.5	Graphen und Netzwerke .....	75	<b>7</b>	<b>Schließende Statistik</b> .....	270
<b>3</b>	<b>Unendliche Reihen</b> .....	82	7.1	Einleitung .....	270
3.1	Unendliche Reihen mit konstanten Gliedern (Zahlenreihen) .....	82	7.2	Vertrauensbereich für einen unbekannten Anteil .....	271
3.2	Potenzreihen .....	89	7.3	Vertrauensbereich für $\mu$ bei Poisson-Verteilung .....	278
3.3	Fourier-Reihen .....	101	7.4	Vertrauensbereiche für die Parameter einer Normalverteilung .....	280
3.4	Numerische Fourier-Analyse ..	114	7.5	Test über den Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung .....	288
<b>4</b>	<b>Differentialgleichungen</b> ...	122	7.6	Prüfung auf Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz ...	297
4.1	Grundbegriffe .....	122	7.7	Zweistichprobentests bei normalverteilten Merkmalen ..	301
4.2	Differentialgleichung 1. Ordnung, Trennung der Variablen .....	129	7.8	Vergleich zweier Anteile .....	309
4.3	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten .....	138	7.9	Einführung in die Varianzanalyse .....	312
4.4	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	151	<b>8</b>	<b>Zusammenhangsanalysen</b> ...	318
4.5	Schwingungen .....	160	8.1	Lineare Korrelation .....	318
4.5.1	Freie Schwingungen .....	160	8.2	Lineare Regression .....	327
4.5.2	Erzwungene Schwingungen ..	166	<b>9</b>	<b>Statistische Methoden des Qualitätsmanagements</b> .....	333
4.6	Numerische Lösung von Differentialgleichungen .....	177	9.1	Qualitätsregelkarten .....	333
<b>5</b>	<b>Transformationen und Signale</b> .....	180	9.2	Statistische Toleranzrechnung	338
5.1	Die komplexe Rechnung in der Elektrotechnik .....	180	9.3	Annahmestichprobenprüfung	345
5.2	Signale .....	187	9.4	Zuverlässigkeitsprüfung .....	348
5.3	Die Fourier-Transformation ...	192	<b>10</b>	<b>Moderne Hilfsmittel</b> .....	351
5.4	Die Laplace-Transformation ..	207	<b>Tabellen</b> .....		355
5.5	Anwendungen der Laplace-Transformation .....	223	<b>Statistische Formelsammlung</b> .....		360
5.5.1	Lösung von Differentialgleichungen .....	223	<b>Wahrscheinlichkeitsnetz</b> .....		363
5.5.2	Elektrische Netzwerke im Laplace-Bildbereich .....	226	<b>Literaturverzeichnis</b> .....		364
			<b>Stichwortverzeichnis</b> .....		365



# 1 Kegelschnitte

Die beim Schnitt einer Ebene mit einem (Doppel-)Drehkegel auftretenden Schnittkurven nennt man **Kegelschnitte**. Die Art des entstehenden Kegelschnittes hängt von der Beziehung zwischen dem Neigungswinkel  $\alpha$  der Schnittebene und dem Neigungswinkel  $\beta$  einer Mantellinie des Drehkegels zur Grundebene ab. Verläuft die Schnittebene nicht durch die Kegelspitze, so entsteht für

$\alpha < \beta$  eine **Ellipse** bzw. als Sonderfall für  $\alpha = 0$  ein **Kreis** ( Abb. 1.1),

$\alpha = \beta$  eine **Parabel** (Abb. 1.2),

$\alpha > \beta$  eine **Hyperbel** (Abb. 1.3).

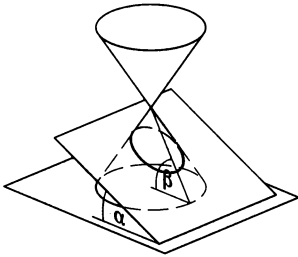


Abb. 1.1 Ellipse:  $\alpha < \beta$

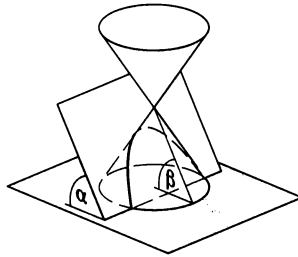


Abb. 1.2 Parabel:  $\alpha = \beta$

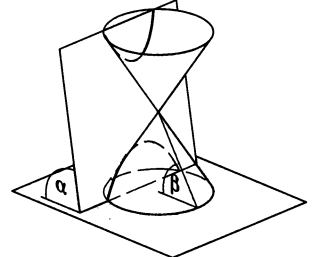


Abb. 1.3 Hyperbel:  $\alpha > \beta$

## 1.1 Kreis

Der **Kreis** ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt **M** dieser Ebene den gleichen Abstand  $r$  haben.

**M** heißt **Mittelpunkt**,  $r$  **Radius** des Kreises. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt **M** mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, wird oft als **Ursprungskreis** bezeichnet (Abb. 1.4). Ein Punkt  $P(x/y)$  liegt auf einem Ursprungskreis mit dem Radius  $r$ , wenn für seine Koordinaten gilt (pythagoräischer Lehrsatz):  $x^2 + y^2 = r^2$ .

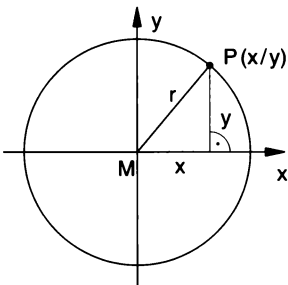


Abb. 1.4 Ursprungskreis

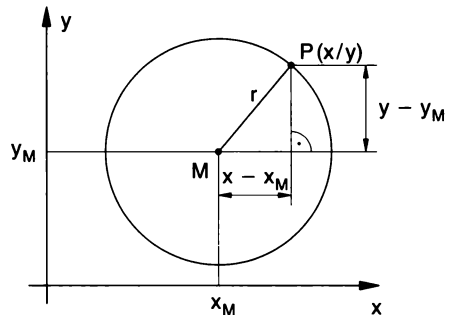


Abb. 1.5 Kreis in allgemeiner Lage

Entsprechend liegt ein Punkt  $P(x/y)$  auf einem Kreis mit dem Radius  $r$  (Abb. 1.5), dessen Mittelpunkt  $M(x_M/y_M)$  ist, wenn  $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ . Dies ist die Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage.

**Kreisgleichung**

- 1) Mittelpunkt im Ursprung:  $x^2 + y^2 = r^2$  ... **Ursprungskreis**  
 2) Mittelpunkt M ( $x_M/y_M$ ):  $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$  ... **Kreis in allgemeiner Lage**

**Beispiel 1.1 : Kreis-Berechnungen**

- a) Wie lautet die Gleichung des Ursprungskreises durch den Punkt P(2/5)?  
 b) Wie lautet die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M(2/1) durch den Punkt P(5/5)?  
 c) Zeige, dass durch die Gleichung  $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 11$  ein Kreis gegeben ist.  
 d) Durch die drei Punkte A(1/8), B(17/0) und C(15/-6) ist ein Kreis gegeben. Wie lautet seine Gleichung?

**Lösung**

Zu a) P(2/5) liegt am Kreis, wenn seine Koordinaten die Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  erfüllen:  
 $2^2 + 5^2 = 29 = r^2$ ; damit lautet die gesuchte Kreisgleichung:  $x^2 + y^2 = 29$ .

Zu b) Die Koordinaten von P erfüllen die Gleichung  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ :  
 $(5 - 2)^2 + (5 - 1)^2 = 25 = r^2$ ;  
 damit lautet die gesuchte Kreisgleichung:  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .

Zu c) Wir ergänzen jeweils auf volle Quadrate:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 6y + 9 - 9 = 11 \quad \text{oder} \quad (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt M(4/-3) und dem Radius  $r = 6$ .

d) Einsetzen der Koordinaten der Punkte in die Kreisgleichung  $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$  gibt:

$$(1 - x_M)^2 + (8 - y_M)^2 = r^2$$

$$(17 - x_M)^2 + (0 - y_M)^2 = r^2$$

$$(15 - x_M)^2 + (-6 - y_M)^2 = r^2$$

Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Ordnen ergibt:

$$\text{I: } x_M^2 + y_M^2 - 2 \cdot x_M - 16 \cdot y_M + 65 = r^2$$

$$\text{II: } x_M^2 + y_M^2 - 34 \cdot x_M + 289 = r^2$$

$$\text{III: } x_M^2 + y_M^2 - 30 \cdot x_M + 12 \cdot y_M + 261 = r^2$$

Paarweise Subtraktion der Gleichungen ergibt das lineare Gleichungssystem:

$$\text{I} - \text{II: } 32 \cdot x_M - 16 \cdot y_M - 224 = 0$$

$$\text{I} - \text{III: } 28 \cdot x_M - 28 \cdot y_M - 196 = 0.$$

Daraus:  $x_M = 7$  und  $y_M = 0$ . Etwa aus  $(1 - x_M)^2 + (8 - y_M)^2 = r^2$  erhält man  $r^2 = 100$ .

Die Gleichung des gesuchten Kreises lautet daher:  $(x - 7)^2 + y^2 = 100$ .

**Kreis als Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Größe**

In der Elektrotechnik werden **Ortskurven** gezeichnet, wenn man die Auswirkung etwa der Frequenz  $f$ , eines Ohm'schen Widerstandes  $R$ , einer Kapazität  $C$  oder dgl. auf einen komplexen Widerstand  $\underline{Z}$ , einen komplexen Leitwert  $\underline{Y}$ , eine Spannung  $\underline{U}$  graphisch darstellen will.

Mathematisch handelt es sich dabei um eine komplexe Größe  $\underline{w}(p)$ , die von einem reellen Parameter  $p$  (Beispiele dafür sind  $\omega$ ,  $R$ ,  $C$ , ...) abhängt. Zu jedem Parameterwert  $p$  gehört genau ein Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene. *Verbindet man die Spitzen der Zeiger von  $\underline{w}(p)$ , so erhält man die Ortskurve von  $\underline{w}(p)$ .* Die Funktion  $\underline{w}(p)$  ist, abgesehen vom Auftreten des Faktors  $j$ , nichts weiteres als die Parameterdarstellung einer Funktion.

**Beispiel 1.2 : Ortskurve eines komplexen Leitwerts**

Ein Ohm'scher Widerstand  $R$  und eine Spule sind in Reihe geschaltet (Abb. 1.6). Stelle den komplexen Leitwert  $\underline{Y}$  als Ortskurve in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f (\omega \geq 0)$  parameterfrei dar. Konkrete Angaben:  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ .

**Lösung**

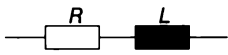


Abb. 1.6

$\underline{Z}(\omega) = R + j \cdot \omega L$ . Die Ortskurve von  $\underline{Z}(\omega)$  ist für  $\omega \geq 0$  eine Halbgerade, die parallel zur imaginären Achse im Abstand  $R$  verläuft (Abb. 1.7).

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{1}{R + j \cdot \omega L}$$

Wir ermitteln zuerst Real- und Imaginärteil von  $\underline{Y}$ .

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R + j \cdot \omega L} \cdot \frac{R - j \cdot \omega L}{R - j \cdot \omega L} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}}_{x(\omega)} + j \cdot \underbrace{\frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}_{y(\omega)}$$

Mit  $x = x(\omega) = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$  und  $y = y(\omega) = \frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$  liegt nichts anderes als eine Parameterdarstellung einer Kurve vor. Man kann versuchen, diese parameterfrei zu machen:

$$\frac{y}{x} = -\frac{\omega L}{R} \Rightarrow \omega = -\frac{R}{L} \cdot \frac{y}{x}$$

$$x = \frac{R}{R^2 + \left(-\frac{R}{L} \cdot \frac{y}{x}\right)^2 L^2} = \frac{x^2}{R x^2 + R y^2}$$

Division durch  $x (x \neq 0)$  ergibt  $1 = \frac{x}{R x^2 + R y^2}$  oder  $R \cdot x^2 + R \cdot y^2 - x = 0$ .

Dies ist die Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage, dessen Mittelpunkt und Radius durch quadratische Ergänzung bestimmt werden kann.

$$R \left(x^2 - \frac{x}{R}\right) + R y^2 = 0$$

$$R \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2R} + \frac{1}{(2R)^2} - \frac{1}{(2R)^2}\right) + R y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2R}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$$

Man liest ab:  $M \left(\frac{1}{2R} / 0\right)$  und als Kreisradius  $r = \frac{1}{2R}$ .

Da  $y = \frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \leq 0$  für  $\omega \geq 0$ , ist die gesuchte Ortskurve ein Halbkreis.

Die folgende Tabelle gibt für einige Werte von  $\omega$  den komplexen Widerstand  $\underline{Z}(\omega)$  und den Leitwert  $\underline{Y}(\omega)$  an, wenn  $R = 10 \Omega$  und  $L = 0,2 \text{ H}$ .

$\omega$ in $\text{s}^{-1}$	$\underline{Z}(\omega)$ in $\Omega$	$\underline{Y}(\omega) = 1/\underline{Z}(\omega)$ in S
0	10	0,1
20	$10,77 \cdot e^{j \cdot 21,8^\circ}$	$0,0928 \cdot e^{-j \cdot 21,8^\circ}$
50	$14,14 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}$	$0,0707 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}$
100	$22,36 \cdot e^{j \cdot 63,4^\circ}$	$0,0447 \cdot e^{-j \cdot 63,4^\circ}$

Zur Erinnerung: Ist  $z$  eine komplexe Zahl, so gilt für den Betrag und Winkel von  $\frac{1}{z}$ :

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{und} \quad \angle \frac{1}{z} = -\angle z$$

Der Betrag von  $\frac{1}{z}$  ist gleich dem Kehrwert des Betrages von  $z$ , der Winkel von  $\frac{1}{z}$  ist gleich dem Winkel des an der reellen Achse gespiegelten Zeigers von  $z$ , also entgegengesetzt gleich dem Winkel von  $z$ . Ist daher  $z$  reell, so ist auch sein Kehrwert reell.

Abb. 1.7 und Abb. 1.8 zeigen die Ortskurven von  $\underline{Z}(\omega)$  und  $\underline{Y}(\omega)$  für  $0 \leq \omega < \infty$ , wenn  $R = 10 \Omega$  und  $L = 0,2 \text{ H}$ .

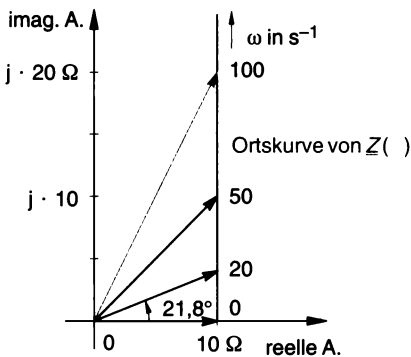


Abb. 1.7 Ortskurve von  $\underline{Z}(\omega)$   
für  $0 \leq \omega < \infty$

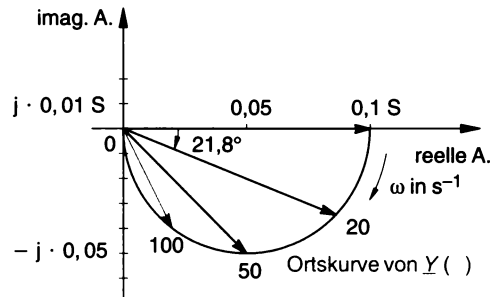


Abb. 1.8 Ortskurve von  $\underline{Y}(\omega)$   
für  $0 \leq \omega < \infty$

Im Beispiel 1.2 wurde die Inversion (Kehrwertbildung) der Größe  $\underline{Z}(\omega) = R + j \cdot \omega L$  durchgeführt, deren Ortskurve eine (Halb-)Gerade ist. Es ergab sich ein (Halb-)Kreis. Dieses Ergebnis kann verallgemeinert werden, wie ohne Beweis angeführt wird.

#### Inversion einer Geraden:

Es sei  $\underline{w}(p)$  eine komplexwertige Funktion des reellen Parameters  $p$ , deren Ortskurve eine *nicht* durch den Ursprung gehende Gerade ist. Dann ist die Ortskurve von  $\frac{1}{\underline{w}(p)}$  ein Kreis durch den Ursprung.

**Beispiel 1.3 : Widerstands Ortskurve einer Parallelschaltung**

Für die Parallelschaltung einer Induktivität  $L$  mit einem veränderlichen Widerstand  $R$  (Abb. 1.9) ist die Widerstands Ortskurve in parameterfreier Darstellung für eine feste Frequenz  $f$  durch Inversion der Leitwert Ortskurve zu bestimmen.  
 Konkrete Angaben:  $L = 0,1 \text{ H}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$

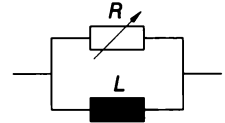


Abb. 1.9

**Lösung**

Nun ist  $R$  der Parameter.

$$\underline{Y}(R) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega L}; \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{j \cdot R \cdot \omega L}{R + j \cdot \omega L} = \underbrace{\frac{R \cdot \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}_{x(R)} + j \cdot \underbrace{\frac{R^2 \cdot \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}_{y(R)}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{R}{\omega L} \Rightarrow R = \omega L \cdot \frac{y}{x}$$

$$x = \frac{R \cdot \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega L \cdot \frac{y}{x} \cdot \omega^2 L^2}{(\omega L \cdot \frac{y}{x})^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega L \cdot x \cdot y}{x^2 + y^2} \quad | : x (\neq 0)$$

$$1 = \frac{\omega L \cdot y}{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 - \omega L \cdot y = 0$$

Dies ist ein Kreis durch den Ursprung mit dem Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse (imaginären Achse). Wir ergänzen quadratisch:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{\omega L}{2} + \left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{\omega L}{2}\right)^2 = \left(\frac{\omega L}{2}\right)^2$$

Dies ist ein Kreis mit  $M(0/\frac{\omega L}{2})$  und dem Radius  $r = \frac{\omega L}{2}$ . Da  $x = \frac{R \cdot \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \geq 0$  für  $R \geq 0$ , kommt auch hier als Ortskurve nur ein Halbkreis in Betracht.

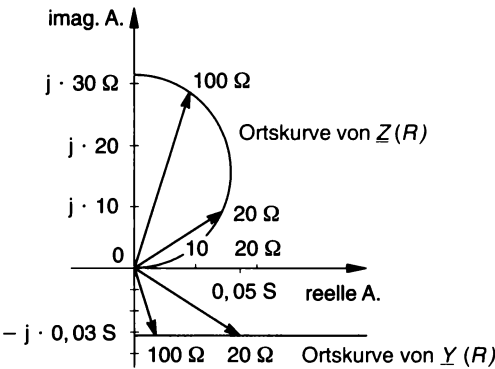


Abb. 1.10

Die Ortskurve für  $\underline{Y}(R) = \frac{1}{R} - j \cdot 0,0318 \text{ S}$  ist eine waagrechte (Halb-)Gerade, jene für  $\underline{Z}(R)$  ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt  $M(0/15,7)$  durch den Koordinatenursprung. In Abb. 1.10 sind die beiden Ortskurven gezeichnet. Diese wurden, wie das häufig geschieht, in das gleiche Diagramm gezeichnet. In der Regel sind dabei für die beiden Ortskurven unterschiedliche Maßstäbe zu wählen. Jedoch sind jeweils für eine Ortskurve die Maßstäbe auf den beiden Achsen gleich.

**Im Überblick: Kreis**

Der **Kreis** ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt  $M$  dieser Ebene den gleichen Abstand  $r$ , genannt *Radius*, haben.

**Ursprungskreis:**  $x^2 + y^2 = r^2$

**Kreis in allgemeiner Lage:**  $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$  mit Mittelpunkt  $M(x_M/y_M)$ .

## Aufgaben

- 1.1** Bestimme den Mittelpunkt und Radius des Kreises:
- a)  $x^2 + y^2 = 9$       d)  $x^2 + y^2 - 4x = 0$       g)  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$   
 b)  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$       e)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$       h)  $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 11$   
 c)  $(x + 2)^2 + y^2 = 4$       f)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$       i)  $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$
- 1.2** Wie lautet die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt
- a)  $M(4/-1)$  ist und der durch den Koordinatenursprung geht?  
 b) auf der Geraden  $y = x$  liegt und der durch den Punkt  $P(3/0)$  geht?
- 1.3** Bestimme den Kreis durch die folgenden drei Punkte:
- a)  $P(0/0)$ ,  $Q(3/9)$ ,  $R(8/4)$     b)  $P(-1/8)$ ,  $Q(0/7)$ ,  $R(6/15)$     c)  $P(3/4)$ ,  $Q(8/-1)$ ,  $R(6/3)$
- 1.4** Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch den Punkt  $P(4/2)$  geht und die  $y$ -Achse im Ursprung berührt?
- 1.5** In welchen Punkten schneidet der Kreis die Koordinatenachsen?
- a)  $(x - 3)^2 + y^2 = 25$       b)  $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$
- 1.6** Gegeben ist ein Kreis und eine Gerade durch ihre Gleichungen. Untersuche, ob die Gerade den Kreis schneidet, ihn berührt oder an ihm vorbeigeht.
- a)  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $x + y = 7$       d)  $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 20$ ;  $2y - x = 8$   
 b)  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $3y - x = 12$       e)  $x^2 + y^2 - 8x = 0$ ;  $y = 2x + 3$   
 c)  $x^2 + y^2 = 20$ ;  $2y - x = 10$       f)  $x^2 + y^2 + 4y = 96$ ;  $y + 2x = 8$
- 1.7** Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Kreis im Punkt  $P$ ?
- a)  $x^2 + y^2 = 100$ ,  $P(6/y_0 > 0)$     b)  $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 620$ ,  $P(x_0 > 0/6)$
- 1.8** An den Kreis sind die Tangenten parallel zur Geraden  $g$  zu legen:
- a)  $x^2 + y^2 = 169$ ,  $g: 12x + 5y = 10$     b)  $x^2 + y^2 = 100$ ,  $g: 4x - 3y = 12$
- 1.9** An den Kreis  $x^2 + y^2 = 25$  sind die Tangenten normal zur Geraden  $7y - 24x + 28 = 0$  zu legen. Wie lauten ihre Gleichungen sowie die Berührungspunkte?
- 1.10** Ein Stab der Länge  $2a$  wird in seinen Endpunkten  $A(c/0)$  und  $B(0/d)$  in zwei zueinander normal stehenden Schienen geführt (Abb. 1.11). Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt  $P(x/y)$  des Stabes?  
*Hinweis:* Drücke  $c$  und  $d$  durch die Koordinaten  $x$  und  $y$  von  $P$  aus. Welche einfache Beziehung besteht zwischen  $c$ ,  $d$  und der Stablänge  $2a$ ?

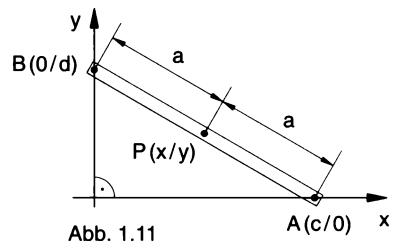


Abb. 1.11

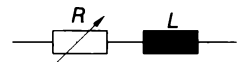


Abb. 1.12

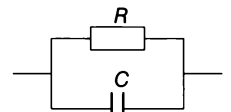


Abb. 1.13

## 1.2 Ellipse

Die **Ellipse** ist die Menge aller Punkte P, für die die *Summe* der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$ , den so genannten **Brennpunkten**, konstant ist.

Für die konstante Abstandssumme wird  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$  gesetzt. Aus der Definition der Ellipse folgt unmittelbar die *Fadenkonstruktion* der Ellipse (Abb. 1.14).

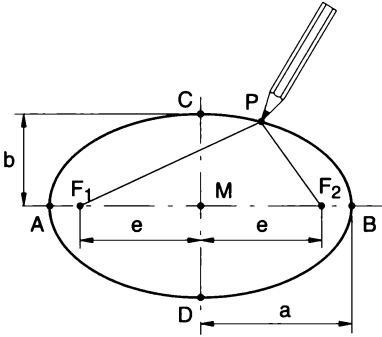


Abb. 1.14 Fadenkonstruktion der Ellipse

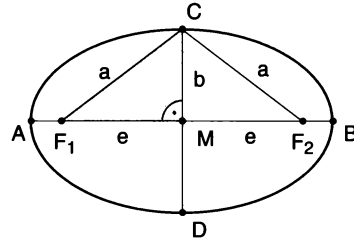


Abb. 1.15 Brennweite und Halbachsenlängen

- M ..... Mittelpunkt der Ellipse
- a ..... große Halbachsenlänge
- b ..... kleine Halbachsenlänge
- A, B ..... Hauptscheitel
- C, D ..... Nebenscheitel

$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$  .. Brennweite,  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  (Abb. 1.15)

Die Ellipse besitzt zwei Symmetrieachsen. Ist  $a = b$  und damit  $e = 0$ , so wird die Ellipse zum Kreis. Der Kreis ist somit ein Sonderfall einer Ellipse.

### Gleichung einer Ellipse

Zum Aufstellen der Ellipsengleichung legt man einfachheitshalber die x-Achse eines Koordinatensystems durch die Brennpunkte und den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der Ellipse (Abb. 1.16).

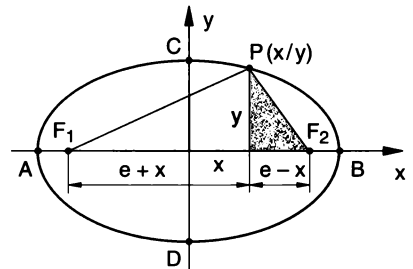


Abb. 1.16 Zur Ellipsengleichung

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$   
 $\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a$   
 oder

$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$

Quadrieren und Vereinfachen liefern:  $e \cdot x - a^2 = -a \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$ .

Nochmaliges Quadrieren liefert nach Zusammenfassung:

$(a^2 - e^2) \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot (a^2 - e^2)$ .

Mit  $a^2 - e^2 = b^2$  erhält man  $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$  oder nach Division durch  $a^2 \cdot b^2$  die Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Diese Gleichung wird als **Mittelpunktsgleichung** der Ellipse mit dem Mittelpunkt  $M(0/0)$  bezeichnet (Achsen parallel zu den Koordinatenachsen).

*Anmerkung:* Steht die Ellipse "aufrecht", so liegen die beiden Brennpunkte auf der  $y$ -Achse. Bezeichnet  $a$  weiterhin die Halbachsenlänge auf der  $x$ -Achse und  $b$  jene auf der  $y$ -Achse, so ist nun  $b$  die große Halbachsenlänge und es gilt dementsprechend:  $e = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

Hat der Mittelpunkt  $M$  die Koordinaten  $x_M$  und  $y_M$  und liegt eine "Parallellage" vor (d.h. die Ellipsenachsen verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen), so gilt für einen beliebigen Punkt  $P(x/y)$  dieser

Ellipse (Abb. 1.17):  $\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$ .

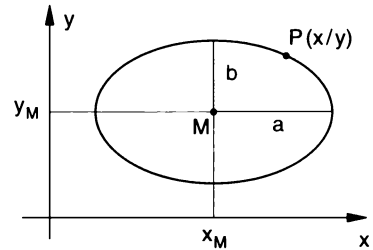


Abb. 1.17 Achsenparallel verschobene Ellipse

### Mittelpunktsgleichung der Ellipse

1) Mittelpunkt  $M(0/0)$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

2) Mittelpunkt  $M(x_M/y_M)$ :  $\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$ .

Aus der Mittelpunktsgleichung können unmittelbar die beiden Halbachsenlängen  $a$  und  $b$  sowie die Koordinaten des Mittelpunktes  $M$  abgelesen werden.

### Beispiel 1.4 : Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung

Wie lautet die Gleichung der Ellipse mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, wenn

- $a = 5$ ,  $e = 4$ ;
- $a = 2 \cdot \sqrt{6}$  und  $P(4/2)$  ein Punkt der Ellipse ist.
- Bestimme  $a$  und  $b$  aus der Ellipsengleichung  $x^2 + 2y^2 = 8$ .

### Lösung

Zu a) Wegen  $e^2 = a^2 - b^2$  folgt  $b^2 = a^2 - e^2 = 25 - 16 = 9$  und daher  $b = 3$ . Damit:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \text{oder auch} \quad 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Zu b) Die Koordinaten von  $P(4/2)$  müssen die Ellipsengleichung erfüllen:

$$\frac{4^2}{(2 \cdot \sqrt{6})^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 12.$$

Daher lautet die gesuchte Gleichung der Ellipse:  $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$  oder auch  $x^2 + 2y^2 = 24$ .

Zu c) Division durch 8 ergibt  $\frac{x^2}{8} + \frac{2y^2}{8} = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Nun liest man  $a^2 = 8$  und  $b^2 = 4$  ab; damit  $a = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$  und  $b = 2$ .



**Beispiel 1.5 : Brennpunkteigenschaft der Ellipse**

Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

- a) Bestimme die Steigung der Tangente an die Ellipse im Punkt  $P(3/y_0)$ ,  $y_0 > 0$ .
- b) Lege die Gerade durch den Brennpunkt  $F_1$  und  $P$  sowie die Gerade durch den Brennpunkt  $F_2$  und  $P$ . Wie groß sind ihre Winkel mit der Tangente durch  $P$ ?

**Lösung**

Zu a)  $y$ -Koordinate von  $P$ :  $9 \cdot 3^2 + 25 \cdot y_0^2 = 225$ ;

daus ergibt sich als positive Lösung  $y_0 = \frac{12}{5}$ .

Zur Bestimmung der Steigung  $k_t$  der Tangente durch  $P$  wird implizit abgeleitet:

$$9 \cdot 2x + 25 \cdot 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{9x}{25y};$$

$$k_t = y'(3) = -\frac{9 \cdot 3}{25 \cdot \frac{12}{5}} = -\frac{9}{20}.$$

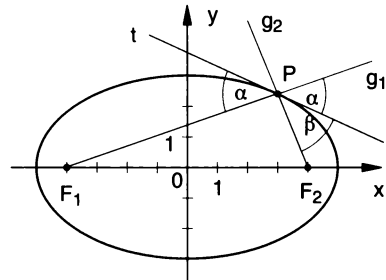


Abb. 1.18 Brennpunkteigenschaft der Ellipse

Aus Abb. 1.18 entnimmt man für die Steigungen  $k_1$  und  $k_2$  der Geraden  $g_1$  und  $g_2$  ( $e = 4$ ):

$$k_1 = \frac{\frac{12}{5}}{4 + 3} = \frac{12}{35}; \quad k_2 = -\frac{\frac{12}{5}}{4 - 3} = -\frac{12}{5}$$

Wir berechnen die spitzen Winkel zwischen den beiden Geraden und der Tangente:

$$\tan \alpha = \frac{k_1 - k_t}{1 + k_1 \cdot k_t} = \frac{15}{16} \Rightarrow \alpha = 43,2^\circ; \quad \tan \beta = \frac{k_t - k_2}{1 + k_t \cdot k_2} = \frac{15}{16} \Rightarrow \beta = 43,2^\circ.$$

Damit besteht Gleichheit der Winkel. Man kann auch sagen, dass ein Brennstahl durch  $F_1$  an der Ellipse im Punkt  $P$  durch den zweiten Brennpunkt  $F_2$  reflektiert wird. Denn die Winkelgleichheit bedeutet, dass das Reflexionsgesetz erfüllt ist.

Diese Eigenschaft gilt für *jeden* von  $F_1$  ausgehenden Strahl und für *jede* Ellipse, wie man zeigen kann: stets wird er an der Ellipse durch  $F_2$  reflektiert. Auch die Umkehrung besteht offensichtlich. Man spricht von der *Brennpunkteigenschaft* einer Ellipse (Abb. 1.19). Davon kommt auch die Bezeichnung der Punkte  $F_1$  und  $F_2$  als Brennpunkte.

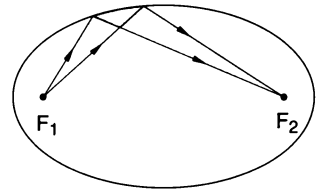


Abb. 1.19 Reflexion an der Ellipse

**Beispiel 1.6 : Ellipse mit Mittelpunkt nicht im Ursprung**

- a) Wie lautet die Gleichung der Ellipse mit dem Mittelpunkt  $M(2/-1)$ , wenn  $a = 3$ ,  $b = 2$ ?
- b) Bestimme den Mittelpunkt, die Halbachsenlängen und die Brennpunkte der Ellipse  $x^2 - 8x + 4y^2 + 16y + 16 = 0$

**Lösung**

Zu a)  $\frac{(x - 2)^2}{3^2} + \frac{(y + 1)^2}{2^2} = 1$ ; daraus:  $4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y = 11$ .

Zu b)  $x^2 - 8x + 4 \cdot (y^2 + 4y) + 16 = 0$ . Wir ergänzen nun auf volle Quadrate:

$$x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 4 \cdot (y^2 + 2 \cdot 2y + 4 - 4) + 16 = 0$$

$$(x-4)^2 + 4 \cdot (y+2)^2 = 16 \quad \text{oder} \quad \frac{(x-4)^2}{4^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1.$$

$$a = 4, b = 2; x_M = 4, y_M = -2 \quad (\text{Vorzeichen beachten!}).$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$F_1(x_M - e/y_M) = F_1(4 - 2\sqrt{3}/-2) \quad \text{sowie} \quad F_2(x_M + e/y_M) = F_2(4 + 2\sqrt{3}/-2)$$

## Im Überblick: Ellipse

Die **Ellipse** ist definiert als die Menge aller Punkte P, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$ , den so genannten *Brennpunkten* konstant ist. Sind  $a$  und  $b$  die Halbachsenlängen und gilt  $a > b$ , so ist  $e^2 = a^2 - b^2$  mit  $e$  als Brennweite.

### Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$M(0/0): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad M(x_M/y_M): \frac{(x-x_M)^2}{a^2} + \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1$$

$M$  ist der Ellipsenmittelpunkt. Dabei fallen die Symmetrieachsen der Ellipse mit den Koordinatenachsen zusammen oder liegen parallel zu ihnen (Ellipse in "Parallellage").

## Aufgaben

1.13 Ermittle die Gleichung der Ellipse, wenn

a)  $M(0/0)$ ,  $a = 4$ ,  $b = 2$

b)  $M(0/0)$ ,  $a = 6$ ,  $e = 3$

c)  $M(0/0)$ ,  $b = 4$ ,  $e = 3$

d)  $M(2/1)$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$

e)  $M(3/-2)$ ,  $a = 5$ ,  $e = 3$

f)  $M(2/-1)$ ,  $b = 4$ ,  $e = 3$

1.14 Die Ellipse  $9x^2 + 16y^2 = 144$  wird um  $90^\circ$  gedreht. Wie lautet danach ihre Gleichung?

1.15 Bestimme den Mittelpunkt, die Halbachsenlängen und die Brennpunkte der Ellipse:

a)  $9x^2 + 16y^2 = 144$

b)  $x^2 + 4y^2 = 100$

c)  $x^2 + 2y^2 = 2$

d)  $2x^2 + 8y^2 = 1$

e)  $x^2 + 3y^2 - 8x + 4 = 0$

f)  $x^2 + 4y^2 - 6x - 16y = 39$

g)  $5x^2 + 9y^2 + 10x - 54y = 94$

h)  $2x^2 + 3y^2 - 30x + 39 = 0$

i)  $9x^2 + 4y^2 - 18x = 27$

1.16 Ermittle die Gleichung der Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung, die durch die Punkte P und Q geht: a)  $P(-2/5)$ ,  $Q(6/3)$     b)  $P(6/4)$ ,  $Q(8/-3)$

1.17 Die Brennpunkte einer Ellipse, die durch den Punkt  $P(8/3,6)$  verläuft, lauten:  $F_1(-8/0)$ ,  $F_2(8/0)$ . Wie lautet die Gleichung der Ellipse?

1.18 Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung  $16x^2 + 25y^2 = 400$ . Ein Kreis mit dem Mittelpunkt im rechtseitigen Brennpunkt der Ellipse berührt die  $y$ -Achse. Unter welchem Winkel schneiden einander Kreis und Ellipse im ersten Quadranten?

1.19 Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Ellipse im Punkt P:

a)  $x^2 + 3y^2 = 13$ ;  $P(1/y_0 > 0)$

b)  $3x^2 - 6x + 5y^2 - 30y + 16 = 0$ ,  $P(x_0 > 0/5)$

1.20 Die Gerade  $3y - x = 3$  schneidet die Ellipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$  in zwei Punkten.

a) Stelle die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten auf.

b) Berechne den Winkel zwischen den Tangenten.

- 1.21 Die Bahnkurven der Planeten um die Sonne sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Bei der Erde beträgt die geringste Entfernung zur Sonne etwa 147,5 Millionen Kilometer, die größte etwa 152,5 Millionen Kilometer. Bestimme die große Halbachsenlänge der Erdbahn.

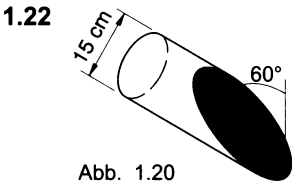


Abb. 1.20

- 1.23 Eine an eine senkrechte Wand gelehnte Leiter der Länge 10 m beginnt auf ebenem Boden wegzurutschen (Abb. 1.21). Welche Bahn beschreibt eine Sprosse, die vom oberen Ende der Leiter 4 m entfernt ist?

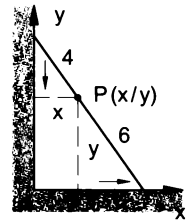


Abb. 1.21

- 1.24 Eine Stange AB der Länge 5 m rotiert gleichförmig um A (Abb. 1.22). Sie ist in B gelenkig mit einer weiteren Stange BC der Länge 2 m verbunden. Diese rotiert doppelt so schnell gegenläufig um B. Welche Bahnkurve beschreibt C, wenn anfänglich AB und BC in einer Linie liegen?

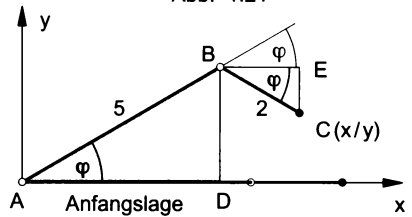


Abb. 1.22

*Hinweis:*  $x = \overline{AD} + \overline{BE}$  und  $y = \overline{DB} - \overline{CE}$ ; löse dann nach  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  auf, quadriere die erhaltenen Terme und addiere.

- 1.25 "Papierstreifenkonstruktion" einer Ellipse (Abb. 1.23): Bewegt sich eine Stange der Länge  $\overline{PQ} = a$  derart, dass zwei ihrer Punkte Q und R mit  $\overline{QR} = a - b$  auf zwei zueinander normalen Geraden gleiten, so beschreibt der Endpunkt P der Stange eine Ellipse. Zeige die Richtigkeit dieser Behauptung.

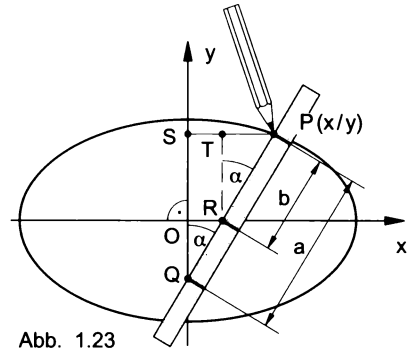


Abb. 1.23

*Hinweis:* Drücke  $\sin \alpha$  im Dreieck SQP und  $\cos \alpha$  im Dreieck TRP aus, quadriere beide Terme und addiere.

- 1.26 Eine Flüstergalerie ist ein Raum mit einer elliptisch gekrümmten Decke oder auch Wand (Abb. 1.24). In dem einen Brennpunkt geflüsterte Worte können in dem anderen Brennpunkt deutlich wahrgenommen werden. In einem solchen Raum mit einer Länge von  $2a = 15,8$  m haben die beiden Brennpunkte einen Abstand von 14,6 m. Ermittle die Gleichung der Ellipse, nach der die Decke geformt ist.

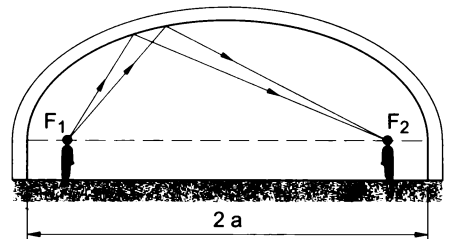


Abb. 1.24

### 1.3 Hyperbel

Die **Hyperbel** ist die Menge aller Punkte P einer Ebene, für die der Betrag der *Differenz* der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$ , den so genannten **Brennpunkten**, konstant ist (Abb. 1.25).

Für den konstanten Betrag der Differenz wird  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$  gesetzt. Die Hyperbel besteht aus zwei Ästen (Abb. 1.25): für einen Punkt P des rechten Astes ist  $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ , während für einen Punkt P des linken Astes  $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$  ist.

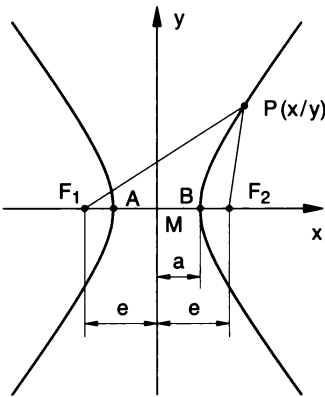


Abb. 1.25

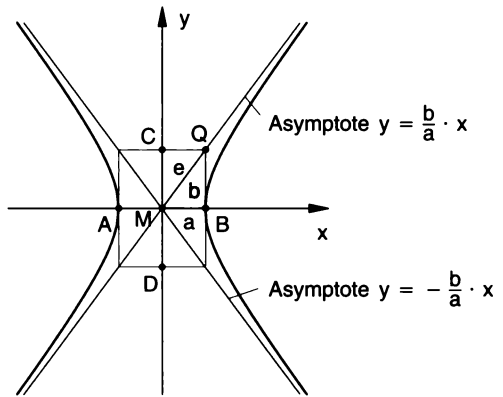


Abb. 1.26

- M ..... Mittelpunkt der Hyperbel
- A, B ..... Scheitelpunkte
- a, b ..... Halbachsenlängen
- $\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$  ... Brennweite,  $e = \sqrt{a^2 + b^2}$  (Abb. 1.26)

Man kann zeigen, dass jeder von  $F_2$  ausgehende Lichtstrahl so an der Hyperbel reflektiert wird, dass er von  $F_1$  auszugehen scheint (Abb. 1.27). Daher kommt wieder die Bezeichnung *Brennpunkte* für  $F_1$  und  $F_2$ .

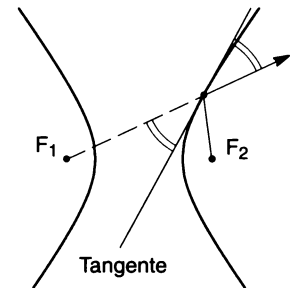


Abb. 1.27 Reflexion an der Hyperbel

Die Hyperbel besitzt zwei Symmetrieachsen. Legt man ein kartesisches Koordinatensystem wie in Abb. 1.26, so führt eine Herleitung analog wie jene der Ellipsengleichung zur

**Mittelpunktsgleichung** einer Hyperbel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Daraus können a und b unmittelbar abgelesen werden.

*Verhalten im Unendlichen:* Löst man nach y auf, so erhält man

$$y = \pm b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Für  $x \rightarrow \pm \infty$  gilt  $\frac{a^2}{x^2} \rightarrow 0$ . Die Hyperbel nähert sich daher beliebig den Geraden, den

**Asymptoten** der Hyperbel:  $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$ .

*Anmerkung:* Öffnet sich die Hyperbel statt nach rechts und links nach oben und unten, so liegen die beiden Brennpunkte auf der y-Achse. Bezeichnet a weiterhin die Halbachsenlänge auf der x-Achse und b jene auf der y-Achse, so lautet nun die Mittelpunktsgleichung

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ . Die Gleichungen der Asymptoten bleiben unverändert.

Hat der Mittelpunkt M die Koordinaten  $x_M$  und  $y_M$  und liegen die Koordinatenachsen parallel zu den Symmetrieachsen der Hyperbel (Hyperbel in "Parallellage"), so gilt für einen beliebigen Punkt P (x/y) der Hyperbel die

**Mittelpunktsgleichung** einer Hyperbel mit Mittelpunkt M ( $x_M/y_M$ ), wenn die x-Achse parallel zur Geraden durch die Brennpunkte verläuft:

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} - \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1.$$

Daraus können der Mittelpunkt und die Halbachsenlängen a und b abgelesen werden.

**Beispiel 1.7 : Hyperbelberechnungen**

- a) Wie lautet die Gleichung der Hyperbel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, wenn  $a = 3$ ,  $e = 5$ ?
- b) Bestimme die Halbachsenlängen aus der Hyperbelgleichung  $x^2 - 3y^2 = 12$ .
- c) Welchen Winkel schließen die Asymptoten der Hyperbel  $16x^2 - 9y^2 = 144$  miteinander ein?
- d) Durch die Gleichung  $9x^2 - 36x - 4y^2 - 8y = 4$  ist eine Hyperbel gegeben. Bestimme ihren Mittelpunkt, die Halbachsenlängen sowie die Brennpunkte.

**Lösung**

Zu a)  $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ;  $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$  oder  $16x^2 - 9y^2 = 144$ .

Zu b) Wir bringen die Hyperbelgleichung durch Division durch 12 auf die Mittelpunktsform:  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ . Daraus  $a^2 = 12$  oder  $a = 2 \cdot \sqrt{3}$  sowie  $b^2 = 4$  oder  $b = 2$ .

Zu c) Die Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung lautet  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ , woraus  $a = 3$  und  $b = 4$  abgelesen werden kann. Nach Abb. 1.28 gilt:  $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 53,13^\circ$ .

Daher ist der gesuchte Winkel  $\varphi = 106,3^\circ$ .

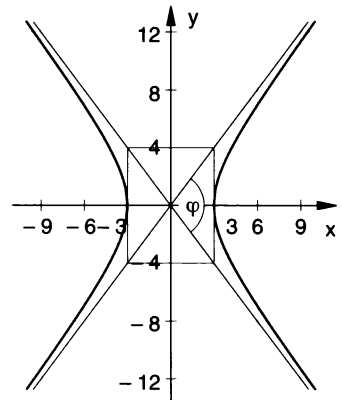


Abb. 1.28

Zu d)  $9(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 2y) = 4$ .

Ergänzung auf volle Quadrate:

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 2y + 1 - 1) = 4$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 36 - 4(y^2 + 2y + 1) + 4 = 4$$

$$9(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 36 \text{ oder } \frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1; \text{ daraus: } a=2, b=3, M(2/-1).$$

$$\text{Brennweite: } e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

$$F_1(x_M - e/y_M) = F_1(2 - \sqrt{13}/-1) \text{ sowie } F_2(x_M + e/y_M) = F_2(2 + \sqrt{13}/-1)$$

### Zusammenhang zwischen Hyperbel und Hyperbelfunktionen

Wie die Kreisfunktionswerte am Einheitskreis, so können in analoger Weise die Hyperbelfunktionswerte (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 116 ff.) an der "Einheitshyperbel" (Halbachsenlängen  $a = b = 1$ ) dargestellt werden. Dies erklärt die Bezeichnung der Hyperbelfunktionen.

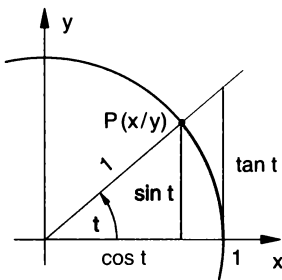


Abb. 1.29

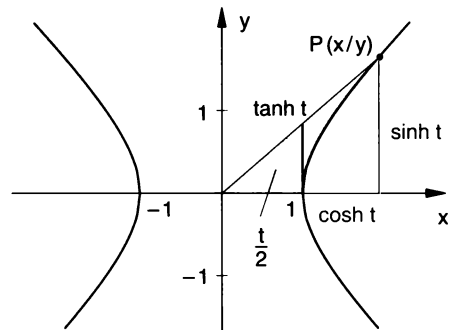


Abb. 1.30

Kreisfunktionswerte am Einheitskreis (Abb. 1.29):  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ .

Setzt man in gleicher Weise (Abb. 1.30) bei den Hyperbelfunktionen  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$ ,  $\tanh t = \frac{y}{x} = \frac{\sinh t}{\cosh t}$ , so erhält man mit der Differenz der Quadrate von  $x$  und  $y$  nach kurzer Rechnung die Gleichung der Einheitshyperbel:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = \left[ \frac{1}{2} \cdot (e^t + e^{-t}) \right]^2 - \left[ \frac{1}{2} \cdot (e^t - e^{-t}) \right]^2 = 1.$$

Die Bedeutung des Parameters  $t$  ist jedoch nicht mehr die eines Winkels, sondern  $\frac{t}{2}$  ist der Inhalt der in Abb. 1.30 markierten Fläche, was man durch Integration zeigen kann. Damit ergibt sich auch eine Erklärung für die Bezeichnung "Areafunktionen" für die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen (area, lat., Fläche). Übrigens gilt auch am Einheitskreis, dass der Inhalt der in Abb. 1.29 markierten Sektorfläche gleich  $\frac{t}{2}$  ist.

## Im Überblick: Hyperbel

Die **Hyperbel** ist definiert als die Menge aller Punkte P, für die der Betrag der *Differenz* der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$ , den so genannten *Brennpunkten*, konstant ist. Sind  $a$  und  $b$  die Halbachsenlängen und gilt  $a > b$ , so ist  $e^2 = a^2 + b^2$  mit  $e$  als Brennweite. Sie nähert sich für über alle Grenzen wachsendes  $x$  beliebig den Geraden  $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$ , ihren *Asymptoten*.

### Mittelpunktsgleichung der Hyperbel:

$$M(0/0): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad M(x_M/y_M): \frac{(x - x_M)^2}{a^2} - \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1.$$

$M$  ist der Hyperbelmittelpunkt. Die  $x$ -Achse verläuft dabei durch die Brennpunkte oder zumindest parallel zur Geraden durch die Brennpunkte.

### Ellipse oder Hyperbel?

Haben in der Gleichung  $A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y = E$  die Koeffizienten  $A$  und  $B$  gleiches Vorzeichen, so liegt eine Ellipse vor, sonst eine Hyperbel.

## Aufgaben

- 1.27** Ermittle die Gleichung einer Hyperbel mit dem Mittelpunkt im Ursprung, wenn
- a)  $a = 2, b = 3$                       b)  $a = 8, e = 10$                       c)  $b = 5, e = 13$
- 1.28** Durch  $16x^2 - 9y^2 = 144$  ist eine Hyperbel gegeben. Sie wird um  $90^\circ$  gedreht. Wie lautet die Gleichung der neuen Hyperbel?
- 1.29** Wie lautet die Gleichung der Hyperbel mit Mittelpunkt im Ursprung, wenn die Abstände eines Scheitelpunktes von den Brennpunkten 1 und 9 sind?
- 1.30** Bestimme die Halbachsenlängen, die Brennpunkte, die Asymptoten sowie den Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel:
- a)  $9x^2 - 16y^2 = 144$     b)  $x^2 - y^2 = 4$     c)  $x^2 - 4y^2 = 16$     d)  $5x^2 - 4y^2 = 80$
- 1.31** Der Punkt  $P(x/y)$  durchläuft die Hyperbel  $81x^2 - 36y^2 = 2916$ . Welche Bahnlinie durchläuft der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABP$ , wenn  $A, B$  die Scheitelpunkte der Hyperbel sind?
- 1.32** Bestimme den Mittelpunkt, die Halbachsenlängen sowie die Brennpunkte der Hyperbel:
- a)  $x^2 + 4x - y^2 + 4y = 9$                       b)  $16x^2 + 96x - 9y^2 + 18y = 9$   
c)  $16x^2 - 9y^2 - 18y = 585$                       d)  $-9x^2 + 16y^2 - 32y = 128$

**1.33** Zeige, dass der Graph der durch die folgende Gleichung beschriebenen Kurve ein Kegelschnitt ist:

a)  $y^2 = x^2 + 2x$       b)  $y^2 = 8x - 4x^2$       c)  $y^2 = x - x^2$       d)  $x^2 + 2y^2 - 8y = 0$

e)  $(x - 2y) \cdot (x + 2y) = 4$       f)  $\frac{4x}{x^2 + y^2} = 1$       g)  $\frac{y}{x^2 - y^2} - 1 = 0$       h)  $\frac{x + 2y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}$

*Hinweis:* Bringe die Gleichung auf die Mittelpunktsform.

**1.34** Die Gerade  $y = \frac{x}{3} + 1$  schneidet die Hyperbel  $4x^2 - 9y^2 = 36$  in zwei Punkten.

- a) Ermittle die Schnittpunkte und stelle dort die Gleichungen der Tangenten auf.  
b) Bestimme den Schnittwinkel zwischen den Tangenten.

**1.35** Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel  $16x^2 - 25y^2 = 400$ , die

- a) parallel,      b) normal zur Geraden  $y = x + 2$  verlaufen?

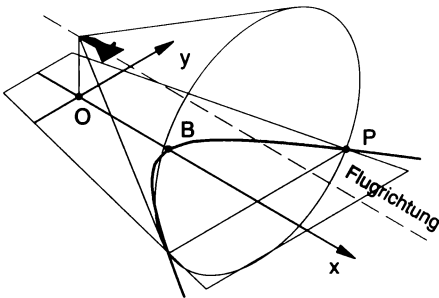


Abb. 1.31 Mach'scher Kegel

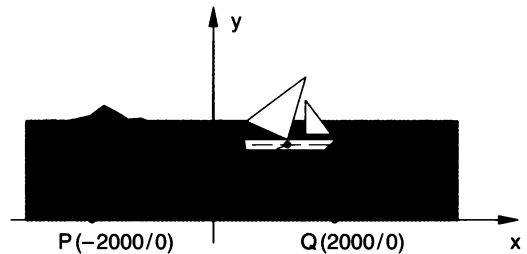


Abb. 1.32

**1.36** Wenn ein Flugzeug die Schallmauer durchbricht, führt das Flugzeug eine kegelförmige Stoßwelle mit, den Mach'schen Kegel (Abb. 1.31). Sein Schnitt mit dem ebenen Erdboden ist ein Zweig einer Hyperbel. Die Stoßwelle wird als Knall in jedem Punkt der Hyperbel gleichzeitig wahrgenommen. Eine Person im Scheitel B (2 km/0) der Hyperbel und eine Person im Punkt P (4 km/2 km) nehmen den Knall gleichzeitig wahr. Wie lautet die Gleichung der Hyperbel?

**1.37** Ein Boot ist in dichtem Nebel auf einem großen See vor Anker gegangen (Abb. 1.32). Es sendet mit dem Nebelhorn ein Notsignal aus, das von zwei 4000 m entfernten Stationen P und Q am Seeufer mit einem Zeitunterschied von 3 s wahrgenommen wird, und zwar früher in Q. Die Schallgeschwindigkeit beträgt 340 m/s.

- a) Gib die Menge aller Punkte an, wo sich das Boot befinden könnte.  
b) Man weiß, dass das Boot üblicherweise parallel zum Ufer in einer Entfernung von 1000 m fährt und dass es daher vermutlich auf dieser Linie ankerte, als der Notruf wahrgenommen wurde. Kann nun seine Position angegeben werden?



## 1.4 Parabel

Die Parabel als Graph der quadratischen Funktion  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  wurde schon in "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 37 ff., ausführlich besprochen. Dabei ergeben sich für  $a > 0$  nach oben, für  $a < 0$  nach unten öffnende Parabeln. Die folgenden Ausführungen fassen die dortigen Überlegungen zusammen und ergänzen sie.

Die **Parabel** ist die Menge aller Punkte  $P$  einer Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt  $F$ , dem **Brennpunkt** und einer Geraden  $l$ , der **Leitlinie** gleich sind. (Abb. 1.33).

- F ..... Brennpunkt
- l ..... Leitlinie
- S ..... Scheitelpunkt
- $p = \overline{FA}$  ... Parameter der Parabel

Die durch  $S$  und  $F$  verlaufende Gerade ist Symmetrieachse der Parabel und heißt **Parabelachse**.

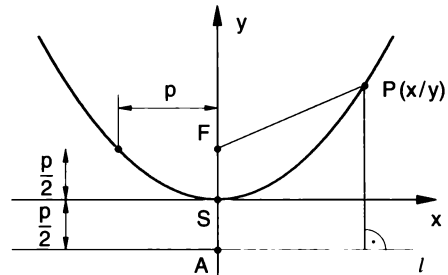


Abb. 1.33 Definition der Parabel

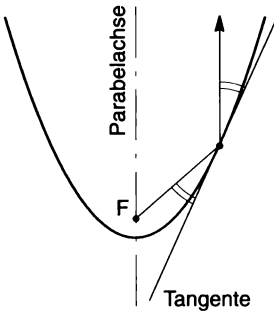


Abb. 1.34 Reflexion an der Parabel

Ein von  $F$  ausgehender Lichtstrahl wird so an der Parabel reflektiert, dass er parallel zur Parabelachse verläuft (Abb. 1.34). Dies ist der Grund für die Bezeichnung **Brennpunkt** für den Punkt  $F$ .

Ist die  $y$ -Achse Parabelachse und fällt der Koordinatenursprung mit dem Scheitelpunkt  $S$  zusammen (Abb. 1.33), so gilt für jeden Punkt  $P(x/y)$  der Parabel die Gleichung  $y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$  oder wie auch häufig geschrieben wird,  $x^2 = 2p \cdot y$ . Dies kann unmittelbar aus der Definition der Parabel hergeleitet werden.

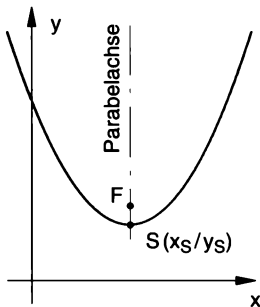


Abb. 1.35 Scheitel  $S$  nicht im Ursprung

Wird die Parabel mit der Gleichung  $x^2 = 2p \cdot y$  parallel verschoben (Abb. 1.35), so dass der Scheitelpunkt  $S$  die Koordinaten  $x_S$  und  $y_S$  besitzt, so gilt für einen beliebigen Punkt  $P(x/y)$  die Gleichung

$$(x - x_S)^2 = 2p \cdot (y - y_S), \quad y \geq y_S.$$

Wird diese Funktionsgleichung nach  $y$  aufgelöst, so erhält man die Parabelgleichung in der Form

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

**Scheitelformel** einer nach oben geöffneten Parabel:

- 1) Scheitelpunkt  $S(0/0)$ :  $x^2 = 2p \cdot y, \quad y \geq 0$
- 2) Scheitelpunkt  $S(x_S/y_S)$ :  $(x - x_S)^2 = 2p \cdot (y - y_S), \quad y \geq y_S$

Die Parabel hat keinen Mittelpunkt; es gibt daher keine Mittelpunktsleichung der Parabel. An ihrer Stelle wird oft die Scheitelgleichung angegeben, aus der die Koordinaten des Scheitelpunktes unmittelbar abgelesen werden können.

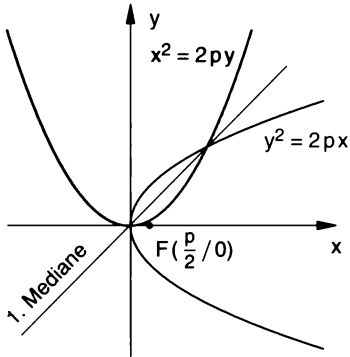


Abb. 1.36 Die Parabeln  $x^2 = 2py$  und  $y^2 = 2px$

Spiegelt man die Parabel mit der Gleichung  $x^2 = 2p \cdot y$  an der 1. Mediane (Abb. 1.36), was ein Vertauschen der Variablen  $x$  und  $y$  bedeutet, so erhält man die *nach rechts* geöffnete Parabel  $y^2 = 2p \cdot x$  oder  $y = \sqrt{2p \cdot x}$ .

Diese Parabel kann wieder so parallel verschoben werden, dass ihr Scheitel  $S$  die Koordinaten  $x_S$  und  $y_S$  besitzt.

**Scheitelgleichung** einer *nach rechts* geöffneten Parabel:

- 1) Scheitelpunkt  $S(0/0)$ :  $y^2 = 2p \cdot x$ ,  $x \geq 0$
- 2) Scheitelpunkt  $S(x_S/y_S)$ :  $(y - y_S)^2 = 2p \cdot (x - x_S)$ ,  $x \geq x_S$

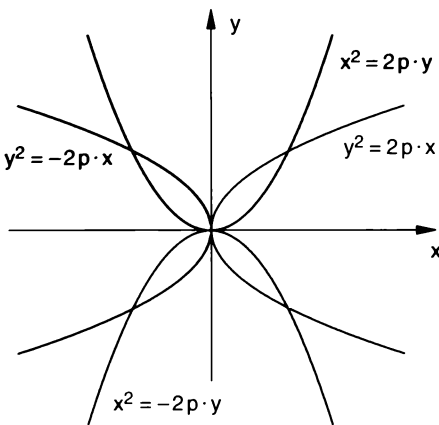


Abb. 1.37 Die 4 "Hauptlagen" einer Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

Spiegelt man die Parabel mit der Gleichung  $x^2 = 2p \cdot y$  an der  $x$ -Achse (Abb. 1.37), was ein Ersetzen von  $y$  durch  $-y$  bedeutet, erhält man die *nach unten* geöffnete Parabel  $x^2 = -2p \cdot y$ .

Spiegelt man die Parabel mit der Gleichung  $y^2 = 2p \cdot x$  an der  $y$ -Achse, was nun ein Ersetzen von  $x$  durch  $-x$  bedeutet, erhält man die *nach links* geöffnete Parabel  $y^2 = -2p \cdot x$ .

Wieder können die Parabeln  $x^2 = -2p \cdot y$  und  $y^2 = -2p \cdot x$  parallel verschoben werden, so dass  $S(x_S/y_S)$  statt  $S(0/0)$  ihr Scheitel ist. Dazu ist  $x$  durch  $x_S - x$  und  $y$  durch  $y_S - y$  zu ersetzen.

### Beispiel 1.8 : Parabelberechnungen

Bestimme den Scheitelpunkt und den Brennpunkt der Parabel

- a)  $y^2 - 3x = 0$
- b)  $y^2 - 2y + 4x + 1 = 0$
- c) Wie lautet die Gleichung der Parabel mit dem Scheitel  $S(2/3)$  und dem Brennpunkt  $F(2/0)$ ?

**Lösung**

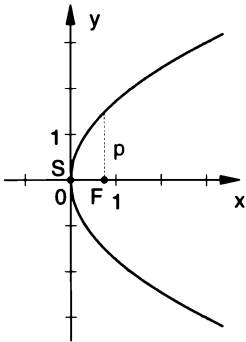


Abb. 1.38

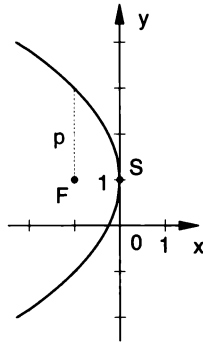


Abb. 1.39

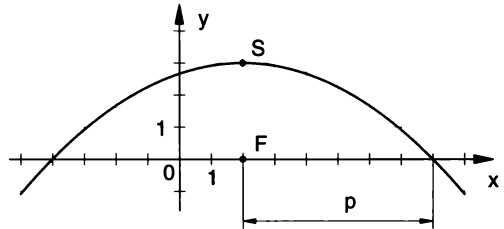


Abb. 1.40

Zu a) Abb. 1.38

$y^2 = 3x = 2p \cdot x$ ; nach rechts geöffnete Parabel mit dem Scheitel im Ursprung und dem Parameter  $p = \frac{3}{2}$ ;  $S(0/0)$ ;  $F(\frac{p}{2}/0) = F(\frac{3}{4}/0)$

Zu b) Abb. 1.39

Quadratische Ergänzung:  $y^2 - 2y + 1 - 1 + 4x + 1 = 0$  oder  $(y - 1)^2 = -4x$ ; nach links geöffnete Parabel mit dem Parameter  $p = 2$  und dem Scheitel  $S(0/1)$ ;

$$F(x_s - \frac{p}{2}/0) = F(-1/0)$$

Zu c) Abb. 1.40

Der Brennpunkt  $F(x_f/y_f)$  liegt unterhalb des Scheitels, d.h. die Parabel ist nach unten geöffnet:  $(x - x_s)^2 = -2p \cdot (y - y_s)$ .

$$\frac{p}{2} = |y_s - y_f| = |3 - 0| = 3.$$

Einsetzen in die Parabelgleichung ergibt  $(x - 2)^2 = -2 \cdot 6 \cdot (y - 3)$  oder

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

**Im Überblick: Parabel**

Die **Parabel** ist definiert als die Menge aller Punkte P einer Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt F, dem *Brennpunkt*, und einer Geraden l, der *Leitlinie*, gleich sind. Der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie heißt *Parameter* p der Parabel.

Der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt ist  $\frac{p}{2}$ .

**Scheitelformen der vier Lagen einer Parabel**, deren Achse entweder parallel zur x- oder y-Achse ist:

- Scheitel S (0/0)**  $x^2 = 2p \cdot y$  nach oben geöffnet
- $x^2 = -2p \cdot y$  nach unten geöffnet
- $y^2 = 2p \cdot x$  nach rechts geöffnet
- $y^2 = -2p \cdot x$  nach links geöffnet

**Scheitel S ( $x_s/y_s$ )** Ersetze x durch  $x - x_s$  sowie y durch  $y - y_s$

**Feststellung der Art des Kegelschnitts:**

Haben in der Gleichung  $A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y = E$  die Koeffizienten A und B gleiches Vorzeichen, so liegt eine Ellipse vor, sonst eine Hyperbel. Ist entweder A oder B gleich null (jedoch nicht beide), so ist der Kegelschnitt eine Parabel.

## Aufgaben

- 1.38 Eine Parabel mit dem Scheitel im Ursprung geht durch den Punkt  $P(1/2)$ . Bestimme ihre Gleichung, wenn die Parabelachse die  
**a)**  $y$ -Achse,                      **b)** die  $x$ -Achse ist.
- 1.39 Ermittle die Gleichung der Parabel, wenn der Scheitel und Brennpunkt gegeben sind:  
**a)**  $S(0/0)$ ,  $F(1/0)$     **b)**  $S(0/0)$ ,  $F(0/2)$     **c)**  $S(0/0)$ ,  $F(-\frac{1}{4}/0)$     **d)**  $S(0/0)$ ,  $F(0/-\frac{3}{2})$   
**e)**  $S(-1/1)$ ,  $F(0/1)$     **f)**  $S(1/1)$ ,  $F(1/3)$     **g)**  $S(1/0)$ ,  $F(0/0)$     **h)**  $S(-1/0)$ ,  $F(1/0)$
- 1.40 Bestimme den Scheitelpunkt und den Brennpunkt folgender Parabel  
**a)**  $y = x^2$     **b)**  $3y^2 + 4x = 0$     **c)**  $6y - x^2 = 0$     **d)**  $4y + x^2 = 0$     **e)**  $y = x^2 - 6x + 11$   
**f)**  $3y^2 - 2x = 2$     **g)**  $y^2 + 2y + 4x = 3$     **h)**  $5y^2 - 10y - 4x + 1 = 0$
- 1.41 Auf der Parabel  $y^2 = 8x$  werden die Punkte gesucht, die vom Brennpunkt der Parabel den Abstand 8 besitzen.
- 1.42 Eine Parabel ist durch 3 Punkte sowie durch ihre Achsenrichtung gegeben. Bestimme ihren Scheitel und Brennpunkt.  
**a)**  $P(2/2)$ ,  $Q(5/4)$ ,  $R(10/6)$ , Parabelachse parallel zur  $x$ -Achse  
**b)**  $P(0/10)$ ,  $Q(3/4)$ ,  $R(-1/4)$ , Parabelachse parallel zur  $y$ -Achse
- 1.43 Eine Parabel hat die Scheitelkoordinate  $x_s = 1$ . Die Gerade  $y = 2$  ist Parabelachse und  $P(3/4)$  ist ein Parabelpunkt. Wie lautet die Parabelgleichung?
- 1.44 Unter welchem Winkel schneidet die Gerade  $2y - x = 6$  die Parabel  $y^2 = 8x$  ?
- 1.45 Ermittle die Gleichung der Tangente an die Parabel  $y^2 = 4x$  sowie ihres Berührungspunktes, die **a)** parallel, **b)** normal zur Geraden  $3x + 4y + 24 = 0$  liegt.

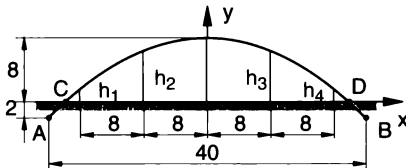


Abb. 1.41

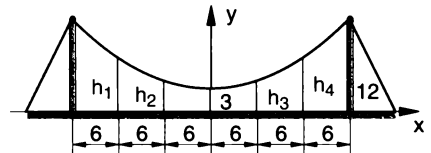


Abb. 1.42

- 1.46 Eine Brücke ist auf einem parabolischen Träger AB aufgehängt (Abb. 1.41, Maße in m). Berechne die Fahrbahnlänge CD sowie die Längen  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  und  $h_4$ .
- 1.47 Das Seil einer Hängebrücke (Abb. 1.42, Maße in m) verläuft parabolförmig. Ermittle die Längen  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  und  $h_4$ .
- 1.48 Ein parabolischer Scheinwerfer (Abb. 1.43) hat einen Durchmesser  $d = 60$  cm und eine Tiefe  $h = 10$  cm. In welcher Entfernung vom Scheitel S muss eine Lichtquelle L auf der Spiegelachse angebracht werden, damit ein achsenparalleles Strahlenbündel entsteht?

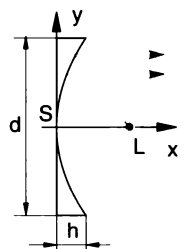


Abb. 1.43

- 1.49 Eine Fahrbahn mit konstanter Steigung 10% wird auf einem parabolförmigen Bogen über einen Graben geführt (Abb. 1.44). Die Parabel genügt der Gleichung  $y = -\frac{x^2}{25}$ . Bestimme die Koordinaten des Punktes P, in dem die Fahrbahn auf dem Bogen aufliegt.

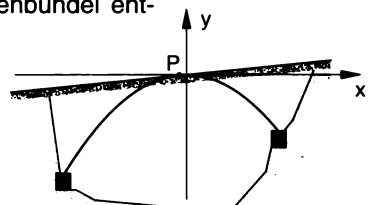


Abb. 1.44

## 1.5 Nichtlineare Gleichungssysteme

Eine Gerade schneidet einen Kegelschnitt (Kreis, Ellipse, Hyperbel oder Parabel) zweimal, einmal oder überhaupt nicht. Zwei Parabeln der Form  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  oder zwei Kreise können einander höchstens zweimal schneiden. Dagegen kann sich ein Kreis und eine Parabel bis zu viermal schneiden. Die folgenden Abbildungen zeigen einige Möglichkeiten von Schnitten von Gerade und Kegelschnitt oder von Kegelschnitt und Kegelschnitt.

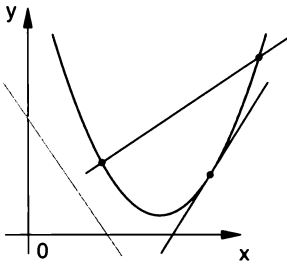


Abb. 1.45

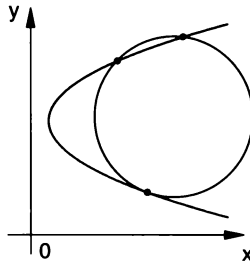


Abb. 1.46

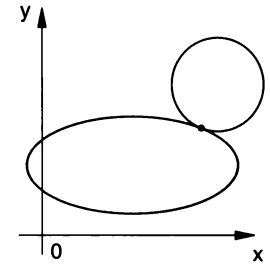


Abb. 1.47

Das Berechnen von Schnittpunkten ist eine immer wiederkehrende Aufgabenstellung (Beispiel: Flächeninhalt zwischen zwei Kurven). Darüberhinaus kann die Lösung von *nicht-linearen Gleichungssystemen* geometrisch als die Ermittlung von Schnittpunkten aufgefasst werden, wenn nur zwei Gleichungsvariable vorkommen.

### Beispiel 1.9 : Lineares und nichtlineares Gleichungssystem in zwei Variablen

Löse das folgende Gleichungssystem rechnerisch und graphisch:

- a) I:  $x + y = 6$                       b) I:  $x + y = 2$   
 II:  $-x + 4y = 4$                       II:  $x^2 - y = 0$

#### Lösung

Zu a) Rechnerische Lösung:  $x = 4$  und  $y = 2$

Graphische Lösung: Jede der beiden Gleichungen stellt geometrisch veranschaulicht eine Gerade dar. Die beiden Geraden schneiden einander. Die Koordinaten ihres Schnittpunktes sind die gesuchten Lösungen (Abb. 1.48).

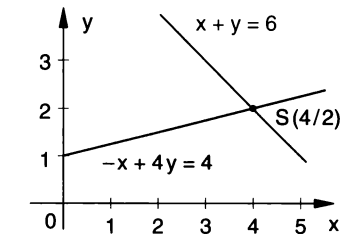


Abb. 1.48

Zu b) Rechnerische Lösung:

Aus I folgt  $y = 2 - x$ . Einsetzen in II ergibt:

$$x^2 - (2 - x) = 0 \text{ oder } x^2 - 2 + x = 0$$

Lösung dieser quadratischen Gleichung:

$$x_1 = 1; x_2 = -2;$$

$$\text{Weiters: } y_1 = 2 - x_1 = 1; y_2 = 2 - x_2 = 4.$$

Damit lauten die Lösungen:

$$x_1 = 1 \text{ und } y_1 = 1 \text{ oder } x_2 = -2 \text{ und } y_2 = 4.$$

In Paarschreibweise:  $(-2; 4)$  oder  $(1; 1)$ .

Abb. 1.49 zeigt die graphische Lösung.

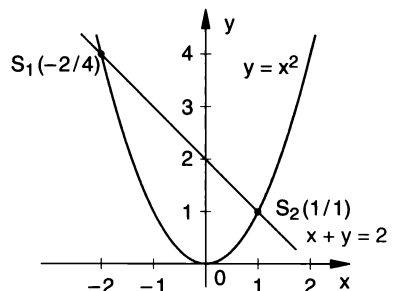


Abb. 1.49

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
solve(-x+4*y=4 and x+y=6, {x y})
x=4 and y=2
solve(-x+4*y=4 and x+y=6, {x, y})
MAIN RAD AUTO FUNC 1/30

```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
solve(-x+4*y=4 and x+y=6, {x y})
x=4 and y=2
solve(x+y=2 and x^2-y=0, {x y})
x=1 and y=1 or x=-2 and y=4
solve(x+y=2 and x^2-y=0, {x, y})
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30

```

In einem **nichtlinearen Gleichungssystem** von zwei Variablen ist wenigstens eine der beiden Gleichungen **nichtlinear**. Beispiel 1.9 ist daher ein nichtlineares Gleichungssystem, weil die zweite Gleichung nichtlinear ist.

Eine lineare Gleichung stellt graphisch eine Gerade dar. Sind die nichtlinearen Gleichungen von der Form  $A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0$ , wobei wenigstens einer der Koeffizienten  $A$  oder  $B$  ungleich null ist, so stellen diese Gleichungen graphisch einen Kegelschnitt dar. Man spricht in diesem Fall auch von einem **quadratischen System**.

### Beispiel 1.10 : Ellipse und Gerade

Löse das folgende quadratische Gleichungssystem:

I:  $x^2 + 4y^2 = 20$

II:  $x + 2y = 2$

#### Lösung

Aus II folgt  $x = 2 - 2y$ . Einsetzen in  $x^2 + 4y^2 = 20$  führt auf eine quadratische Gleichung  $(2 - 2y)^2 + 4y^2 = 20$ . Nach Umformungen wird daraus  $y^2 - y - 2 = 0$ . Ihre Lösungen lauten:  $y_1 = -1$  sowie  $y_2 = 2$ . Die zugehörigen  $x$ -Werte sind:  $x_1 = 2 - 2 \cdot y_1 = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$  sowie  $x_2 = 2 - 2 \cdot y_2 = 2 - 2 \cdot 2 = -2$ .

Somit lauten die Lösungen des Systems in Paarschreibweise:  $(4; -1)$  sowie  $(-2; 2)$ .

Abb. 1.50 zeigt die graphische Lösung.

Gleichung I kann nach Division durch 20 in der

Form geschrieben werden:  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ ; dies ist die Mittelpunktsleichung einer Ellipse.

Die beiden Lösungen sind die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Ellipse:

$S_1(4|-1)$  sowie  $S_2(-2|2)$ .

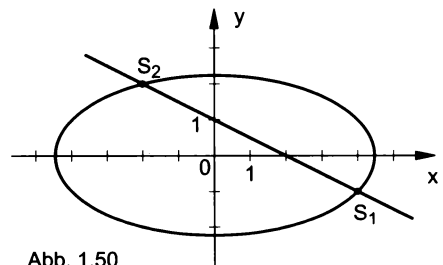


Abb. 1.50

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
solve(x^2+4*y^2=20 and x+2*y=2, {x y})
x=4 and y=-1 or x=-2 and y=2
solve(x^2+4*y^2=20 and x+2*y=2*sqrt(10), {x y})
x=sqrt(10) and y=sqrt(10)/2
solve(x^2+4*y^2=20 and x+2*y=8, {x y})
false
solve(x^2+4*y^2=20 and x+2*y=8, {x, y})
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

```

Ändert man Gleichung II auf  $x + 2y = 2 \cdot \sqrt{10}$ , so gibt es nur mehr eine Lösung, die der Gleichung II entsprechende Gerade wird zur Tangente.

Lautet Gleichung II beispielsweise  $x + 2y = 8$ , so schneidet die entsprechende Gerade die Ellipse nicht mehr. Rechne mit der Hand nach!

**Beispiel 1.11 : Ellipse und Parabel**

Löse das folgende Gleichungssystem:

I:  $x^2 + 4y^2 - 8y = 96$

II:  $x^2 - 4y = 16$

**Lösung**

Aus II folgt  $x^2 = 4y + 16$ ; Einsetzen in I ergibt  $4y + 16 + 4y^2 - 8y = 96$  oder  $y^2 - y - 20 = 0$ . Daraus folgt  $y_1 = 5$  und  $y_2 = -4$ .

$y_1 = 5$ :  $x^2 = 4y_1 + 16 = 36$ ;  $x = \pm 6$ ;

$y_2 = -4$ :  $x^2 = 4y_2 + 16 = 0$ ;  $x = 0$ .

Es gibt somit drei Lösungen des Gleichungssystems:  $(-6; 5)$ ,  $(0; -4)$  sowie  $(6; 5)$ .

Abb. 1.51 zeigt die graphische Darstellung.

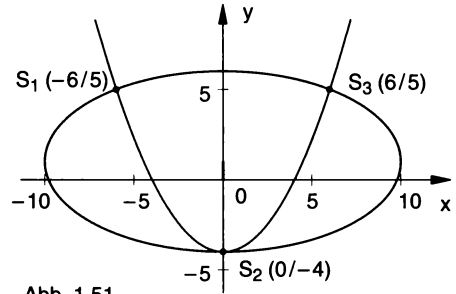


Abb. 1.51

**Beispiel 1.12 : Ellipse und Hyperbel**

Löse das folgende Gleichungssystem:

I:  $4x^2 - 8x + y^2 = 0$

II:  $x^2 - 2x - y^2 = 0$

**Lösung**

Addition der beiden Gleichungen ergibt  $5x^2 - 10x = 0$  oder  $5x \cdot (x - 2) = 0$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ .

Aus II folgt  $y^2 = x^2 - 2x$ ;  $y_1^2 = x_1^2 - 2x_1$  oder  $y_1 = 0$ .

Desgleichen ergibt sich  $y_2 = 0$ .

Lösungen des Gleichungssystems:

$x_1 = 0$  und  $y_1 = 0$  sowie  $x_2 = 2$  und  $y_2 = 0$ .

Abb. 1.52 zeigt die graphische Darstellung des Gleichungssystems.

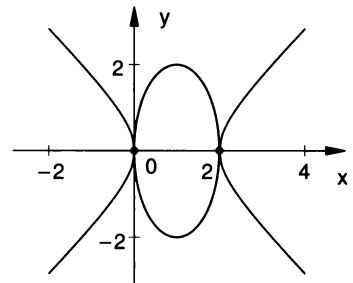


Abb. 1.52

**Beispiel 1.13 : Freileitung**

Schwach durchhängende Seile haben in guter Näherung Parabelform. Ermittle die Gleichung des Parabelstücks in Abb. 1.53 aus den Höhen  $h_1 = 7$  m,  $h_2 = 10$  m der Masten, ihrer Entfernung  $s = 20$  m voneinander und der Minimalhöhe  $h_0 = 6$  m.

**Lösung**

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ;  $y' = 2ax + b$

Ist  $x_0$  die Stelle, an der die minimale Höhe auftritt, so gilt:  $y'(x_0) = 2 \cdot a \cdot x_0 + b = 0$ ; daraus folgt:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

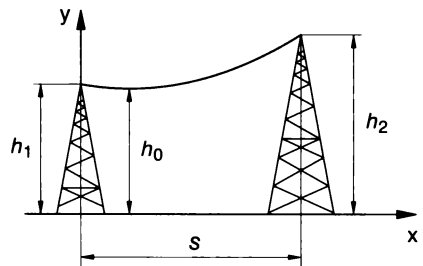


Abb. 1.53

Die Punkte  $(0/7)$ ,  $(x_0/6)$  und  $(20/10)$  sind Punkte der gesuchten Parabel:

$$\text{I: } 7 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$\text{II: } 6 = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$\text{III: } 10 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c.$$

Aus I folgt sofort  $c = 7$ . Setzt man in II und III ein, so erhält man nach kurzer Rechnung das folgende quadratische Gleichungssystem für  $a$  und  $b$ :

$$\text{II*}: b^2 = 4a$$

$$\text{III*}: 400a + 20b = 3.$$

$$\text{Daraus: } a = \frac{9}{400} \text{ und } b = -\frac{3}{10} \text{ sowie } a = \frac{1}{400} \text{ und } b = \frac{1}{10}.$$

Nur für die Parabel mit  $a = \frac{9}{400}$  und  $b = -\frac{3}{10}$  ist  $x_0 > 0$ .

Somit lautet die Gleichung der gesuchten Parabel:  $y = \frac{9}{400}x^2 - \frac{3}{10}x + 7$ .

## Im Überblick: Nichtlineare Gleichungssysteme

In einem nichtlinearen Gleichungssystem ist wenigstens eine der Gleichungen des Systems **nichtlinear**.

Sind die nichtlinearen Gleichungen von der Art  $A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0$  und ist wenigstens einer der Koeffizienten  $A$  oder  $B$  ungleich null, so stellt diese Gleichung graphisch einen **Kegelschnitt** dar. Man spricht dann auch von einem **quadratischen Gleichungssystem**.

Kommen nur nichtlineare Gleichungen dieser Art vor, so kann man wie bei linearen Gleichungssystemen eine der beiden Variablen eliminieren, um eine Gleichung in nur einer Unbekannten zu erhalten.

### Aufgaben

1.50 Löse das folgende quadratische System und stelle es graphisch dar:

a)  $2x + y = 5$

$$-x^2 + 6x + y = 5$$

b)  $-x + y = 1$

$$x^2 + y^2 = 25$$

c)  $2y - x = 8$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y = 3$$

d)  $-x + 2y = 6$

$$x - y^2 + 4y = 3$$

e)  $2x - y = 5$

$$4x^2 + 9y^2 = 45$$

f)  $3x - y = 1$

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

1.51 Löse das folgende quadratische System und stelle es graphisch dar:

a)  $y = x^2$

$$y = x^2 - 8x + 24$$

b)  $x^2 + y^2 = 25$

$$2x^2 + y^2 = 34$$

c)  $-4x^2 + 9y = 0$

$$x^2 + y^2 = 25$$

d)  $x^2 - 2y^2 = 4$

$$x = y^2 + 2$$

e)  $x - 2y^2 = 0$

$$x^2 - y^2 = 3$$

f)  $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y = 0$

$$x^2 - 3y^2 - 4x + 6y = 0$$

1.52 Löse das folgende quadratische System:

a)  $x^2 - 2x + y - 1 = 0$

$$x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$$

b)  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

c)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

d)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$$(x - 1)^2 - y^2 = 1$$

e)  $3y = x^2 - 9$

$$x^2 + y^2 + 2y = 3$$

f)  $x^2 - y(y - 2) = 10$

$$x^2 - 4(y - 1)^2 = 6$$



## 2 Diskrete Mathematik

Die diskrete Mathematik beschäftigt sich mit *endlichen* Mengen. In solchen Mengen kann man irgend etwas abzählen, etwa alle Paare von Elementen, die man bilden kann. Man kann auch Beziehungen zwischen den Elementen einführen und kommt so zu den Graphen. Statt mit den natürlichen oder reellen Zahlen kann man auch mit nur *endlich* vielen "Dingen" Mathematik betreiben: Man erhält besondere *algebraische Strukturen* mit Rechenregeln, die von der gewöhnlichen Algebra stark abweichen. Anwendungsbeispiele dafür sind die Verschlüsselung von Nachrichten oder die Schaltalgebra. Weiters geht es in diesem Kapitel um das Aufsuchen einer optimalen Lösung gewisser Probleme. Veranschaulicht man geometrisch, so tritt die optimale Lösung im Allgemeinen in einer von den *endlich* vielen Ecken eines ebenflächigen konvexen Körpers auf. Man betritt damit das weite Gebiet der linearen Optimierung, die von hoher praktischer Bedeutung ist.

### 2.1 Abzähltechniken

Viele Probleme der Wirtschaft, Informatik, Statistik und dgl. erfordern es, die Anzahl der Durchführungen eines bestimmten Versuchs zu kennen. Diese Anzahl kann sehr groß sein und ist dann nicht mehr durch bloßes Abzählen zu finden. Als Beispiel dazu soll das Ziehen einer Stichprobe von drei Artikeln aus einem Behälter ("Prüflos") von 15 Artikeln dienen. Wie viele verschiedene Stichproben sind denkbar, wenn man drei Einheiten aus dem Behälter entnimmt (Abb. 2.1)?

Denkt man sich die Artikel des Behälters durchnummeriert, so sind mögliche Stichproben:

(4, 7, 15), (11, 3, 1), (8, 7, 2) usw. Möchte man ihre Anzahl feststellen, so gelingt dies kaum mehr durch Aufschreiben und Abzählen. Daher sollen nun zuerst einige grundlegende Abzähltechniken behandelt werden. Das Gebiet, das sich damit in der Mathematik beschäftigt, heißt *Kombinatorik*. Wir beginnen mit zwei sehr grundlegenden Abzählaufgaben.

Prüflos

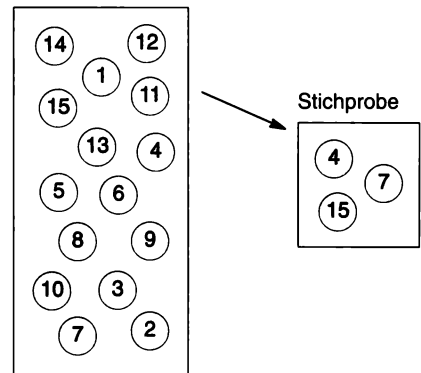


Abb. 2.1 Eine Stichprobe von vielen denkbaren

Es mögen  $n = 7$  Personen gegeben sein, die kurz mit a, b, c, d, e, f, g bezeichnet werden.

1. *Wie viele verschiedene Reihenfolgen* dieser Personen (beispielsweise Sitzanordnungen auf einer Bank) kann man bilden? Z.B.: abcdefg, fbcegad, ...

Jede solche Reihenfolge oder Anordnung wird **Permutation** dieser 7 Personen genannt.

Für die erste Stelle in der Reihenfolge sind noch alle 7 Personen möglich, für die zweite Stelle dann noch 6 Personen, für die dritte Stelle nur noch 5 Personen, an jeder weiteren Stelle um eine Person weniger. Damit ergibt sich als gewünschte Anzahl:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! \quad (\text{gesprochen: 7 Fakultät oder auch 7 Faktorielle})$$

Allgemein gilt, wenn statt der Personen irgendwelche  $n$  verschiedene "Elemente" gegeben sind:

#### Anzahl der Permutationen

Die Anzahl der Permutationen von  $n$  Elementen ist  $n!$  ( $n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$ ).

2. Für irgendeine Tätigkeit werden  $k = 3$  Personen benötigt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten (Abb. 2.2) gibt es für eine solche Auswahl aus den  $n = 7$  Personen?

Z.B.: acg, ade, ...

Wir nehmen an, dass die Reihenfolge in einer solchen Dreier-Auswahl belanglos ist. D.h., dass etwa die  $3! = 6$  Permutationen acg, cga, gac, cag, agc und gca *dieselbe* Auswahl bezeichnen.

Jede dieser Auswahlen, die sich *ohne Berücksichtigung der Reihenfolge* bilden lässt, heißt eine **Kombination**.

Für die erste Stelle in einer solchen Auswahl sind noch alle 7 Personen möglich, für die zweite Stelle 6 Personen und an der dritten Stelle 5 Personen. Dies würde  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$  Auswahlen ergeben. Da darunter jedoch stets  $3! = 6$  Auswahlen sich nur in der Reihenfolge unterscheiden und daher gleich sind, ist die Zahl  $210 = 7 \cdot 6 \cdot 5$  durch  $3!$  zu dividieren:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Wie schon in "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 21 eingeführt, verwendet man dafür das Schreibsymbol  $\binom{7}{3}$ , gesprochen: "7 über 3". Es wird **Binomialkoeffizient** genannt.

Allgemein definiert man:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n$$

Beachte, dass im Zähler gleich viele Faktoren stehen wie im Nenner, wenn man dort 1 mitzählt.

Zusätzlich wird definiert:  $\binom{n}{0} = 1$ .

Allgemein gilt der folgende wichtige, bei Abzählvorgängen oft anwendbare Satz:

### Anzahl der Kombinationen

Ist aus  $n$  Elementen eine Auswahl von  $k$  Elementen zu treffen, wobei die *Reihenfolge ohne Bedeutung* ist, so gibt es dafür  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten.

Dabei wird vorausgesetzt, dass ein Element nicht mehrfach ausgewählt werden kann, dass es sich also um Kombinationen "ohne Wiederholung" handelt.

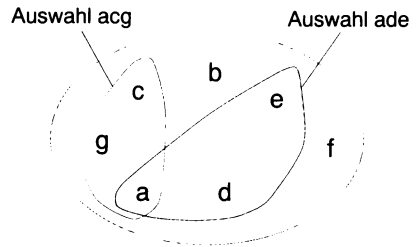


Abb. 2.2 Zwei verschiedene Auswahlen von je  $k = 3$  Personen

### Beispiel 2.1 : Permutationen und Kombinationen

- Wie lange würde man brauchen, eine Serie von 10 Bildern nebeneinander in allen verschiedenen Reihenfolgen an die Wand zu hängen, wenn das Aufhängen einer Serie eine Minute beansprucht?
- Wie viele verschiedene Tipps gibt es beim Zahlenlotto "6 aus 45"?
- Eine Münze wird zehnmal geworfen. Bei wie vielen Wurffolgen unter allen möglichen tritt genau viermal Kopf auf?

**Lösung**

Zu a)  $10! = 3628800$  Möglichkeiten;  $10!/(60 \cdot 24 \cdot 365) \approx 6,9$  Jahre ohne Unterbrechung

Zu b)  $\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8145060$

Zu c) Bezeichnen wir das Werfen von Kopf mit K, das Werfen von Zahl mit Z, so könnten einige Wurffolgen lauten: ZKZZKZZKKZ, ZZZKZKKZZK, KZKZKZZZKZ, .... In der folgenden Tabelle sind die Wurfnummern des Auftretens von K notiert:

Wurffolge	Auftreten von K in der Wurffolge
ZKZZKZZKKZ	2. Wurf, 5. Wurf, 8. Wurf, 9. Wurf
ZZZKZKKZZK	4. Wurf, 6. Wurf, 7. Wurf, 10. Wurf
KZKZKZZZKZ	1. Wurf, 3. Wurf, 5. Wurf, 9. Wurf
...	...

Damit ergibt sich ein Zugang zur Lösung unseres Abzählproblems: offenbar gibt es so viele interessierende Wurffolgen, wie es möglich ist, 4 Zahlen aus den 10 Zahlen 1, 2, ..., 10 auszuwählen (Abb. 2.3).

Zu klären ist noch, ob die Reihenfolge der Wurfnummern für K von Bedeutung ist. Dies ist nicht der Fall, die Wurfnummer 2589 bezeichnet dieselbe Wurffolge wie 5289 oder jede andere Permutation der Zahlen 2, 5, 8 und 9. Es liegt somit eine Kombination von 4 Zahlen aus 10 Zahlen vor.

Die Anzahl dieser Kombinationen ist

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Damit gibt es 210 verschiedene Wurffolgen mit viermaligem Auftreten von Kopf.

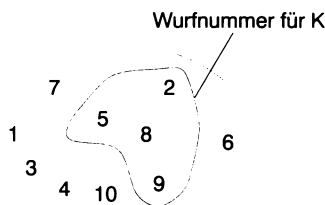


Abb. 2.3

### Beispiel 2.2 : Ziehen einer Stichprobe

In einem Behälter ("Prüflos") befinden sich  $N = 15$  Artikel ("Einheiten"). Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich daraus eine Stichprobe von  $n = 3$  Artikel entnehmen?

**Lösung**      Abb. 2.1, Seite 28

Denkt man sich die 15 Artikel mit 1 bis 15 durchnummeriert, so kann eine mögliche Stichprobe durch 3 Zahlen angegeben werden. So bedeutet etwa 4, 7, 15, dass die Artikel mit den Nummern 4, 7 und 15 entnommen wurden. Die Stichprobe 4, 7, 15 ist natürlich die gleiche wie 7, 4, 15 oder 7, 15, 4. Jede Stichprobe ist somit eine Kombination (ungeordnete Auswahl) von 3 Zahlen aus 15 Zahlen angesehen werden.

Die Anzahl der verschiedenen Stichproben ist daher:  $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$

Das folgende Beispiel enthält zwei weitere Abzählaufgaben.

### Beispiel 2.3 : Variationen oder geordnete Auswahlen

- a) Aus einer Gruppe von  $n = 7$  Personen soll ein Gruppensprecher, ein Schriftführer sowie ein Kassier gewählt werden. Auf wie viele Arten kann dies erfolgen?  
 b) Eine Münze wird zehnmal geworfen. Wie viele verschiedene Wurffolgen gibt es?

#### Lösung

Zu a) Jede Auswahl besitzt einen Sprecher, einen Schriftführer und einen Kassier:

Sprecher	Schriftführer	Kassier
----------	---------------	---------

Als Sprecher kommen 7 Personen in Frage. Ist der Sprecher bestimmt, so gibt es für den Schriftführer noch 6 Personen. Ist auch dieser bestimmt, so kommen noch 5 Personen für den Kassier in Frage. Insgesamt gibt es also  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$  Arten der Auswahl.

Man kann auch folgendermaßen überlegen: Vorerst gibt es  $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$  Arten, wie man 3 Personen aus den 7 Personen auswählen kann. Ist eine solche Auswahl erfolgt, so gibt es noch  $3! = 6$  Permutationen der Reihung als Sprecher, Schriftführer und Kassier. Insgesamt gibt es also  $\binom{7}{3} \cdot 3! = 35 \cdot 6 = 210$  Arten der Auswahl.

Man spricht hier auch von einer *geordneten* Auswahl, einer Auswahl *bei Berücksichtigung der Reihenfolge*, kurz von einer **Variation**. Die Permutation ist eine spezielle Variation:  $k = n$ , aus  $n$  Einheiten werden alle  $n$  Einheiten ausgewählt.

Im Englischen wird eine Variation (ohne Wiederholung, siehe b) ) als Permutation bezeichnet. Dies erklärt die Bezeichnung  $nPr$  bei vielen Taschenrechnern.

Zu b) Man kann sich vorstellen, dass 10 Boxen mit je einem der Buchstaben K für Kopf oder Z für Zahl zu füllen sind.

K	Z	Z	K	Z	K	K	Z	K	Z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Jede Box kann auf zwei Arten gefüllt werden. Man erhält auf diese Weise insgesamt  $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{10 \text{ Faktoren}} = 2^{10}$  verschiedene Wurffolgen.

Auch hier handelt es sich um geordnete Auswahlen, also Variationen. Aus den  $n = 2$  Elementen K sowie Z werden nun  $k = 10$  Elemente ausgewählt. Es wird aber nun zugelassen, dass man ein Element mehrfach auswählt (was natürlich in a) nicht möglich ist). Man spricht von einer **Variation mit Wiederholung**.

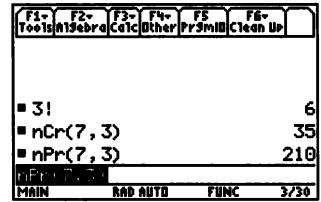
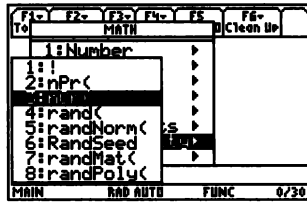
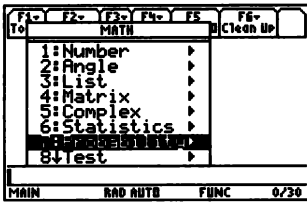
Allgemein:

#### Anzahl der Variationen

Ist aus  $n$  Elementen eine Auswahl von  $k$  Elementen zu treffen, wobei nun aber die *Reihenfolge von Bedeutung* ist, so gibt es dafür  $\binom{n}{k} \cdot k!$  Möglichkeiten.

Eine Permutation ist der Sonderfall einer Variation für  $k = n$ .

Von praktischer Bedeutung sind auch Variationen, bei denen eine Mehrfachauswahl der Elemente möglich ist (Variationen mit Wiederholung). In diesem Fall gibt es  $n^k$  Möglichkeiten der Auswahl.



Die Berechnung der Fakultät einer natürlichen Zahl, der Anzahl von Kombinationen oder Permutationen kann über das MATH-Menü erfolgen. Das Fakultätszeichen ! findet man auch im Menü CHAR/Punctuation, beim Voyage 200 auch durch **W**.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Anzahl der Kombinationen sowie der Variationen, bei letzteren auch mit Wiederholung (Kombinationen mit Wiederholung sind von geringerer praktischer Bedeutung und werden nicht behandelt):

<p><b>Anzahl der Kombinationen</b> (Reihenfolge ohne Bedeutung):</p> $\binom{n}{k}$	<p><b>Anzahl der Variationen</b> (Reihenfolge von Bedeutung): <math>\binom{n}{k} \cdot k!</math></p> <p><b>Anzahl der Permutationen</b> (Sonderfall für <math>k = n</math>): <math>n!</math></p> <p><b>Anzahl der Variationen mit Wiederholung:</b> <math>n^k</math></p>
---	--

**Im Überblick: Abzähltechniken**

**Kombinationen** und **Variationen** (letztere mit den **Permutationen** als Sonderfall) sind Werkzeuge zur Lösung von Abzählproblemen.

Eine Auswahl von  $k$  Elementen aus  $n$  Elementen ist eine **Kombination** dieser  $k$  Elemente, wenn eine unterschiedliche Reihenfolge in der Aufzählung der  $k$  Elemente *keine* andere Auswahl bedeutet.

Ist dies jedoch der Fall, so heißt die Auswahl eine **Variation** (speziell **Permutation**, wenn  $k = n$ ).

**Aufgaben**

- 2.1 Für ein Menü aus drei Gängen kann aus 4 verschiedenen Vorspeisen, 8 verschiedenen Hauptspeisen und 3 verschiedenen Nachspeisen ausgewählt werden. Wie viele Tage kann man speisen, ohne dass sich ein Menü wiederholt?
- 2.2 Fünf Kabeln sind an 5 Klemmen anzuschließen. Auf wie viele Arten ist dies möglich, wenn die richtige Verbindung
  - a) von keinem Kabel
  - b) von zwei Kabeln bekannt ist?
- 2.3 A group of four girls and five boys is to be photographed.
  - a) How many ways can they be arranged in one row?
  - b) How many ways can they be arranged with the girls in the front row and the boys in the back row?

- 2.4** Bei einer Konferenz sind Teilnehmer aus Ländern mit 8 verschiedenen Sprachen anwesend. In jeder dieser 8 Sprachen können Referate gehalten werden. Wie viele Dolmetscher sind nötig?
- 2.5** Bei einem Tennisturnier treten 8 Personen an. Wie viele Spiele müssen ausgetragen werden, wenn jede Person gegen jede andere spielt?
- 2.6** Bei der Fußball-Weltmeisterschaft gibt es 8 Gruppen zu je 4 Mannschaften. In jeder dieser Gruppen spielt jede Mannschaft gegen jede andere. Die Ersten und Zweiten in jeder Gruppe steigen in das Achtelfinale auf, wobei es nun wie auch im folgenden Viertel- und Halbfinale nur mehr ein Spiel für jede Mannschaft gibt: die Sieger steigen jeweils in die nächste Runde auf. Wie viele Spiele gibt es bis einschließlich zum Finale?
- 2.7** Im ASCII-Code wird jedes Zeichen (Buchstabe, Ziffer, Sonderzeichen) durch 7 Bit dargestellt, wobei 1 Bit die Werte Null oder Eins annehmen kann. Wie viele verschiedene Zeichen können damit kodiert werden?
- 2.8** In einem Unternehmen gibt es 700 Beschäftigte. Gibt es dabei 2 Beschäftigte mit gleichen Initialen (Anfangsbuchstaben des Vornamens und Zunamens bei 26 möglichen Buchstaben)?
- 2.9** Durch Hochstrecken, Tiefstrecken, Rechts- oder Linksstrecken jedes der beiden Arme kann eine Signalsprache gebildet werden. Wie viele verschiedene Zeichen lassen sich damit ausdrücken?
- 2.10** Eine Multiple-Choice-Prüfung enthält 10 Fragen mit vier Antwortmöglichkeiten; genau eine Antwort ist jeweils richtig. Wie viele Möglichkeiten der Beantwortung gibt es für einen Studenten, wenn er alle Fragen beantwortet?
- 2.11** Die Zeichen der Morse-Schrift werden aus den beiden Elementen "Punkt" und "Strich" gebildet. Dabei werden 1, 2, 3, 4 oder 5 dieser Elemente verwendet. Wie viele Zeichen lassen sich damit bilden?
- 2.12** Wie viele verschiedene Zeichenketten könne durch Umordnen des Wortes "KLEE" gebildet werden?
- 2.13** Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus fünf Bildern drei auszuwählen und diese in unterschiedlicher Reihenfolge an die Wand zu hängen?
- 2.14** Eine Gruppe von 10 Mitarbeitern soll fotografiert werden. Für 4 Personen steht eine Bank zur Verfügung. Auf wie viele verschiedene Arten kann die Bank besetzt werden, wenn eine unterschiedliche Sitzreihenfolge **a)** ohne Bedeutung; **b)** von Bedeutung ist?
- 2.15** Bei einer Betriebseröffnung werden 4 mit a, b, c und d bezeichnete Personen eine Rede halten. Wie viele verschiedene Reihenfolgen von Rednern sind denkbar,  
**a)** bei beliebig möglicher Anordnung  
**b)** wenn a stets an erster Stelle spricht  
**c)** d nicht an erster Stelle sprechen möchte.
- 2.16** Wie viele verschiedene Sitzanordnungen gibt es für 5 Personen in einem fünfsitzigen PKW, wenn  
**a)** jede Person einen Führerschein hat  
**b)** nur drei Personen einen Führerschein haben.

- 2.17** Wie viele Wörter aus 4 Buchstaben (unsinnige Wörter eingeschlossen) lassen sich aus den 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g unter der folgenden Bedingung bilden?
- Buchstaben können wiederholt werden.
  - Buchstaben dürfen nicht wiederholt werden.
  - Wörter müssen mit b beginnen, Wiederholungen sind erlaubt.
  - Wörter müssen mit einem Vokal enden, Wiederholungen sind nicht erlaubt.
- 2.18** Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Mehrheitsbildung gibt es in einer 6-köpfigen Kommission?
- Hinweis:* Mehrheiten sind 4 zu 2, 5 zu 1 oder 6 zu 0.
- 2.19** Wie viele Tippreihen sind beim Zahlenlotto "6 aus 45" denkbar mit
- 5 richtigen Zahlen mit Zusatzzahl,    **b)** 5 richtigen Zahlen ohne Zusatzzahl,
  - 4 richtigen Zahlen,    **d)** 3 richtigen Zahlen,    **e)** keiner richtigen Zahl?
- 2.20** Für einen optischen Personenruf werden vier in Reihe angeordnete Signallampen verwendet. Jede Lampe kann drei Leuchtzustände annehmen: nicht leuchten, ruhig leuchten und blinken. Wie viele Personen können damit gerufen werden, wenn
- eine Lampe,    **b)** zwei,    **c)** drei,    **c)** vier Lampen zum Einsatz kommen und die Reihenfolge der Lampen zu berücksichtigen ist? Leuchtet keine Lampe, so bedeutet dies sinnvollerweise keinen Personenruf.
- 2.21** Eine Lieferung von 20 Elektrogeräten enthält 3 fehlerhafte Geräte. Man entnimmt dieser Lieferung eine Stichprobe vom Umfang 4.
- Auf wie viele verschiedene Arten kann eine solche Stichprobe entnommen werden?
  - Wie viele dieser Arten enthalten genau ein fehlerhaftes Gerät?
- 2.22** A bag of 12 apples contains 3 rotten apples and 9 good apples. A shopper selects at random a sample of 4 apples from the bag.
- How many different samples are possible?
  - How many samples contain all good apples?
  - How many samples contain at least 1 rotten apple?
- 2.23** Eine Gruppe besteht aus 4 Mädchen und 5 Burschen. Auf wie viele Arten können daraus Abordnungen gebildet werden, die aus 2 Mädchen und 2 Burschen bestehen?
- 2.24** Eine Münze wird achtmal geworfen. Bei wie vielen Wurffolgen tritt
- genau zweimal,
  - höchstens zweimal,    **c)** mindestens zweimal Kopf auf?
- 2.25** Wie viele verschiedene Routen gibt es auf einem Gitter (Abb. 2.4),
- von A nach B,
  - von A nach B über C, wenn die Bewegung nur nach rechts oder nach oben erfolgen darf?
- Hinweis:* In Abb. 2.4 ist die Route RORROORRRRO für a) gezeichnet.

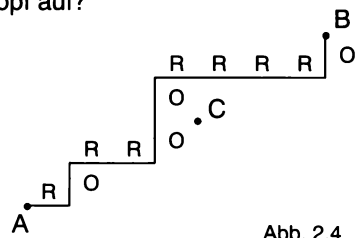


Abb. 2.4

- 2.26** Eine Gruppe von 20 Schülern soll auf 3 Gruppen mit 8, 7 bzw. 5 Schülern aufgeteilt werden. Auf wie viele Arten ist das möglich?
- 2.27** Bei einer 12-stelligen Tippkolonne im Sport-Toto sind 3 verschiedene Tipps möglich: 1, 2 oder x.
- Wie viele verschiedene Tippkolonnen sind denkbar?
  - Wie viele Tippkolonnen sind Zwölfer, Elfer, Zehner oder Neuner?

## 2.2 Modulare Arithmetik und Verschlüsselung

Die modulare Arithmetik, kurz das Modulo-Rechnen, ist eine vielseitige Methode zur Behandlung besonders von zahlentheoretischen Fragestellungen. Sie findet dabei auch Anwendung bei der Erstellung von geheimen Nachrichten, im Besonderen beim RSA-Algorithmus.

Dividiert man beispielsweise 23 ganzzahlig durch 4, so erhält man 5 und als Rest 3. Man kann auch schreiben:  $23 = 5 \cdot 4 + 3$ . Allgemein:

Es sei  $x$  eine beliebige natürliche Zahl und  $n$  eine natürliche Zahl  $\geq 2$ , die **Modul** genannt wird.

Dann gilt:  $x = q \cdot n + r$ ,

wobei  $q$  der im Folgenden nicht interessierende Quotient bei der Ganzzahldivision und  $r$  der dabei anfallende nicht negative **Rest** ist.

Kurzschreibweise:  $r = x \bmod n$ , gesprochen:  $r$  ist gleich  $x$  modulo  $n$ .

Mit Hilfe der Integer-Funktion kann auch geschrieben werden:

$x \bmod n = x - n \cdot \text{int}(x/n)$ .

$x \bmod m$  wurde bereits in "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 31, für den ganzzahligen Rest bei der Division einer ganzen Zahl  $x$  durch  $m$  geschrieben. Für das Weitere genügt es, die Werte für  $x$  auf die natürlichen Zahlen einzuschränken.

### Beispiel 2.4 : Restbestimmung modulo $n$

- a) Bilde  $42 \bmod 5$  und  $42 \bmod 7$   
 b) Bilde den ganzzahligen Rest  $r = x \bmod n$  mit dem Modul  $n = 5$  für alle natürlichen Zahlen  $x$  bis 23.

#### Lösung

Zu a)  $42 : 5 = 8$ , Rest 2, also ist  $42 \bmod 5 = 2$ ;  $42 : 7 = 6$ , Rest 0, also ist  $42 \bmod 7 = 0$ .

Zu b) $0 \bmod 5 = 0$	$8 \bmod 5 = 3$	$16 \bmod 5 = 1$
$1 \bmod 5 = 1$	$9 \bmod 5 = 4$	$17 \bmod 5 = 2$
$2 \bmod 5 = 2$	$10 \bmod 5 = 0$	$18 \bmod 5 = 3$
$3 \bmod 5 = 3$	$11 \bmod 5 = 1$	$19 \bmod 5 = 4$
$4 \bmod 5 = 4$	$12 \bmod 5 = 2$	$20 \bmod 5 = 0$
$5 \bmod 5 = 0$	$13 \bmod 5 = 3$	$21 \bmod 5 = 1$
$6 \bmod 5 = 1$	$14 \bmod 5 = 4$	$22 \bmod 5 = 2$
$7 \bmod 5 = 2$	$15 \bmod 5 = 0$	$23 \bmod 5 = 3$

Im Beispiel 2.4 b) treten nur die 5 Reste: 0, 1, 2, 3 und 4 auf, die sich regelmäßig wiederholen. Restgleiche Zahlen werden als zueinander "kongruent" (Zeichen:  $\equiv$ ) bezeichnet, weil sie in mancher Hinsicht als gleich angesehen werden können.

Ist es beispielsweise 9 Uhr, so ist es 7 Stunden später 4 Uhr Nachmittag:  $9 + 7 \equiv 4 \pmod{12}$ . Die Zahlen  $16 = 9 + 7$  und 4 sind kongruent modulo 12. Deswegen wird die modulare Arithmetik manchmal auch als Uhren-Arithmetik bezeichnet (Abb. 2.5).

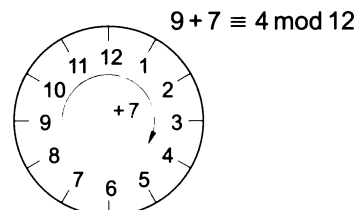


Abb. 2.5 Uhren-Arithmetik



Die modulare Arithmetik ist eine Mathematik mit nur *endlich* vielen Zahlen, nämlich den Resten bei der ganzzahlig geführten Division durch  $n$ , dem Modul. Man kann erwarten, dass hier andere Rechenregeln bestehen wie in der gewöhnlichen Arithmetik. Trotzdem bleiben viele Gesetze in der gewöhnlichen und modularen Arithmetik gleich, wie etwa das Kommutativgesetz:  $9 + 7 \equiv 4 \pmod{12}$ , aber auch  $7 + 9 \equiv 4 \pmod{12}$ . Die moderne Mathematik befasst sich mit der "algebraischen Struktur" der modularen Arithmetik und vergleicht sie mit jener von anderen Bereichen wie der Zahlen, Vektoren, Matrizen, logischen Schaltungen, usw.

Wir fassen zuerst zusammen:

Zwei ganze Zahlen  $x$  und  $y$  heißen **kongruent modulo  $n$** , wenn sie bei der Ganzzahldivision durch  $n$  denselben nichtnegativen Rest  $r$  haben, d.h. wenn  $x \pmod{n} = y \pmod{n}$  ist.

Kurzschreibweise:  $x \equiv y \pmod{n}$ , gesprochen:  $x$  ist kongruent  $y$  modulo  $n$ .

So sind im Beispiel 2.4 b) die Zahlen 2, 7, 12, 17 und 22 restgleich oder kongruent modulo 5:  
 $2 \equiv 7 \equiv 12 \equiv 17 \equiv 22 \pmod{5}$

Dieser gemeinsame Rest ist 2. Alle diese kongruenten Zahlen unterscheiden sich um ein Vielfaches des Moduls 5.

Im Rahmen der modularen Arithmetik kann jede Zahl durch eine zu ihr kongruente Zahl ersetzt werden.

Ähnlich sind beispielsweise die Brüche  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{12}{18}$  und  $\frac{2}{3}$  in der gewöhnlichen Arithmetik gleichwertig. Trotzdem wird man beim Auftreten eines dieser Brüche innerhalb einer Rechnung in der Regel mit dem gekürzten Bruch arbeiten.

In der Regel ersetzt man eine beliebige natürliche Zahl  $x$  durch die zu ihr *kleinste* natürliche kongruente Zahl. *Dies ist gerade der Rest  $x \pmod{n}$ .* Um dies zu erreichen, nützt man bestimmte Rechenregeln im Umgang mit kongruenten Zahlen. Diese werden soweit besprochen, wie sie bei der folgenden Verschlüsselung von Nachrichten durch den "RSA-Algorithmus" erforderlich sind.

*Beispiel:*  $90 \pmod{7} = ?$  Wie man hier noch leicht erkennt, ist das Ergebnis 6.

Man kann auch stufenweise wie folgt vorgehen:

$$90 = 9 \cdot 10; 9 \equiv 2 \pmod{7}, 10 \equiv 3 \pmod{7}; 9 \cdot 10 \equiv 2 \cdot 3 \pmod{7} = 6 \pmod{7}.$$

Die kleinste natürliche Zahl, die zu 90 kongruent ist, ist daher 6:  $90 \pmod{7} = 6$ .

Allgemein gilt, wie gezeigt werden kann:

### Zwei Kongruenz-Regeln

$$(1) \quad a \equiv b \pmod{n} \quad \text{und} \quad c \equiv d \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$$

Kongruenzen können gliedweise multipliziert werden.

$$(2) \quad a \equiv b \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad a^k \equiv b^k \pmod{n} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Beide Seiten einer Kongruenz können zur selben Potenz erhoben werden.

### Beispiel 2.5 : Anwendung der Kongruenz-Regeln

Bestimme

- a)  $3\,900 \bmod 14$                       b)  $17^8 \bmod 7$

#### Lösung

Zu a) Beispielsweise ist  $3\,900 = 39 \cdot 100$ . Da  $39 \equiv 11 \bmod 14$  und  $100 \equiv 2 \bmod 14$  gilt nach nach der Regel (1):

$$3\,900 \equiv 11 \cdot 2 = 22 \bmod 14.$$

Wegen  $22 \equiv 8 \bmod 14$ , erhält man schließlich  $3\,900 \equiv 8 \bmod 14$ .

$$\text{Also: } 3\,900 \bmod 14 = 8$$

Zu b) Wegen  $17 \equiv 3 \bmod 7$  folgt wegen Regel (2):  $17^8 \equiv 3^8 \bmod 7$ .

Weiter kann etwa wie folgt rechnen:

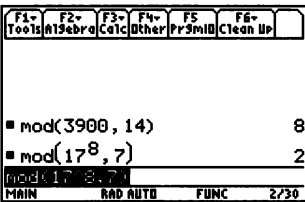
$$3^8 = (3^2)^4 = 9^4. \text{ Da } 9 \equiv 2 \bmod 7, \text{ folgt wieder nach Regel (2): } 9^4 \equiv 2^4 = 16 \bmod 7.$$

Da  $16 \equiv 2 \bmod 7$ , ist  $17^8 \equiv 2 \bmod 7$ .

Man schreibt durchgehend:

$$17^8 \equiv 3^8 = (3^2)^4 = 9^4 \equiv 2^4 = 16 \equiv 2 \bmod 7. \text{ Also: } 17^8 \bmod 7 = 2.$$

TI  
89



Mit  $\text{mod}(x,n)$  kann der Rest  $x \bmod n$  ermittelt werden.

Der Funktionsname `mod` kann eingetippt werden oder aus dem CATALOG aufgerufen werden.

Bei der Ausführung des RSA-Algorithmus sind die Reste von Potenzen mit in der Regel sehr hohen Exponenten zu bestimmen. Das folgende Beispiel zeigt ein Verfahren, wie diese Aufgabe gelöst werden kann.

### Beispiel 2.6 : Square - And - Multiply - Verfahren

Ermittle durch binäre Zerlegung des Exponenten und anschließendes fortlaufendes Quadrieren die kleinste natürliche Zahl  $r$ , für die gilt:

- a)  $9^{23} \bmod 7$                       b)  $123^{302} \bmod 21$

#### Lösung

Zu a) Wir zerlegen den Exponenten 23 soweit wie möglich in eine Summe von Zweierpotenzen:

$$23 = 16 + 4 + 2 + 1.$$

$$\text{Dann gilt: } 9^{23} = 9^{16+4+2+1} = 9 \cdot 9^2 \cdot 9^4 \cdot 9^{16}.$$

$$\text{Wir verwenden nun, dass } 9^4 = (9^2)^2, 9^8 = (9^4)^2, 9^{16} = (9^8)^2,$$

also die im Produkt  $9 \cdot 9^2 \cdot 9^4 \cdot 9^{16}$  auftretenden Potenzen schrittweise durch Quadrieren entstehen. Daher können auch die zu den einzelnen Potenzen kongruenten Zahlen nach der Kongruenz-Regel (2) durch **Quadrieren** (square) gebildet werden, die dann nach der Kongruenz-Regel (1) nur noch zu **multiplizieren** (multiply) sind:

$$\begin{aligned}
 9^1 &\equiv 2 \pmod{7} \\
 9^2 &\equiv 2^2 = 4 \pmod{7} \\
 9^4 &\equiv 4^2 = 16 \equiv 2 \pmod{7} \\
 9^8 &\equiv 2^2 = 4 \pmod{7} \\
 9^{16} &\equiv 4^2 = 16 \equiv 2 \pmod{7}.
 \end{aligned}$$

Damit ist:  $9^{23} \equiv 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \equiv 4 \pmod{7}$  oder  $9^{23} \pmod{7} = 4$ .

Zu b)  $302 = 256 + 32 + 8 + 4 + 2$ ;  $123^{302} = 123^{256} \cdot 123^4 \cdot 123^8 \cdot 123^{32} \cdot 123^{256}$ .

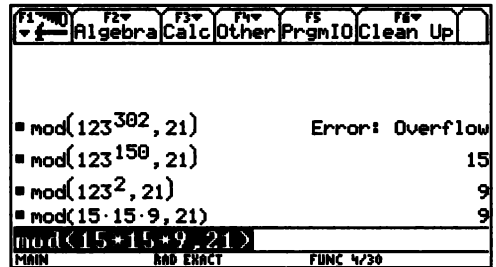
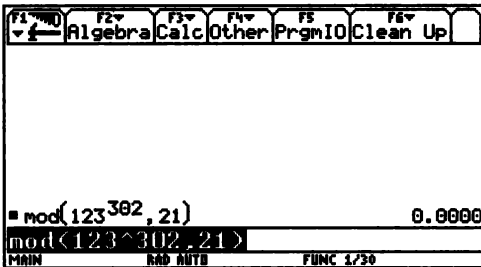
$$\begin{aligned}
 123^1 &\equiv 18 \pmod{21} \\
 123^2 &\equiv 18^2 = 324 \equiv 9 \pmod{21}, \text{ weil } 324 : 21 = 15, \text{ Rest } 9. \\
 123^4 &\equiv 9^2 = 81 \equiv 18 \pmod{21}, \text{ weil } 81 : 21 = 3, \text{ Rest } 18 \\
 123^8 &\equiv 18^2 = 324 \equiv 9 \pmod{21} \\
 123^{16} &\equiv 9^2 = 81 \equiv 18 \pmod{21} \\
 123^{32} &\equiv 18^2 = 324 \equiv 9 \pmod{21} \\
 123^{64} &\equiv 9^2 = 81 \equiv 18 \pmod{21} \\
 123^{128} &\equiv 18^2 = 324 \equiv 9 \pmod{21} \\
 123^{256} &\equiv 9^2 = 81 \equiv 18 \pmod{21}
 \end{aligned}$$

Damit ist:

$123^{302} \equiv 9 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 18 = 18^2 \cdot 81 \cdot 9$ . Da  $18^2 \equiv 9 \pmod{21}$  und  $81 \equiv 18 \pmod{21}$ , folgt schließlich

$123^{302} \equiv 9 \cdot 18 \cdot 9 = 81 \cdot 18 \equiv 18 \cdot 18 = 18^2 \equiv 9 \pmod{21}$  oder  $123^{302} \pmod{21} = 9$ .

Voyage 200



In der Modus-Einstellung "AUTO" kommt es wegen einer Bereichsüberschreitung im Ganzzahlformat zu einem falschen Ergebnis. Im "EXACT"-Modus wird diese Bereichsüberschreitung angezeigt. Man kommt zum richtigen Ergebnis, indem man  $123^{302}$  geeignet in Faktoren zerlegt ("stückelt") und danach die Kongruenz-Regel (1) anwendet oder verwendet, dass  $123 \equiv 18 \pmod{23}$  und weiters rechnet  $18^{302} \equiv 9 \pmod{23}$ .

### Der RSA-Verschlüsselungsalgorithmus

Einfachheitshalber wird angenommen, dass der zu verschlüsselnde Text nur die 26 Buchstaben A, B, ..., Z sowie das Leerzeichen enthält. Vor der Verschlüsselung des Textes werden die auftretenden Zeichen in Zahlen umgewandelt. Dies kann durch die Stellung der Buchstaben im Alphabet erfolgen: A = 01, B = 02, ..., Z = 26, Leerzeichen = 00:

Leerz. A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z  
 00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

### Beispiel 2.7 : Einfache symmetrische Verschlüsselung

Die Nachricht "BRAVO" soll nach folgender Vorschrift (Funktion) verschlüsselt werden (x steht für eine der Zahlen 00 bis 26 je nach Zeichen):

$$y = (x + e) \bmod 27 \text{ mit dem "Schlüssel" } e = 8.$$

#### Lösung

Wir schreiben die Nachricht zuerst als Zahlenfolge: 02, 18, 01, 22, 15.

Dann lautet die Wertetabelle für der Verschlüsselung:

<b>x</b>	02	18	01	22	15
<b>y = (x + 8) mod 27</b>	10	26	09	03	23

Man erhält daher als Geheimtext: 10, 26, 09, 03, 23 oder wieder in Buchstabenform: JZICW. Dieses sehr einfache Verschlüsselungsverfahren durch Buchstabenverschiebung soll auf JULIUS CÄSAR zurückgehen und wird daher in der Kryptographie (Wissenschaft von der Verschlüsselung einer Nachricht) *Cäsar-Verschiebung* genannt. Ist der Schlüssel e bekannt, so kann ein verschlüsselter Text sofort entschlüsselt werden. Ist dies nicht der Fall, so ist dies bei diesem Verschlüsselungsverfahren natürlich auch kein Problem, da nur höchstens 26 verschiedene Schlüssel durchprobiert werden müssen.

Abb. 2.6 zeigt grundsätzlich die Anwendung einer Verschlüsselung.

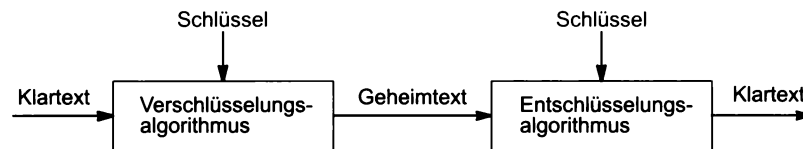


Abb. 2.6

Die Verschlüsselung kann sehr phantasievoll sein. Alle Verfahren verwendeten jedoch bis in die ausgehenden 70-er Jahre denselben Schlüssel bei der Verschlüsselung wie bei der Entschlüsselung: Man spricht von symmetrischen Verschlüsselungen. Der Schlüssel muss geheim bleiben. Die Schlüsselverteilung wurde jedoch immer mehr zu einem Sicherheitsproblem. 1978 wurde das RSA-Verfahren entwickelt (nach den Zunamen seiner Entdecker Ron Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman benannt), nachdem zuvor die Möglichkeit einer "asymmetrischen" Verschlüsselung erkannt wurde. Dabei wird ein **öffentlicher Schlüssel** (public key) zur Verschlüsselung und ein davon verschiedener **privater Schlüssel** (private key) zur Entschlüsselung verwendet. Der RSA-Algorithmus als bekanntestes asymmetrisches Verschlüsselungsverfahren basiert auf dem Modulo-Rechnen. Seine Angabe erfolgt ohne Herleitung, die Kenntnisse aus der Zahlentheorie voraussetzt.

#### RSA-Algorithmus

- (1) Eine Person A möchte gewisse Nachrichten in geheimer Form erhalten. Sie wählt zwei sehr große Primzahlen p und q, jede mehr als 100 Dezimalstellen, die geheim bleiben. Danach wird das Produkt  $n = p \cdot q$  gebildet und eine zu  $(p - 1) \cdot (q - 1)$  teilerfremde Zahl e (e wie encrypt) gewählt.

Anmerkung: Die professionelle Auswahl von p und q enthält noch gewisse Forderungen, auf die nicht mehr eingegangen wird.

- (2) A gibt nun n und e als öffentlichen Schlüssel bekannt, der in einer Art Telefonbuch bekannt gemacht werden kann.

(3) Wer eine geheime Nachricht an A senden will, schaut im Verzeichnis der öffentlichen Schlüssel nach und entnimmt  $n$  und  $e$ . Vor dem Verschlüsseln wird der Klartext in eine Zahl umgewandelt. Falls diese Zahl nicht kleiner als  $n$  ist, wird sie in gleich lange Blöcke zerlegt.

Ist  $x$  einer dieser Blöcke, so ist  $y = x^e \text{ mod } n$  seine Verschlüsselung.

(4) Der Empfänger A dechiffriert gemäß  $x = y^d \text{ mod } n$  ( $d$  wie decrypt), wobei  $d$  der geheime Schlüssel ist.  $d$  ist eine Lösung der Gleichung  $e \cdot d = 1 + k \cdot (p - 1) \cdot (q - 1)$  mit einem ganzzahligen  $k$ , die von A leicht gelöst werden kann.

Angenommen ein unbefugter Lauscher fängt die geheime Nachricht an A ab. Aus dem Verzeichnis der öffentlichen Schlüssel kann er natürlich  $n$  und  $e$  entnehmen. Zur Verschlüsselung müsste er die Gleichung  $e \cdot d = 1 + k \cdot (p - 1) \cdot (q - 1)$  lösen. Das wäre kein Problem, wenn er, wie der berechtigte Empfänger A, die Primfaktorenzerlegung  $n = p \cdot q$  kennt. Diese Zerlegung übersteigt jedoch selbst mit vielen parallel laufenden Computern der schnellsten Art und mit den besten Programmen alle praktischen Zeitgrenzen, wenn  $p$  und  $q$  genügend groß sind.

Eine RSA-Verschlüsselung ist wie eine Tür, die praktisch nur nach einer Richtung hin aufgeht. Man bezeichnet daher diese Verschlüsselungsfunktion auch als *Falltürfunktion* (trapdoor function). Um das folgende Beispiel übersichtlich zu halten, werden nur kleine  $p$  und  $q$  verwendet; ein Brechen der Verschlüsselung ist daher leicht möglich.

**Beispiel 2.8 : RSA-Algorithmus**

Die Nachricht "BRAVO" soll mit dem RSA-Algorithmus verschlüsselt an einen Empfänger, dessen öffentlicher Schlüssel  $e = 29$  und  $n = 1\ 147$  lautet, geschickt werden.

- a) Wie lautet der Geheimtext?
- b) Deciffriere den Geheimtext.

**Lösung**

Zu a) Verwendet man die gleiche Umwandlung der Buchstaben in Ziffern wie im Beispiel 2.7, so lautet der Klartext als Zahl geschrieben: 0218012215.

Da diese Zahl nicht kleiner als  $n = 1\ 147$  ist, zerlegen wir sie in gleich lange Blöcke der Länge 3, wobei der letzte Block durch ein Leerzeichen aufgefüllt wird: 021 801 221 500. Damit ist jeder Block kleiner als  $n$ . Verschlüsselung:

$x$	021	801	221	500
$y = x^{29} \text{ mod } 1\ 147$	3	533	628	535

Verschlüsselung von  $x = 21$ :

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1; 21^{29} = 21 \cdot 21^4 \cdot 21^8 \cdot 21^{16}.$$

$$21 \equiv 21 \text{ mod } 1\ 147$$

$$21^2 \equiv 21^2 \equiv 441 \text{ mod } 1\ 147$$

$$21^4 \equiv 441^2 = 194\ 481 \equiv 638 \text{ mod } 1\ 147, \text{ weil } 194\ 481 : 1\ 147 = 169, \text{ Rest } 638$$

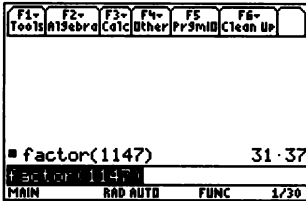
$$21^8 \equiv 638^2 = 407\ 044 \equiv 1\ 006 \text{ mod } 1\ 147, \text{ weil } 407\ 044 : 1\ 147 = 354, \text{ Rest } 1\ 006$$

$$21^{16} \equiv 1\ 006^2 = 1\ 012\ 036 \equiv 382 \text{ mod } 1\ 147, \text{ weil } 1\ 012\ 036 : 1\ 147 = 882, \text{ Rest } 382.$$

$$y = 21^{29} \equiv 21 \cdot 638 \cdot 1\ 006 \cdot 382 = 13\ 398 \cdot 384\ 292 \equiv 781 \cdot 47 = 36\ 707 \equiv 3 \text{ mod } 1\ 147$$

Damit lautet der Geheimtext: 3, 533, 628, 535.

Zu b) Durch Probieren erhält man hier noch leicht die Zerlegung  $n = 1\ 147 = 31 \cdot 37 = p \cdot q$ .



Nun ist die Bestimmung des geheimen privaten Schlüssels leicht möglich:  $d$  ist eine natürliche Zahl, eine Lösung der Gleichung  $e \cdot d = 1 + k \cdot (p - 1) \cdot (q - 1)$ , wobei  $k$  ganzzahlig sein muss. Wir können auch schreiben:

$$d = \frac{1 + k \cdot (p - 1) \cdot (q - 1)}{e}$$

Die Forderung, dass  $d$  eine natürliche Zahl sein soll, schränkt die Auswahl der ganzzahligen Werte für  $k$  ein. In unserem Fall lautet diese Gleichung:  $d = \frac{1 + k \cdot 1080}{29}$ .

Wir suchen die kleinste positive ganze Zahl  $k$ , sodass  $d$  eine natürliche Zahl ist. In einfachen Beispielen wie diesem gelingt dies durch Probieren: Wir setzen für  $k = 1, 2, 3, \dots$ , bis  $d$  erstmalig ganzzahlig ist ( $1 \leq k < e = 29$ ). Dies ist hier der Fall für  $k = 4$ :

$$d = \frac{1 + 4 \cdot 1080}{29} = 149, \text{ womit der geheime Schlüssel bestimmt wurde.}$$

Eine weitere Lösung findet man für  $k = 4 + e = 33$ :  $d = 1\,229$ , usw. Jede Lösung würde als geheimer Schlüssel brauchbar sein, wir wählen einfachheitshalber die kleinste natürliche Zahl.

Entschlüsselung:  $x = y^{149} \bmod 1\,147$

$y$	3	533	628	535
$x = y^{149} \bmod 1\,147$	21	801	221	500

Die entschlüsselte Nachricht lautet: 021 801 221 500 oder als Zahl bzw. als Klartext geschrieben: 02 18 01 22 15 00  $\Rightarrow$  B R A V O (Leerzeichen).

## Im Überblick: Modulare Arithmetik und Verschlüsselung

Zwei ganze Zahlen  $x$  und  $y$  heißen **kongruent modulo  $n$** , wenn sie bei der Ganzzahldivision durch  $n$  denselben nichtnegativen Rest  $r$  haben.

Kurzschreibweise:  $x \equiv y \pmod{n}$ , gesprochen:  $x$  ist kongruent  $y$  modulo  $n$ .

Kongruente Zahlen modulo  $n$  können im Rahmen der **modularen Arithmetik** als gleich betrachtet werden. Für das praktische Rechnen ist es jedoch vorteilhaft, als "Vertreter" kongruenter Zahlen die kleinste nichtnegative Zahl zu wählen. Dies ist aber gerade der gemeinsame Rest  $r$  dieser kongruenten Zahlen. Ist  $x$  eine dieser Zahlen, so ist  $r = x \bmod n$ . Das Aufsuchen von  $r$  gelingt schrittweise mit Hilfe von **Kongruenz-Regeln**.

Der **RSA-Algorithmus** ist eine Anwendung der modularen Arithmetik. Die Verschlüsselung erfolgt mit Hilfe eines öffentlich zugänglichen Schlüssels, die Entschlüsselung mit dem geheimen privaten Schlüssel. Die Sicherheit der RSA-Verschlüsselung beruht darauf, dass es nach der Multiplikation zweier ausreichend großer Primzahlen praktisch nicht mehr möglich ist, die Faktorisierung des Produktes in diese Primzahlen durchzuführen.

## Aufgaben

**2.28** Richtig oder falsch?

- a)  $12 \equiv 26 \pmod{7}$    b)  $15 \equiv 10 \pmod{5}$    c)  $18 \equiv 14 \pmod{3}$    d)  $18 \equiv 15 \pmod{2}$   
 e)  $64 \equiv 38 \pmod{13}$    f)  $98 \equiv 58 \pmod{8}$    g)  $117 \equiv 88 \pmod{29}$    h)  $112 \equiv 62 \pmod{17}$

**2.29** Ermittle die kleinste natürliche Zahl, die kongruent modulo 12 zu folgender Zahl ist:

- a) 5      b) 13      c) 24      d) 38      e) 118      f) 333

**2.30** Gib die ersten drei natürlichen Zahlen an, die kongruent modulo  $n$  zur angegebenen Zahl sind:

- a)  $38 \pmod{3}$    b)  $48 \pmod{4}$    c)  $66 \pmod{7}$    d)  $82 \pmod{9}$

**2.31** *Internationale Standard-Buchnummer (ISBN)*: Auf Büchern findet sich eine zehnstellige Nummer der Form a-bcd-efghi-p. Dabei bezeichnet a das Herkunftsland (3 steht für Deutschland, Österreich, Schweiz) und bcd die Verlagsnummer. p ist eine Prüfziffer, die als kleinste natürliche Zahl die Kongruenz

$$10a + 9b + 8c + 7d + 6e + 5f + 4g + 3h + 2i + p \equiv 0 \pmod{11}$$

erfüllt. Anstelle von 10 als Prüfziffer wird X geschrieben. Bei diesem Prüfzifferverfahren werden bestimmte häufig auftretende Fehler bei der Angabe der Buchnummer aufgedeckt. Stelle fest, ob folgende Ziffernfolge das notwendige Prüfzifferkriterium einer ISBN erfüllt: a) 3-446-19873-3      b) 3-411-06232-5      c) 0-471-17027-5

**2.32** *Europäische Artikelnummer (EAN)*: Auf vielen Artikeln findet sich ein Strichcode bzw. die zugehörige 13-stellige Ziffernfolge. Die beiden ersten Ziffern geben das Herkunftsland, die nächsten 5 Ziffern den Hersteller, wieder 5 Ziffern bezeichnen den Artikel. Die letzte Ziffer ist die Prüfziffer p, die gegeben ist durch

$$a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3k + m + 3n + p \equiv 0 \pmod{10}.$$

Stelle fest, ob folgende Ziffernfolge das notwendige Prüfzifferkriterium einer EAN erfüllt: a) 97 83817 12003 1      b) 30 45140 10550 2      c) 90 03740 05134 3

**2.33** Berechne gemäß der gegebenen Faktorisierung

- a)  $23 \cdot 18 \pmod{5}$       b)  $19 \cdot 37 \cdot 22 \pmod{7}$       c)  $41 \cdot 23 \cdot 25 \pmod{9}$   
 d)  $49 \cdot 78 \cdot 25 \pmod{11}$       e)  $181 \cdot 208 \cdot 54 \pmod{25}$       f)  $34 \cdot 68 \cdot 108 \pmod{12}$

**2.34** Berechne mit Hilfe des Square-And-Multiply-Verfahrens

- a)  $4^8 \pmod{9}$       b)  $18^{10} \pmod{7}$       c)  $82^{12} \pmod{19}$       d)  $41^{13} \pmod{9}$   
 e)  $23^{15} \pmod{7}$       f)  $81^{17} \pmod{20}$       g)  $39^{19} \pmod{30}$       h)  $32^{20} \pmod{40}$

**2.35** Berechne mit Hilfe des Square-And-Multiply-Verfahrens

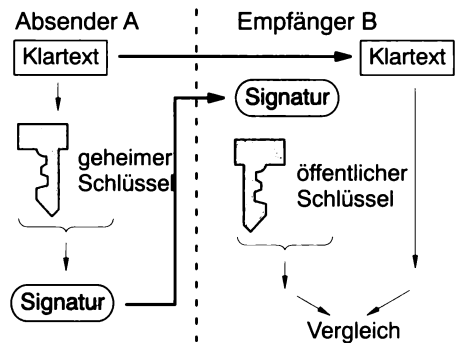
- a)  $3^{101} \pmod{10}$       b)  $3^{2000} \pmod{7}$       c)  $2 \cdot 138^{100} \pmod{4 \cdot 318}$   
 d)  $6 \cdot 310^{123} \pmod{7 \cdot 148}$       e)  $4 \cdot 200^{413} \pmod{5 \cdot 284}$       f)  $2 \cdot 817^{385} \pmod{4 \cdot 281}$   
 g)  $813^{619} \pmod{5 \cdot 372}$       h)  $4 \cdot 851^{830} \pmod{9 \cdot 777}$       i)  $3 \cdot 333^{412} \pmod{12 \cdot 101}$

**2.36** Ein Teilnehmer an einem RSA-System hat den öffentlichen Schlüssel  $e = 7$  und  $n = 221$ . Er erhält als Nachricht  $y = 2$ , die abgefangen wird. Wie lautet die Nachricht  $x$  (als Zahl) im Klartext?

**2.37** An einen Teilnehmer mit dem öffentlichen Schlüssel  $e = 55$  und  $n = 12 \cdot 319$  soll der Text "RSACODE" chiffriert geschickt werden. Dabei wird jeder Buchstabe entsprechend seiner Stellung im Alphabet kodiert (Leerzeichen = 00, A = 01, ..., Z = 26) und die entstehende Ziffernfolge in Blöcke der Länge 4 geteilt. Wie lautet die chiffrierte Nachricht?

- 2.38** Eine Person mit dem öffentlichen Schlüssel  $e = 19$  und  $n = 1763$  erhält die chiffrierte Nachricht 118, 462, 65, 54. Die Buchstaben wurden entsprechend ihrer Stellung im Alphabet kodiert (Leerzeichen = 00, A = 01, ..., Z = 26) und die entstehende Ziffernfolge in Blöcke der Länge 3 zerlegt. Wie lautet der Klartext?
- 2.39** Eine Person mit dem öffentlichen Schlüssel  $e = 25$  und  $n = 1073$  erhält die chiffrierte Nachricht 6, 337, 744. Die Buchstaben wurden entsprechend ihrer Stellung im Alphabet kodiert (Leerzeichen = 00, A = 01, ..., Z = 26) und die entstehende Ziffernfolge in Blöcke der Länge 3 zerlegt. Wie lautet der Klartext?
- 2.40** An einen Teilnehmer mit dem öffentlichen Schlüssel  $e = 29$  und  $n = 1333$  soll der Text "FOTO" chiffriert geschickt werden. Dabei wird jeder Buchstabe entsprechend seiner Stellung im Alphabet kodiert (Leerzeichen = 00, A = 01, ..., Z = 26) und die entstehende Ziffernfolge in Blöcke der Länge 3 geteilt.  
**a)** Wie lautet die verschlüsselte Nachricht? **b)** Wie lautet der geheime Schlüssel?
- 2.41** Die Nachricht "NICHT ANNEHMEN" soll an eine Person A mit dem öffentlichen Schlüssel  $e = 13$  und  $n = 1271$ . Jedes Zeichen wird nach seiner Stellung im ASCII-Code kodiert (Leerzeichen = 32, A = 65, B = 66, ..., Z = 90) und die entstehende Ziffernfolge in Blöcke der Länge 3 geteilt.

**2.42** Elektronische Unterschrift (Digitale Signatur): A sendet eine Nachricht an B. B zweifelt, ob die Nachricht wirklich von A stammt. Jeder hätte ihm die Nachricht senden können und sagen, er sei A. Das RSA-System bietet eine einfache Möglichkeit, elektronisch eine "Unterschrift" zu leisten. Angenommen, A hat den öffentlichen Schlüssel  $e = 43$  und  $n = 1517$  und das RSA-System verwendet die Umwandlung der Buchstaben entsprechend ihrer Stellung im Alphabet



als Blocklänge 3. A fügt nun der Nachricht an B als "Unterschrift" die mit dem geheimen Schlüssel  $d$  chiffrierte Nachricht an. B wendet dann auf die Unterschrift den öffentlichen Schlüssel von A an. Ergibt dies die Nachricht, so ist A als Absender ausgewiesen. Wie wird B das folgende unterschriebene Dokument beurteilen, das aus gibt, von A zu stammen?

MITMACHEN; Unterschrift: 106, 1308, 106, 156, 364, 71.

*Anmerkung:* Tatsächlich wird die Unterschrift aus der Nachricht durch eine Kompression mit Hilfe einer "Hash-Funktion" gebildet.

- 2.43** *Authentifikation:* Eine Person A möchte Einsicht in eine Datenbank nehmen, die nur einem bestimmten Personenkreis zugänglich ist. Der Zugang wird über eine Chip-Karte durch einen Rechner kontrolliert, der das RSA-System verwendet. A wurde als befugter Person der öffentliche Schlüssel  $e = 35$  und  $n = 323$  zugeteilt. Beim Einschleusen der Chip-Karte wird A vom Rechner erkannt. Dieser wählt zufällig eine Zahl  $x$  und verschlüsselt sie mit dem öffentlichen Schlüssel von A in  $y = 108$ . Diese Zahl wird danach von der Chip-Karte mit dem privaten Schlüssel von A entschlüsselt, an den Rechner zurückgegeben und mit  $x$  verglichen. Welche Zahl musste die Chip-Karte zurückgeben?



## 2.3 Schaltalgebra

G. BOOLE<sup>1</sup> gelang es etwa vor 150 Jahren, eine Algebra der Aussagen zu entwickeln und damit die über 2000 Jahre alte Aussagenlogik mathematisch zu erfassen. Er führte damit erstmals eine Algebra ein, deren Elemente keine Zahlen sind, die auch nicht wie bei Vektoren oder Matrizen aus Zahlen abgeleitet sind, sondern Dinge ganz anderer Art sind. Diese Algebra wurde mit gewissen Erweiterungen als *Boole'sche Algebra* bezeichnet. 1938 wurde von C. E. SHANNON<sup>2</sup> ein Modell der zweielementigen Boole'schen Algebra vorgestellt, die **Schaltalgebra**.

Die Schaltalgebra rechnet nur mit zwei Werten, die 0 und 1 genannt werden. Sie werden als **Schalt-** oder **Leitwerte** bezeichnet, da sie als die beiden stabilen Zustände eines Schaltobjektes (Kontaktschalter, Relais, Transistor, u.a.) gedeutet werden können. 0 steht abkürzend für nicht leitend, nicht wahr oder logisch 0, 1 für leitend, wahr oder logisch 1.

Die Aussagenlogik, die mit Sätzen operiert, die entweder wahr oder falsch sind (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 12 ff.) besitzt die gleiche algebraische Struktur wie die Schaltalgebra. Dabei wird der Schaltwert 1 mit dem Wahrheitswert wahr und der Schaltwert 0 mit dem Wahrheitswert falsch identifiziert.

In der gewöhnlichen Algebra kann eine Variable  $a, b, c, \dots, x, y, \dots$  in der Regel unendlich viele Werte annehmen. Ist etwa  $a$  die Seite eines Quadrates, so kann der Zahlenwert von  $a$  eine beliebige positive reelle Zahl sein. Dagegen hat man es in der Schaltalgebra mit Variablen zu tun, die nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen können. Man spricht daher auch von *binären* (nur zwei Zustände möglich) *Variablen* oder **Schaltvariablen**.

Wie in der gewöhnlichen Algebra werden auch in der Schaltalgebra Funktionen gebildet. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

*Beispiel:* Addition zweier einstelliger Dualzahlen  $x + y$  als Grundaufgabe der Addition zweier Dualzahlen. Es gelten die Additionsregeln:  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 0 = 1$ ,  $1 + 1 = 10$ .

Wir fassen sie in zwei Tabellen zusammen:

x	y	Summe s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x	y	Übertrag ü zur nächsthöheren Stelle
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Es kommt nun darauf an,  $x$  und  $y$  zur Summe  $s$  und zum Übertrag  $ü$  nicht in zählender Weise, sondern *logisch* zu "verknüpfen".  $x, y, s$  und  $ü$  werden als Schaltvariable angesehen.  $x$  und  $y$  sind dabei die unabhängigen Variablen,  $s$  und  $ü$  die von ihnen abhängigen Variablen, so dass zwei *Funktionen* vorliegen. Da die Funktionswerte nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen, spricht man von *binären Funktionen* oder **Schaltfunktionen**. Während es in der gewöhnlichen Algebra unendlich viele Funktionen  $f(x)$  von einer Variablen gibt, gibt es in der Schaltalgebra nur  $2^2 = 4$  Funktionen von einer Variablen, die schnell in Form von Wertetabellen angegeben werden können:

<sup>1</sup> Georg BOOLE (1815 – 1864), englischer Mathematiker

<sup>2</sup> Claude Elwood SHANNON, geb. 1916, amerikanischer Ingenieur und Mathematiker, begründete auch die Informationstheorie

**Alle einstelligen Schaltfunktionen (Schaltfunktionen einer Variablen):**

x	f <sub>1</sub> (x)	f <sub>2</sub> (x)	f <sub>3</sub> (x)	f <sub>4</sub> (x)
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f<sub>1</sub> und f<sub>4</sub> sind konstante Funktionen, f<sub>2</sub> ist die identische Funktion. Von besonderer Bedeutung unter den einstelligen Schaltfunktionen ist nur f<sub>3</sub>, die **Negation**: der "Ausgang"

z = f<sub>3</sub>(x) ist gleich dem entgegengesetzten Zustand des "Eingangs" x. Man schreibt: z =  $\bar{x}$ .

Abb. 2.7 zeigt das graphische Symbol oder Schaltzeichen dieser Funktion:

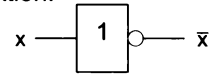


Abb. 2.7 Schaltzeichen der Negation

Mit 2 unabhängigen Schaltvariablen (Eingangsvariablen) x und y lassen sich bereits 2<sup>4</sup> = 16 zweistellige Schaltfunktionen bilden. Abkürzend wird in der folgenden Übersicht f<sub>i</sub> statt f<sub>i</sub>(x,y) geschrieben.

**Alle zweistelligen Schaltfunktionen (Schaltfunktionen von zwei Variablen):**

x	y	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>	f <sub>4</sub>	f <sub>5</sub>	f <sub>6</sub>	f <sub>7</sub>	f <sub>8</sub>	f <sub>9</sub>	f <sub>10</sub>	f <sub>11</sub>	f <sub>12</sub>	f <sub>13</sub>	f <sub>14</sub>	f <sub>15</sub>	f <sub>16</sub>
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

UND

XOR

ODER

NOR

NAND

Man erkennt, dass f<sub>7</sub> bzw. f<sub>2</sub> gerade die Summenfunktion s bzw. Übertragungsfunktion ü sind. Von besonderer Bedeutung sind die beiden zweistelligen Schaltfunktionen f<sub>2</sub> und f<sub>8</sub>:

f<sub>2</sub>: Der Funktionswert z = f<sub>2</sub>(x,y) ist genau dann 1, wenn sowohl x als auch y gleich 1 sind. Diese Funktion realisiert das logische "UND" und heißt daher **UND (AND)-Funktion** oder **Konjunktion**.

Schreibweise: z = x ∧ y, gesprochen: z gleich x und y

f<sub>8</sub>: Der Funktionswert z = f<sub>8</sub>(x,y) ist genau dann 1, wenn x = 1 oder y = 1 oder beide gleich 1 sind. Diese Funktion realisiert das logische "einschließende ODER" und heißt daher **ODER (OR)-Funktion** oder **Disjunktion**.

Schreibweise: z = x ∨ y, gesprochen: z gleich x oder y.

Beachte den Unterschied zu f<sub>7</sub>: hier ist der Funktionswert genau dann gleich 1, wenn x und y ungleich sind. Damit realisiert f<sub>7</sub> das "ausschließende ODER", auch exklusive ODER, englisch: eXclusive OR (XOR); sie wird als *Antivalenz* bezeichnet.

Abb. 2.8 zeigt die Schaltzeichen der Konjunktion (UND-Funktion) sowie der Disjunktion (ODER-Funktion). Bausteine, die logische Funktionen wie die Negation, Konjunktion oder Disjunktion technisch realisieren, nennt man *Schaltglieder*. In diesem Sinne spricht man von einem NICHT (NOT)-Glieder, einem UND- bzw. von einem OR-Glieder.

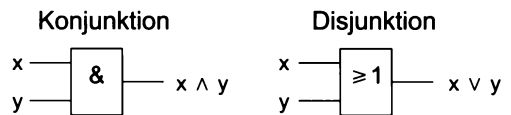


Abb. 2.8

Es gilt der folgende grundlegende Satz (Begründung Seite 51):

Alle zweistelligen Schaltfunktionen f<sub>1</sub> bis f<sub>16</sub> lassen sich bereits durch die Negation, Konjunktion und Disjunktion allein ausdrücken.

**Beispiel 2.9 : Äquivalenz dargestellt durch Negation, Konjunktion und Disjunktion**

Zeige, dass die Schaltfunktion  $f_{10}$  wie folgt durch die drei Funktionen Negation, Konjunktion und Disjunktion dargestellt werden kann:  $z = f_{10}(x,y) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

**Lösung**

Die Schaltfunktion  $f_{10}$  ist nur dann 1, wenn beide Variablen  $x, y$  denselben Schaltwert haben. Sie realisiert daher die logische Äquivalenz und wird daher auch als **Äquivalenz** bezeichnet. In der Schaltalgebra kann die Gleichheit zweier Terme einfach dadurch nachgewiesen werden, dass man die Wertetabelle für alle möglichen Fälle der Terme aufstellt und Gleichheit feststellt. Das ist bei den Termen in der gewöhnlichen Algebra undenkbar, da man hier unendlich viele Fälle untersuchen müsste.

x	y	$u = x \wedge y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$v = \bar{x} \wedge \bar{y}$	$z = u \vee v$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

Die letzte Spalte stimmt mit der Funktionswertespalte der Äquivalenz  $f_{10}$  überein, womit die Gleichheit nachgewiesen ist.

Abb. 2.9 zeigt die aus NICHT-, UND- sowie ODER-Gliedern aufgebaute Äquivalenz sowie die möglichen Werte der Eingangsvariablen mit den dazugehörigen Werten der Ausgangsvariablen  $z$ . Durch die Verknüpfung mehrerer Schaltglieder lassen sich mehrstellige Schaltfunktionen bilden.

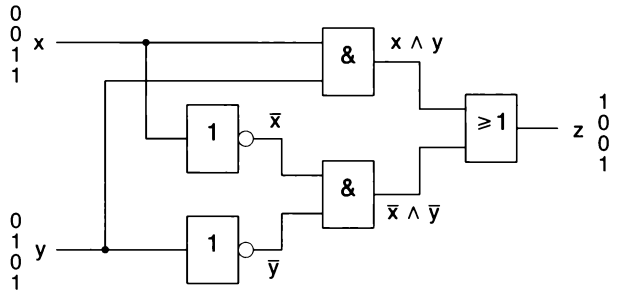


Abb. 2.9

**Beispiel 2.10 : Eine dreistellige Schaltfunktion**

Gegeben ist die dreistellige Schaltfunktion  $z = (a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{c})$ . Ermittle ihre Wertetabelle.

**Lösung**

Jede der drei Eingangsvariablen  $a, b, c$  kann einen der Werte 0 oder 1 annehmen.

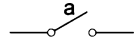
a	b	c	$u = a \wedge b$	$\bar{c}$	$v = b \wedge \bar{c}$	$z = u \vee v$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1

Die Wertetabelle einer dreistelligen Schaltfunktion (etwa Beispiel 2.10) enthält  $2^3 = 8$  Zeilen. Da für  $z$  in jeder dieser Zeilen 0 oder 1 stehen kann, gibt es  $2^8 = 256$  verschiedene  $z$ -Spalten und daher ebenso viele verschiedene dreistellige Schaltfunktionen. Die Wertetabelle einer Schaltfunktion von 4 Variablen  $a, b, c$  und  $d$  enthält schon  $2^4 = 16$  Zeilen. Damit gibt es  $2^{16} = 65\,536$  verschiedene vierstellige Schaltfunktionen.

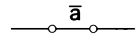
### Kontaktschaltungen

Schaltelemente werden heute üblicherweise als kontaktlose Halbleiterbauelemente, so genannte *Gatter* realisiert. Von besonderer Anschaulichkeit in der Schaltalgebra sind jedoch Schaltkreise, die aus *Kontakten* aufgebaut sind. Wir unterscheiden zwei Arten von Kontakten:

**Arbeitskontakt:** Symbol: Offener Kontakt, Schaltvariable  $a$



**Ruhekontakt:** Entgegengesetzter Schaltwert wie  $a$  (durch eine geeignete Steuerung realisiert). Symbol: Geschlossener Kontakt, Schaltvariable  $\bar{a}$

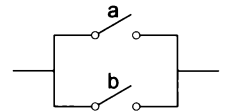


Kontakte können sehr verschieden zu einem Schaltkreis zusammengesetzt werden, die dann wiederum als Schalter "offen" oder "geschlossen" sein können und damit den Schaltwert 0 oder 1 haben. Von besonderer Bedeutung sind Schaltkreise, die aus Serien- oder Parallelschaltungen von Kontakten aufgebaut sind.

**Serienschaltung:** Der Schaltwert  $z$  der Serienschaltung der Kontakte  $a, b$  ist genau dann 1, wenn beide Kontakte den Schaltwert 1 haben. Das ist genau die Konjunktion von  $a$  und  $b$ :  $z = a \wedge b$



**Parallelschaltung:** Der Schaltwert  $z$  der Parallelschaltung der Kontakte  $a, b$  ist genau dann 1, wenn wenigstens einer der Kontakte den Schaltwert 1 hat. Das ist genau die Disjunktion von  $a$  und  $b$ :  $z = a \vee b$

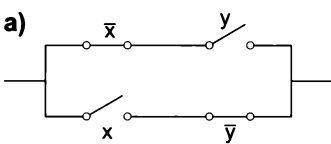


### Beispiel 2.11 : Realisierung einer Schaltfunktion

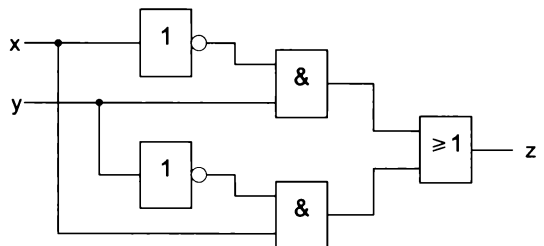
Gegeben ist die Schaltfunktion mit  $z = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ . Gesucht ist ihre

- a) Realisierung als Kontaktschaltung,      b) Realisierung als Gatterschaltung,
- c) Wertetabelle.

Zu a)



Zu b)



Zu c)

$x$	$y$	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge y$	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0

Es handelt sich um die Antivalenzfunktion (XOR-Funktion)  $z = f_7(x,y)$ . Der Ausgang  $z$  hat nur dann den Wert 1, wenn beide Eingangsvariable ungleich sind.

Die Schaltalgebra wird durch ihre Operationen (Verknüpfungen) Negation, Konjunktion und Disjunktion, ihre beiden Werte 0 und 1 sowie die zugehörigen Rechengesetze bestimmt. Im Folgenden sind die Rechenregeln der Schaltalgebra zusammengestellt, wobei a, b, und c Schaltvariable sind. Der Beweis erfolgt durch Wertetabellen.

<b>Rechenregeln der Schaltalgebra</b>			
	a)	b)	
1	$0 \wedge 0 = 0$ $0 \wedge 1 = 0$ $1 \wedge 0 = 0$ $1 \wedge 1 = 1$ $\bar{0} = 1$	$1 \vee 1 = 1$ $0 \vee 1 = 1$ $1 \vee 0 = 1$ $0 \vee 0 = 0$ $\bar{1} = 0$	Regeln für Konstante (Schaltwerte)
2	$a \wedge 0 = 0$	$a \vee 1 = 1$	Regeln für Konstante und Variable
3	$a \wedge 1 = a$	$a \vee 0 = a$	
4	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$	
5	$a \wedge \bar{a} = 0$	$a \vee \bar{a} = 1$	
6	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$	Kommutativgesetze
7	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	Assoziativgesetze
8	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	Distributivgesetze
9	$a \wedge (a \vee b) = a$	$a \vee (a \wedge b) = a$	Verschmelzungsgesetze
10	$\bar{\bar{a}} = a$		Doppelte Verneinung
11	$\bar{a} \wedge \bar{b} = \overline{a \vee b}$	$\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a \wedge b}$	Gesetz von de MORGAN <sup>3</sup>

**Anmerkungen:**

(1) Man erkennt, dass jede Regel zweimal auftritt, wenn man die Zeichen  $\wedge$  und  $\vee$  sowie 0 und 1 vertauscht. Man bezeichnet dies als **Dualitätssprinzip** der Schaltalgebra: *Jeder Satz der Schaltalgebra geht wieder in einen gültigen Satz über, wenn man  $\wedge$  und  $\vee$  sowie 0 und 1 vertauscht.*

Beispiel: Aus  $a \wedge 0 = 0$  erhält man  $a \vee 1 = 1$  und umgekehrt.

(2) Das **Assoziativgesetz** besagt, dass bei einem längeren *nur* mit  $\wedge$  oder *nur* mit  $\vee$  verknüpften Term beliebig zusammengesetzt werden darf. Ist d eine Schaltvariable, so gilt etwa:  $a \wedge b \wedge c \wedge d = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = a \wedge (b \wedge c) \wedge d$ .

Andersherum ausgedrückt, es können die Klammern beliebig gesetzt oder auch weggelassen werden.

(3) Während es in der gewöhnlichen Algebra nur ein Distributivgesetz ("Verteilungsgesetz") der Multiplikation über die Addition in der Form  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  gibt, gibt es in der Schaltalgebra zwei **Distributivgesetze**: sie geben an, wie sich die Konjunktion  $\wedge$  über die Disjunktion  $\vee$  "verteilt" wie auch umgekehrt:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{sowie} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Die umgekehrte Anwendung der beiden Distributivgesetze, also die Lesart von rechts nach links, ist das Ausklammern ("Herausheben"). Dies spielt eine wichtige Rolle beim Vereinfachen von Termen.

<sup>3</sup> Augustus de MORGAN, (1806 – 1871), englischer Mathematiker

Weiters folgt wie beim "Ausmultiplizieren" von Summen:

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d) \quad \text{sowie}$$

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)$$

- (4) Bei Vereinfachungen von Schaltfunktionen sind oft die beiden **Verschmelzungsgesetze** hilfreich:  $a \wedge (a \vee b) = a$  sowie  $a \vee (a \wedge b) = a$ .  
Beachte die Art der Operationen!
- (5) Die **de MORGAN'schen Gesetze** besagen, dass die Negation einer Konjunktion/Disjunktion zweier Schaltvariable gleich der Disjunktion/Konjunktion der negierten Variablen ist. Sie können zur Umformung von negierten Termen verwendet werden.
- (6) Die angeführten Rechenregeln sind teilweise voneinander ableitbar.
- (7) Schaltalgebraische Terme lassen sich mit Hilfe der angeführten Regeln in ähnlicher Weise umformen wie Terme der gewöhnlichen Algebra.

### Beispiel 2.12 : Beweis eines Gesetzes von de MORGAN

Zeige mit Hilfe einer Wertetabelle die Richtigkeit des de MORGAN'schen Gesetzes 11 a)

$$a \wedge \bar{b} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

**Lösung**

a	b	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \vee \bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0


In gleicher Weise kann man das de MORGAN'sche Gesetz 11 b) zeigen oder auf Grund des Dualitätsprinzips aus 11 a) folgern.

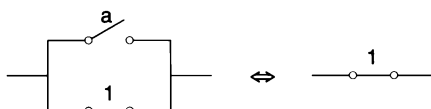
### Beispiel 2.13 : Veranschaulichung von Termgleichheiten durch Kontaktschaltungen


Veranschauliche mit Hilfe einer Kontaktschaltung **a)**  $1 \wedge 0 = 0$ , **b)**  $a \vee 1 = 1$ ,  
**c)**  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  ... Distributivgesetz 3 b).

**Lösung**

Das Zeichen " $\Leftrightarrow$ " drückt die Gleichwertigkeit der Schaltungen aus.

Zu a) 

Zu b) 

Zu c) 

**Vereinbarung über den Vorrang von Operationen**

So wie beim Rechnen mit Zahlen die Punktrechnung vor der Strichrechnung kommt, vereinbart man auch in der Schaltalgebra, um Klammern zu sparen:

- Die Negation kommt vor  $\wedge$  sowie  $\vee$ .
- $\wedge$  kommt vor  $\vee$ .

Beispiel:

$a \wedge (\overline{b \vee c}) = a \wedge \overline{b \vee c}$ ,  $(\overline{a \wedge b}) \vee c = \overline{a \wedge b} \vee c$ . Die Klammern können weggelassen werden. Oft werden die Klammern aber trotzdem gesetzt, wenn sie die Lesbarkeit verbessern.

**Beispiel 2.14 : Termumformungen**

Vereinfache folgende Terme:

- a)**  $\overline{a} \wedge (a \vee b)$     **b)**  $a \vee (\overline{a \wedge b})$     **c)**  $(\overline{a \vee b}) \wedge (\overline{a \vee \overline{b}})$     **d)**  $\overline{a \vee \overline{b}} \vee (a \wedge b)$   
**e)**  $(a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a \vee b}) \wedge (a \vee b)$     **f)**  $\overline{a \wedge b} \vee \overline{a \wedge b}$     **g)**  $[(a \wedge b) \vee c] \wedge (\overline{b \vee c})$

**Lösung**

**Zu a)**  $\overline{a} \wedge (a \vee b) = (\overline{a} \wedge a) \vee (\overline{a} \wedge b)$   
 $= 0 \vee (\overline{a} \wedge b) = (\overline{a} \wedge b) \vee 0 = \overline{a} \wedge b$

Distributivgesetz 8a)  
 5a), Kommutativg. 6b), 3b)

Probe (bei Umformungen empfehlenswert):

a	b	$\overline{a}$	$a \vee b$	$\overline{a} \wedge (a \vee b)$	$\overline{a} \wedge b$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

**Zu b)**  $a \vee (\overline{a \wedge b}) = (a \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b)$   
 $= 1 \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge 1 = a \vee b$

Distributivgesetz 8b)  
 5b), Kommutativg. 6a), 3a)

**Zu c)**  $(\overline{a \vee b}) \wedge (\overline{a \vee \overline{b}}) = \overline{a \vee (b \wedge \overline{b})}$   
 $= \overline{a \vee 0} = \overline{a}$

Distributivgesetz 8b)  
 5a) und 3b)

**Zu d)**  $\overline{a \vee \overline{b}} \vee (a \wedge b) = (\overline{a \wedge b}) \vee (a \wedge b)$   
 $= b \wedge (a \vee \overline{a})$   
 $= b \wedge 1 = b$

de MORGAN 11 b) und 10  
 Distributivgesetz 8a)  
 5b) und 3a)

**Zu e)**  $(a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a \vee b}) \wedge (a \vee b) = (a \vee \overline{b}) \wedge [(\overline{a \vee b}) \wedge (a \vee b)]$  Assoziativgesetz 7a)  
 $= (a \vee \overline{b}) \wedge [b \vee (a \wedge \overline{a})]$  Distributivgesetz 8b)  
 $= (a \vee \overline{b}) \wedge (b \vee 0) = (a \vee \overline{b}) \wedge b$  5a) und 3b)  
 $= (a \wedge b) \vee (b \wedge \overline{b})$  Distributivgesetz 8a)  
 $= (a \wedge b) \vee 0 = a \wedge b$  5a) und 3b)

**Zu f)**  $\overline{a \wedge b} \vee \overline{a \wedge b} = (\overline{a \vee \overline{b}}) \vee (a \vee \overline{b})$   
 $= \overline{a \vee \overline{b}} \vee a \vee \overline{b} = a \vee \overline{a \vee \overline{b}} \vee \overline{b}$   
 $= (a \vee \overline{a}) \vee (\overline{b \vee b})$   
 $= 1 \vee \overline{b} = 1$

de MORGAN 11 a) und 10  
 Kommutativgesetz 6b)  
 Assoziativgesetz 7b)  
 5b), 4b) und 2b)

Zu g) $[(a \wedge b) \vee c] \wedge (\bar{b} \vee c)$	$= [c \vee (a \wedge b)] \wedge (\bar{b} \vee c)$	Kommutativgesetz 6b)
	$= [(c \vee a) \wedge (c \vee b)] \wedge (\bar{b} \vee c)$	Distributivgesetz 8b)
	$= (c \vee a) \wedge [(c \vee b) \wedge (\bar{b} \vee c)]$	Assoziativgesetz 7 a)
	$= (c \vee a) \wedge [(c \vee b) \wedge (c \vee \bar{b})]$	Kommutativgesetz 6a)
	$= (c \vee a) \wedge [c \vee (b \wedge \bar{b})]$	Distributivgesetz 8b)
	$= (c \vee a) \wedge (c \vee 0)$	5a)
	$= (c \vee a) \wedge c = c \wedge (c \vee a)$	3b), Kommutativg. 6a)
	$= c$	Verschmelzungsg. 9a)

### Beispiel 2.15 : Vereinfachung einer Schaltung

Stelle die Schaltfunktion zur Schaltung in Abb. 2.10 auf und versuche eine Vereinfachung.

#### Lösung

Geht man die Schaltung von links nach rechts durch, so erkennt man:

$$z = x \vee (\bar{x} \wedge y).$$

Anwendung des Distributivgesetzes 8b) und danach von 5b) und 3a), Seite 48, ergibt:

$$z = (x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y.$$

Die dargestellte Schaltung lässt sich somit durch ein ODER-Glied ersetzen.

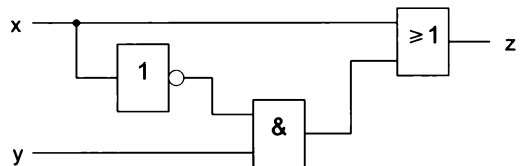


Abb. 2.10

Nach dem Satz auf Seite 45 lässt sich jede zweistellige Schaltfunktion durch die drei Funktionen (Grundoperationen) Negation, Konjunktion und Disjunktion ausdrücken. Auf Grund der Gesetze von de MORGAN  $x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$  sowie  $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$  kann noch auf eine weitere der beiden Funktionen Konjunktion oder Disjunktion verzichtet werden. Man kann zeigen, dass es sogar zwei Schaltfunktionen, nämlich die NAND-Funktion  $f_{15}$  sowie die NOR-Funktion  $f_9$  gibt, die für sich allein (auch ohne Negation) alle anderen Schaltfunktionen ersetzen können. NAND und NOR sind englische Kürzel, abgeleitet aus not and bzw. not or.

### Normalformen einer Schaltfunktion

In der Vielfalt der Darstellungsmöglichkeiten einer Schaltfunktion sind die so genannten *Normalformen* von besonderer Bedeutung. Ihre Bedeutung liegt darin, dass man mit ihnen aus der (vorgegebenen) Wertetabelle einer Schaltfunktion ihre Gleichung ermitteln kann. Darüber hinaus zeigen sie, dass sich jede, auch mehrstellige Schaltfunktion durch Negation, Konjunktion sowie Disjunktion darstellen lässt. Wir gehen schrittweise vor:

Jede zweistellige Schaltfunktion  $f(x, y)$  kann in der Form geschrieben werden:

$$f(x, y) = [x \wedge y \wedge f(1, 1)] \vee [\bar{x} \wedge y \wedge f(0, 1)] \vee [x \wedge \bar{y} \wedge f(1, 0)] \vee [\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge f(0, 0)].$$



Man erkennt dies leicht, wenn man in der Wertetabelle für jede Eingangszeile den z-Wert ermittelt: drei eckig geklammerte Terme sind jeweils 0, übrig bleibt gerade der richtige Wert.

x	y	$z = [x \wedge y \wedge f(1,1)] \vee [\bar{x} \wedge y \wedge f(0,1)] \vee [x \wedge \bar{y} \wedge f(1,0)] \vee [\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge f(0,0)]$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

*Beispiel:* Angenommen, bei der zweistelligen Schaltfunktion handelt es sich um die Äquivalenz  $f_{10}$ . Hier gilt:  $f(0,0) = 1, f(0,1) = 0, f(1,0) = 0, f(1,1) = 1$ . Die Aussage des Satzes lautet:  $f_{10}(x,y) = [x \wedge y \wedge 1] \vee [\bar{x} \wedge y \wedge 0] \vee [x \wedge \bar{y} \wedge 0] \vee [\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge 1] = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$ , im Einklang mit Beispiel 2.9, Seite 46.

Ist  $f(\dots) = 0$ , so fällt die entsprechende Konjunktion weg; ein Wert  $f(\dots) = 1$  braucht nicht geschrieben werden. Wir erhalten daher auf diese Weise, nicht nur bei der Äquivalenz, jede zweistellige Funktion dargestellt als eine *Disjunktion von Termen, die alle auftretenden Variablen oder ihre Negationen konjunktiv verknüpfen*. Man sagt, dass die Schaltfunktion in der *disjunktiven Normalform* dargestellt ist.

**Bezeichnungen:**

**Vollkonjunktion** oder **Minterm**: Konjunktion, in der sämtliche unabhängigen Variablen oder deren Negation genau einmal vorkommen.

**Volldisjunktion** oder **Maxterm**: Disjunktion, in der sämtliche unabhängigen Variablen oder deren Negation genau einmal vorkommen.

*Beispiel:* Bei zwei unabhängigen Variablen x, y gibt es 4 Vollkonjunktionen:

$$x \wedge y, \bar{x} \wedge y, x \wedge \bar{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Bei drei unabhängigen Variablen, die nun mit a, b und c bezeichnet werden sollen, gibt es 8 Vollkonjunktionen:

$$a \wedge b \wedge c, \bar{a} \wedge b \wedge c, a \wedge \bar{b} \wedge c, a \wedge b \wedge \bar{c}, \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c, \bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}, a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}, \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}.$$

Ersetzt man überall  $\wedge$  durch  $\vee$ , so erhält man alle Volldisjunktionen.

In Verallgemeinerung des Satzes auf Seite 51 zeigt man allgemein den folgenden fundamentalen Satz der Schaltalgebra:

**Disjunktive Normalform (DNF):**  
 Jede n-stellige Schaltfunktion lässt sich abgesehen von der Reihenfolge eindeutig durch k ( $k \leq 2^n$ ) Vollkonjunktionen darstellen, die untereinander disjunktiv verknüpft sind.

Wie bei einer zweistelligen Schaltfunktion lautet das **Verfahren zur Aufstellung einer DNF**:

- (1) Für jede Zeile der Wertetabelle, für die Schaltfunktion 1 ist, wird die Vollkonjunktion gebildet. Dabei werden diejenigen Variablen dieser Zeile, die 1 sind, nicht negiert eingesetzt, während die Variablen, die 0 sind, negiert eingesetzt werden.
- (2) Alle so gebildeten Vollkonjunktionen werden disjunktiv verknüpft.

Anschließend kann die DNF einer Schaltfunktion meist noch vereinfacht werden. Dabei versucht man herauszuheben (Lesart des Distributivgesetzes 8a, Seite 48, von rechts nach links) gemäß

$$(T \wedge x) \vee (T \wedge \bar{x}) = T \wedge (x \vee \bar{x}) = T \vee 1 = T$$

wobei T ein gemeinsames "Teilstück" zweier Vollkonjunktionen ist, die sich nur in der Negation einer gleichen Variablen unterscheiden. Es gibt auch systematische Verfahren für Vereinfachungen einer DNF (QUINE-McCLUSKEY-Algorithmus oder graphisch das KARNAUGH-VEITCH-Diagramm).

### Beispiel 2.16 : Disjunktive Normalform (DNF) einer Schaltfunktion

Gib die DNF der durch die folgende Wertetabelle gegebenen Schaltfunktion an:

a)	x	y	z
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0

b)	x	y	z
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

c)	a	b	c	z
	0	0	0	0
	0	0	1	0
	0	1	0	1
	0	1	1	0
	1	0	0	0
	1	0	1	0
	1	1	0	1
	1	1	1	1

#### Lösung

Zu a) In zwei Zeilen ist  $z = 1$ . Die in diesen Zeilen zu bildenden Vollkonjunktionen lauten:

$\bar{x} \wedge y$  (weil  $x = 0$  und  $y = 1$ ) sowie

$x \wedge \bar{y}$  (weil  $x = 1$  und  $y = 0$ ). Somit lautet die DNF der gesuchten Funktion (Antivalenz):  $z = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ .

Zu b) DNF:  $z = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$ . Vereinfachung möglich zu  $z = x \vee y$ .

Zu c) DNF:  $(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$ .

Vereinfachung: Man erkennt, dass die Vollkonjunktionen  $a \wedge b \wedge \bar{c}$  und  $a \wedge b \wedge c$  von der Art  $T \wedge x$  und  $T \wedge \bar{x}$  mit  $T = a \wedge b$  sind. Somit:

$$(a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (\bar{c} \vee c) = (a \wedge b) \wedge 1 = a \wedge b.$$

Damit ist  $z = (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b)$ .

Aus dem Funktionsterm kann  $b$  herausgehoben werden:  $z = b \wedge [(\bar{a} \wedge \bar{c}) \vee a]$ .

Anwendung des Distributivgesetzes 8b):

$$z = b \wedge [(\bar{a} \wedge \bar{c}) \vee a] = b \wedge [(\bar{a} \vee a) \wedge (\bar{c} \vee a)] = b \wedge [1 \wedge (\bar{c} \vee a)] = b \wedge (a \vee \bar{c}).$$

Das Ergebnis stimmt überein mit Beispiel 2.10, Seite 46, wenn man noch das Distributivgesetz 8b) anwendet.

Eine andere Vereinfachungsvariante besteht darin, dass man eine bestimmte auftretende Vollkonjunktion mehrfach anschreibt, was möglich ist, da schaltalgebraisch  $x = x \vee x$  gilt:

$$\begin{aligned} z &= (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \\ &= (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \end{aligned}$$

Nun kann aus den ersten und letzten beiden Vollkonjunktionen herausgehoben werden:

$$\begin{aligned} z &= [(b \wedge \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee a)] \vee [(a \wedge b) \wedge (\bar{c} \vee c)] = [(b \wedge \bar{c}) \wedge 1] \vee [(a \wedge b) \wedge 1] \\ &= (b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b). \end{aligned}$$

Herausheben von  $b$  ergibt schließlich  $z = b \wedge (a \vee \bar{c})$ .

Auf Grund des Dualitätsprinzips der Schaltalgebra (Seite 48) gibt es auch eine zweite Normalform jeder Schaltfunktion:

### Konjunktive Normalform (KNF):

Jede  $n$ -stellige Schaltfunktion lässt sich abgesehen von der Reihenfolge eindeutig durch  $k$  ( $k \leq 2^n$ ) Volldisjunktionen darstellen, die untereinander konjunktiv verknüpft sind.

### Verfahren zur Aufstellung einer KNF:

(1) Für jede Zeile der Wertetabelle, für die die Schaltfunktion 0 ist, wird die Volldisjunktion gebildet. Dabei werden diejenigen Variablen dieser Zeile, die 0 sind, nicht negiert eingesetzt, während die Variablen, die 1 sind, negiert eingesetzt werden.

(2) Alle so gebildeten Volldisjunktionen werden konjunktiv verknüpft. Anschließend kann die KNF einer Schaltfunktion meist noch vereinfacht werden. Dabei versucht man herauszuheben (Lesart des Distributivgesetzes 8b), Seite 48, von rechts nach links) gemäß

$$(T \vee x) \wedge (T \vee \bar{x}) = T \vee (x \wedge \bar{x}) = T \vee 0 = T$$

wobei  $T$  ein gemeinsames "Teilstück" zweier Volldisjunktionen ist, die sich nur in der Negation einer gleichen Variablen unterscheiden.

Die Verwendung der KNF zum Aufstellen der Funktionsgleichung empfiehlt sich dann, wenn öfters 0 als 1 als Funktionswert auftritt.

### Beispiel 2.17 : Konjunktive Normalform (KNF) einer Schaltfunktion

Gib die KNF der durch die Wertetabellen von Beispiel 2.16 gegebenen Schaltfunktionen an.

#### Lösung

Zu a)  $z = 0$  für  $x = 0, y = 0$  sowie  $x = 1$  und  $y = 1$ . Die in diesen Zeilen zu bildenden Volldisjunktionen lauten:  $x \vee y$  (beide unnegiert, weil beide Variable gleich 0 sind) sowie  $\bar{x} \vee \bar{y}$  (beide negiert, weil beide Variable gleich 1 sind). Diese beiden Disjunktionen sind konjunktiv zu verknüpfen. Somit lautet die KNF der gesuchten Funktion (Antivalenz):  $z = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ .

Zu b) Es tritt nur eine Zeile mit dem Funktionswert 0 auf, weshalb auch nur eine einzige Volldisjunktion zu bilden ist:  $x \vee y$  ( $x$  und  $y$  unnegiert, weil in der betreffenden Zeile beide Variable gleich 0 sind). Somit:  $z = x \vee y$ .

Zu c) Da 5 Zeilen mit dem Funktionswert 0 auftreten, sind 5 Volldisjunktionen zu bilden, die konjunktiv zu verbinden sind. Die KNF lautet:

$$z = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}).$$

Diese Darstellung kann schrittweise in  $z = b \wedge (a \vee \bar{c})$  umgeformt werden.

### Im Überblick: Schaltalgebra

Die **Schaltalgebra** ist ein Modell einer BOOLE'schen Algebra, das grundlegend für die Digitaltechnik ist. Die Schaltalgebra wird durch ihre Operationen (Verknüpfungen) **Negation**, **Konjunktion** und **Disjunktion**, ihre beiden Werte 0 und 1, die als **Schaltwerte** bezeichnet werden sowie die zugehörigen **Rechengesetze** bestimmt. Mit den beiden Schaltwerten können wie bei einem Schalter bistabile Zustände physikalischer Größen beschrieben werden.

Es gibt  $2^{2^n}$  **Schaltfunktionen** von  $n$  Variablen. Alle Schaltfunktionen lassen sich durch die Negation und die beiden zweistelligen Schaltfunktionen Konjunktion und Disjunktion darstellen. Schaltfunktionen werden physikalisch durch **Kontaktschaltungen** sowie durch die (kontaktlosen) **Gatterschaltungen** realisiert. Durch Umformungen von Funktionstermen gelingt es häufig, eine Schaltung zu vereinfachen oder mit bestimmten Gattern aufzubauen.

Die Konstruktion einer Schaltfunktion, die durch ihre Wertetabelle gegeben ist, kann von einer der beiden **Normalformen**, der **disjunktiven** oder der **konjunktiven Normalform** ausgehen. Durch Vereinfachung nach den Gesetzen der Schaltalgebra wird die Normalform auf eine Form gebracht, so dass mit minimalem Materialaufwand die der Funktion entsprechende Schaltung gebaut werden kann.

## Aufgaben

2.44 Zeige mittels Wertetabelle die Richtigkeit der beiden Verschmelzungsgesetze.

2.45 Vereinfache den folgenden Term:

- |                                |                                   |   |                                       |
|--------------------------------|-----------------------------------|---|---------------------------------------|
| a) $a \wedge a \wedge a$       | b) $c \vee c \vee c$              | c) $(b \wedge b) \vee c$                  | d) $(a \vee \bar{a}) \vee b$          |
| e) $a \wedge b \wedge \bar{b}$ | f) $(a \vee \bar{a}) \wedge b$    | g) $\bar{a} \vee (a \vee b)$              | h) $\bar{a} \wedge (a \wedge b)$      |
| i) $(a \wedge \bar{b}) \vee b$ | j) $a \vee \overline{a \wedge b}$ | k) $\overline{\bar{a} \wedge b} \wedge b$ | l) $a \vee \overline{\bar{a} \vee b}$ |
| m) $a \wedge (a \vee \bar{b})$ | n) $\bar{a} \wedge (a \vee b)$    | o) $\bar{a} \vee (a \wedge b)$            | p) $(\bar{a} \vee b) \wedge \bar{a}$  |

2.46 Vereinfache den folgenden Term:

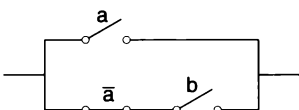
- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) $(a \wedge b) \wedge (a \wedge b)$                  | b) $(a \wedge b) \vee (a \wedge b)$                                   | c) $(a \wedge b) \vee 1$                      |
| d) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$                | e) $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$                   | f) $(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b)$     |
| g) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$                | h) $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y)$                               | i) $x \vee [(\bar{x} \vee y) \wedge \bar{y}]$ |
| j) $(\overline{\bar{x} \vee y \vee y}) \wedge \bar{x}$ | k) $\bar{x} \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y$ | l) $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})$ |
| m) $(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$        | n) $(a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b})$              | o) $a \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee b$   |

2.47 Vereinfache den folgenden Term:

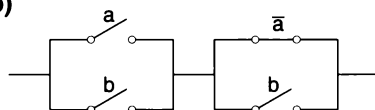
- |  |   |
|--|---|
| a) $a \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge c)$                         | b) $[(a \vee b) \wedge c] \vee (\bar{b} \wedge c)$                |
| c) $(a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee \overline{(a \vee \bar{b} \vee c)}$ | d) $[a \vee (b \wedge c)] \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$   |
| e) $\overline{(\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge b) \vee c}$              | f) $(a \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge c)$ |

2.48 Vereinfache die folgende Kontaktschaltung:

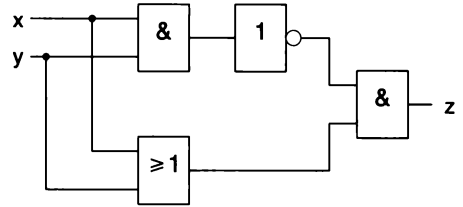
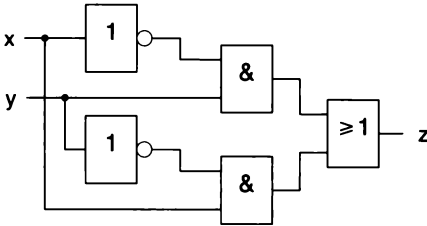
a)



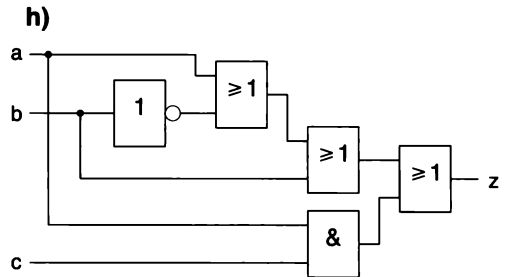
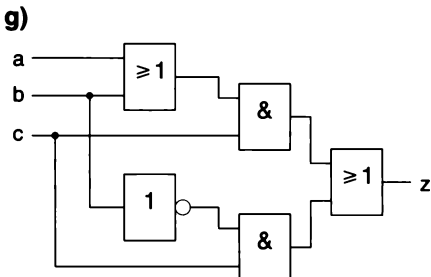
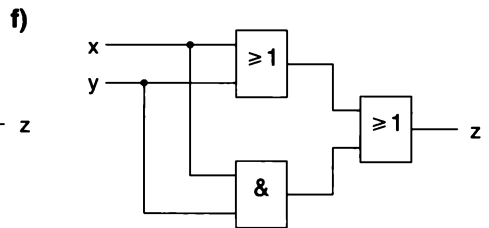
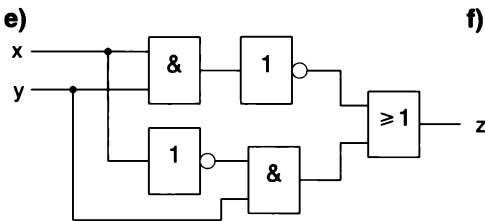
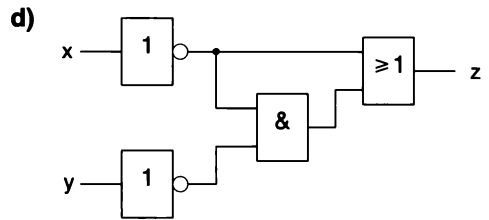
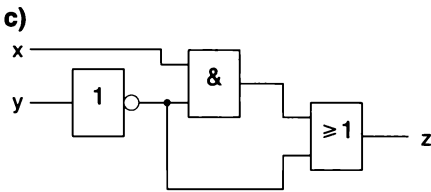
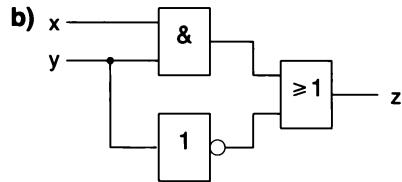
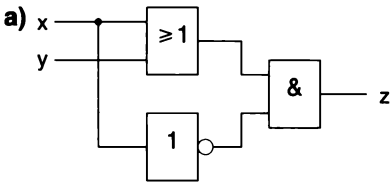
b)



2.49 Zeige, dass die beiden Schaltungen gleichwertig sind:



2.50 Die folgenden Schaltungen können vereinfacht werden. Wie lautet die Schaltfunktion der vereinfachten Gleichung? Kontrolliere, ob die Wertetabellen der ursprünglichen Funktion und der vereinfachten Funktion übereinstimmen.



**2.51** Zeichne die Schaltung und vereinfache sie (Kontrolle mit Wertetabelle):

**a)**  $x = (a \wedge b) \vee (a \vee \bar{b})$       **b)**  $y = \overline{a \wedge \bar{b}} \vee \overline{a \vee b}$       **c)**  $z = (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})$

**2.52** Gib alle zweistellige Schaltfunktionen in einer Normalform an und vereinfache diese wenn möglich.

**2.53** Eine dreistellige Schaltfunktion ist durch ihre Wertetabelle gegeben. Stelle sie in einer Normalform dar und vereinfache sie:

a	b	c	a)	b)	c)	d)	e)	f)
			$f_1(a,b,c)$	$f_2(a,b,c)$	$f_3(a,b,c)$	$f_4(a,b,c)$	$f_5(a,b,c)$	$f_6(a,b,c)$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0

**2.54** Für eine Abstimmung unter drei Personen soll ein Schaltkreis entworfen werden, der genau dann 1 ergibt, wenn wenigstens zwei der drei Eingaben a, b, c, gleich 1 sind. Wie lautet die Schaltfunktion?

**2.55** Ein Haus besitzt drei Eingänge, in denen durch einen Schalter die Hausbeleuchtung unabhängig ein- oder ausgeschaltet werden kann. Die drei Schalter werden mit a, b und c bezeichnet. Ist  $a = b = c = 0$ , so ist die Beleuchtung ausgeschaltet. Bestimme eine Schaltfunktion  $s = f(a,b,c)$  zur gewünschten Steuerung der Beleuchtung.

**2.56** In einem Kühlraum soll eine Temperatur zwischen  $2^\circ\text{C}$  und  $6^\circ\text{C}$  herrschen. Ist die Temperatur über  $6^\circ\text{C}$ , soll ein Kühlaggregat eingeschaltet werden und so lange arbeiten, bis die Temperatur auf  $2^\circ\text{C}$  abgesenkt ist. Entwirf eine Schaltung zur Steuerung des Kühlaggregats.

*Hinweis:* Man kann mit drei Schaltvariablen a, b und c arbeiten.  $a = 1$  genau dann, wenn die Kühlraumtemperatur über  $6^\circ\text{C}$  ist, b ist genau dann 1, wenn diese unter  $2^\circ\text{C}$  ist; c ist genau dann 1, wenn das Kühlaggregat arbeitet.  $s = f(a,b,c)$  ist dann eine Schaltfunktion, die genau dann 1 ist, wenn das Kühlaggregat durch einen Schalter ein- oder ausgeschaltet werden soll.

## 2.4 Simplex-Methode in der linearen Optimierung

Die *Simplex-Methode* (auch Simplex-Algorithmus) zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben wurde 1947 von DANTZIG<sup>4</sup> vorgeschlagen. Er gehört zu den wichtigsten numerischen Methoden, die im 20. Jahrhundert gefunden wurden. Mit ein Grund für den außergewöhnlichen Erfolg dieses Verfahrens war die gleichzeitige Entwicklung schneller Rechner, welche die Lösung von linearen Optimierungsaufgaben mit hunderten oder tausenden von Nebenbedingungen ermöglichten. Im Folgenden sollen einfürend einige sehr einfache, aber typische Aufgabenstellungen mit ausgesuchten Zahlen zur leichten Lösung behandelt werden. Realistische Probleme sind weit umfangreicher, oft schwieriger mathematisch zu erfassen und nur rechnerunterstützt lösbar.

In "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 266 ff, wurde in die Problemstellung der linearen Optimierung eingeführt und einige Aufgaben *graphisch* gelöst. Darauf wird Bezug genommen. Die folgende Aufgabe (Beispiel 9.11) wurde einfürend gestellt, an der nun die grundlegenden Gedanken des Simplex-Algorithmus gezeigt werden sollen.

### Beispiel 2.18: Simplex-Methode für ein Problem in Standardform

Für den Zusammenbau zweier Geräte A und B stehen zwei Montageplätze zur Verfügung. Der Montageplatz I ist pro Woche 40 Stunden und der Montageplatz II 28 Stunden einsetzbar. Für das Gerät A werden am Montageplatz I durchschnittlich 4 Stunden und für das Gerät B zwei Stunden gebraucht. Am Montageplatz II sind für das Gerät A eine Stunde und für das Gerät B zwei Stunden im Mittel notwendig.

Der (Rein-)Gewinn pro Stück ist bei A gleich € 600,-, bei B gleich € 400,-. Wie viele Geräte der Art A und der Art B müssen pro Woche hergestellt werden, damit der Gewinn größtmöglich ist?

#### Lösung

Wir bezeichnen allgemeiner mit  $x_1$  und  $x_2$  (statt mit  $x$  und  $y$ ) die Anzahl der herzustellenden Geräte A bzw. B. Dann ergibt sich folgende mathematische Formulierung des Problems (die Einheiten werden weggelassen):

$$\begin{aligned} \text{Nebenbedingungen:} \quad & 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 28 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{Nichtnegativitätsbedingungen}) \end{aligned}$$

$$\text{Zielfunktion:} \quad z = 600 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 \rightarrow \text{Maximum}$$

Diese Aufgabe ist in einer Form gestellt, wie sie in der linearen Optimierung schöner kaum möglich ist. Man spricht von der *Standardform*. Sie ist Ausgangspunkt der so genannten Phase II der Simplex-Methode. Aufgaben nicht in Standardform erfordern noch eine Vorbehandlung, die Phase I.

**Standardform** einer linearen Optimierungsaufgabe:

- (1) Die Zielfunktion wird **maximiert**.
- (2) Es gelten die **Nichtnegativitätsbedingungen für jede Variable**.
- (3) Die weiteren Nebenbedingungen sind alle in der Form:  
linearer Term  $\leq$  **nichtnegative** Konstante.

<sup>4</sup> George Bernard DANTZIG (1914–2005), amerikanischer Mathematiker und Volkswirtschaftler

Die Lösung der Aufgabe ist im so genannten **zulässigen Bereich** zu suchen, das ist jener Bereich der  $(x_1, x_2)$ -Ebene, der durch die Nebenbedingungen bestimmt wird. Abb. 2.11 zeigt den zulässigen Bereich, der ein *konvexes Vieleck* ist (ein Vieleck ist konvex, wenn es keine einspringenden Ecken besitzt). Nach dem **Hauptsatz der linearen Optimierung** ("Ingenieur-Mathematik 2", Seite 270) erreicht die Zielfunktion ihr Optimum in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs.

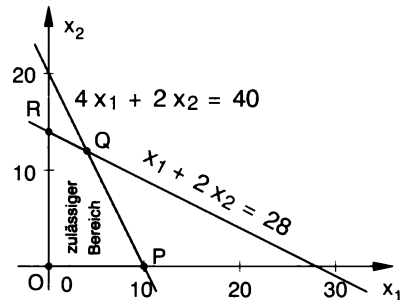


Abb. 2.11

Es erhebt sich nun die Frage, wie die Ecken des zulässigen Bereichs rechnerisch gefunden werden können.

Der erste Schritt besteht darin, das System der Nebenbedingungen (ohne Nichtnegativitätsbedingungen) durch Einführung von zusätzlichen Variablen in ein System von Gleichungen umzuschreiben:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 40 & (*) \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 &= 28 \end{aligned}$$

Die neuen Variablen  $x_3$  und  $x_4$  nennt man **Schlupfvariablen**, die in den beiden ursprünglichen Ungleichungen gerade die nichtnegative Differenz zwischen der rechten und linken Seite ausmachen. Sie erfüllen daher auch die Nichtnegativitätsbedingung. Die Variablen  $x_1$  und  $x_2$  werden als **Strukturvariablen** bezeichnet.

Das vorliegende Gleichungssystem besitzt zwei Gleichungen für 4 Variablen und hat somit im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Legt man aber zwei der Variablen wertmäßig fest, so liegt ein Gleichungssystem für die restlichen beiden Variablen vor, das im Allgemeinen genau eine Lösung hat. Wir setzen nun, *so oft wie möglich*, im Gleichungssystem (\*) zwei

Variablen *null* und berechnen dann die beiden anderen. Dies ist  $\binom{4}{2} = 6$  mal möglich. Es ergeben sich folgende besondere Lösungen:

Zeile	Basislösung				Ecke des zulässigen Bereichs
1	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 40$	$x_4 = 28$	O(0/0)
2	$x_1 = 0$	$x_2 = 20$	$x_3 = 0$	$x_4 = -12$	
3	$x_1 = 0$	$x_2 = 14$	$x_3 = 12$	$x_4 = 0$	R(0/14)
4	$x_1 = 10$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$	$x_4 = 18$	P(10/0)
5	$x_1 = 28$	$x_2 = 0$	$x_3 = -72$	$x_4 = 0$	
6	$x_1 = 4$	$x_2 = 12$	$x_3 = 0$	$x_4 = 0$	Q(4/12)

Diese 6 besonderen Lösungen des Gleichungssystems (\*) heißen **Basislösungen**. In jeder dieser Basislösung sind zwei Variablen ungleich null; diese Variablen werden **Basisvariablen** (kurz BV), die beiden anderen Variablen, die null gesetzt wurden, werden **Nichtbasisvariablen** (kurz NBV) der betreffenden Basislösung genannt. Sind die Werte aller Variablen einer Basislösung größer oder gleich null, so spricht man von einer **zulässigen Basislösung**. Von den 6 Basislösungen von (\*) sind somit jene in den Zeilen 1, 3, 4 und 6 zulässige Basislösungen. Man erkennt ferner, dass zu jeder zulässigen Basislösung eine Ecke des zulässigen Bereichs gehört (in der Tabelle angeführt). Unsere lineare Optimierungsaufgabe kann daher rechnerisch grundsätzlich einfach gelöst werden: *Man bestimmt über die zulässigen Basislösungen alle Ecken des zulässigen Bereichs und nimmt jene mit dem höchsten Zielfunktionswert.*

Diese Überlegungen gelten allgemein für lineare Optimierungsaufgaben, wenn man absieht, dass der zulässige Bereich unendlich sein kann oder es mehr als eine Ecke mit dem gleichen optimalen Zielfunktionswert gibt.



Da die Anzahl der Ecken in praktischen Fällen aber extrem hoch sein kann, scheidet der vorgeschlagene Weg auch für die schnellsten Computer aus. Die Simplex-Methode bietet einen effizienten Lösungsweg an. Zuerst stellen wir fest, dass das Gleichungssystem (\*) in einer Form geschrieben ist, welche eine zulässige Basislösung unmittelbar ablesen lässt, nämlich  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 40$  und  $x_4 = 28$ .  $x_3$  und  $x_4$  sind hier die Basisvariablen. Wir schreiben nun das Gleichungssystem (\*) in der folgenden Form und ergänzen es durch die Gleichung der Zielfunktion, die "Grundzeile":

$$\begin{array}{r}
 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 40 \\
 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 28 \\
 -z + 600 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0
 \end{array}$$

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b_i$	$q_i$
$x_3$	4	2	1	0	40	
$x_4$	1	2	0	1	28	
$-z$	600	400	0	0	0	

Denn die Gleichung der Zielfunktion  $z = 600 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2$  kann auch in der Form  $-z + 600 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$  geschrieben werden. Vom Gleichungssystem und der Gleichung für die Zielfunktion werden nur die Koeffizienten (inklusive der Koeffizienten, die null sind) in einer Tabelle notiert. Mit  $b_i$  ist die rechte Seite der jeweiligen  $i$ -ten Gleichung gemeint. Die  $q_i$ -Spalte wird noch erklärt. Links wird noch eine Spalte angefügt, welche die Basisvariablen angibt. Die entstandene Tabelle wird ein **Simplex-Tableau** genannt. Aus Simplex-Tableaus kann man Basislösungen unmittelbar ablesen.

Die Idee ist nun, ausgehend von der augenblicklichen Basislösung, die der Ecke  $O(0/0)$  entspricht, eine solche Nachbarcke anzusteuern, bei der sich  $z$  maximal erhöht. In Betracht kommen (siehe Abb. 2.11, Seite 59) die Ecken  $P(10/0)$  und  $R(0/14)$ . Dabei wird entweder *nur*  $x_1$  oder *nur*  $x_2$  vergrößert. Da  $z = 600 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2$  bei einer Vergrößerung von  $x_1$  stärker als bei einer gleichen von  $x_2$  ansteigt, wird  $x_1$  als neue BV festgelegt.

Die Situation ist wie beim Aufstieg auf den Gipfel eines "konvexen" Berges (d.h. dieser Berg besitzt keine Mulden) bei Nebel; man geht in Richtung des steilsten Anstiegs.

$x_2$  bleibt wie bisher neue Basisvariable (NBV) und wird als solche auch in der nächsten Basislösung wieder null sein. Es muss noch geklärt werden, welche bisherige BV zur NBV gemacht wird. Wir setzen im Gleichungssystem (\*)  $x_2$  gleich null:  $x_3 = 40 - 4x_1$  sowie  $x_4 = 28 - 1 \cdot x_1$ . Da man weiterhin im zulässigen Bereich bleiben will, muss gelten:

$$x_3 = 40 - 4x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{40}{4} = 10 \text{ sowie } x_4 = 28 - 1 \cdot x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{28}{1} = 28.$$

Ist  $x_1 = 10$ , so ist  $x_3 = 0$  und  $x_4$  noch nichtnegativ. Damit kann  $x_3$  ohne Weiteres null sein, d.h. als Nichtbasisvariable im Austausch gegen  $x_1$  genommen werden: die neue Basislösung ist trotzdem zulässig. Wir denken uns daher im Gleichungssystem (\*)  $x_2$  und  $x_3$  wertmäßig festgehalten und lösen nach den beiden Variablen  $x_1$  und  $x_4$ :

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 10 \quad (***)$$

$$x_4 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 18$$

Daraus erhält man  $x_1 = 10$  und  $x_4 = 18$ , wenn man  $x_2$  und  $x_3$  als NBV gleich null setzt. Dies ist die Basislösung in Zeile 4 der Tabelle auf Seite 59, die dem Eckpunkt  $P(10/0)$  entspricht.

Zielfunktion:  $z = 600x_1 + 400x_2 = 600 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 10\right) + 400x_2 = 100x_2 - 150x_3 + 6000.$

Die Zielfunktion hat in dieser Ecke den Wert  $100 \cdot 0 - 150 \cdot 0 + 6000 = 6000$ . Die beiden Gleichungen (\*\*\*) kann man zusammen mit der neuen Form der Zielfunktion wie folgt schreiben, woraus sich das zweite Simplex-Tableau ergibt:

	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b_i$	$q_i$
$1 \cdot x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 0 \cdot x_4 = 10$	$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	10	
$0 \cdot x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 1 \cdot x_4 = 18$	$x_4$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	18	
$-z + 0 \cdot x_1 + 100x_2 - 150x_3 + 0 \cdot x_4 = -6000$	$-z$	0	100	-150	0	-6000	

Wir haben damit einen Austausch von  $x_3$  gegen  $x_1$  vollzogen. Derartige Austauschschritte werden beim Simplex-Algorithmus so lange durchgeführt, bis die optimale Lösung (falls vorhanden) gefunden wird. Bei jedem Austauschschritt fallen zwei Tätigkeiten an: Erstens muss überlegt werden, welche Variablen getauscht werden, und zweitens muss danach der Austauschschritt technisch durchgeführt werden. Allgemein kann man die bisherigen Ausführungen wie folgt zusammenfassen, wobei sich auch die Bedeutung der  $q_i$ -Spalte ergibt.

**Simplex-Algorithmus in Phase II (Optimierungsaufgabe in Standardform)**

- (1) Stelle fest, ob es positive Koeffizienten der Variablen  $x_i$  in der Grundzeile (z-Zeile) des Simplextableaus gibt. Ist dies nicht der Fall, so liegt bereits die optimale Lösung vor: *Ende*.
- (2) Stelle einen größten positiven Koeffizienten in der Grundzeile fest. Die zugehörige Spalte wird *Pivot-Spalte* genannt.
- (3) Bilde für alle darüberliegenden Zahlen  $w$  in der Pivotspalte, die größer als null sind, das Verhältnis  $q_i = b_i/w$ . Eine Zahl  $w$ , für die das Verhältnis minimal ist, wird zum so genannten **Pivotelement**  $p$  (*pivot*, französ., Drehzapfen) gewählt. Seine Zeile heißt *Pivotzeile*.  
Gibt es in der Pivotspalte keine Zahlen größer als null, so ist die Zielfunktion im zulässigen Bereich unbeschränkt: *Ende*.
- (4) Führe mit dem Pivotelement einen Austauschschritt (siehe unten) durch und setze mit (1) fort.

**Austauschschritt** (gleich in Phase I und in Phase II, Abb. 2.12):

- (1) Vertausche im neuen Tableau die zum Pivotelement gehörenden Variablen, d.h. die im alten Tableau ganz links in der Pivotzeile stehende Basisvariable wird im neuen Tableau durch die oberhalb der Pivotspalte stehende Nichtbasisvariable ersetzt. Die anderen Basisvariablen bleiben gleich.
- (2) Alle Zahlen der Pivotzeile werden durch das Pivotelement dividiert. Alle Zahlen der Pivotspalte, abgesehen vom Pivotelement  $p$ , werden gleich null. Alle anderen Zahlen  $d$  werden im neuen Tableau ersetzt durch  $d - a \cdot c/p$  (sogenannte *Rechteckregel*, weil man die Zahlen in jenem Rechteck nimmt, von dem zwei gegenüberliegende Ecken durch  $d$  und das Pivotelement  $p$ , die anderen Ecken durch  $a$  und  $c$  gebildet werden).

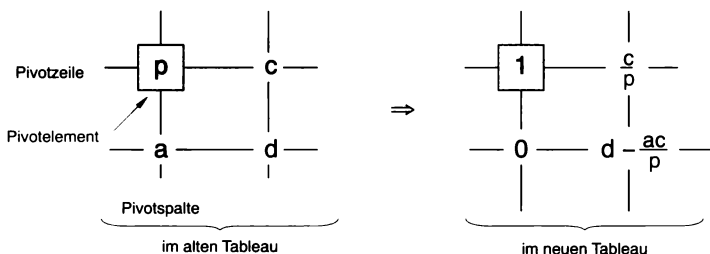


Abb. 2.12 Ein Austauschschritt

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b_i$	$q_i$
$\leftarrow x_3$	4	2	1	0	40	$\frac{40}{4} = 10$
$x_4$	1	2	0	1	28	$\frac{28}{1} = 28$
$-z$	600↑	400	0	0	0	

 $\Rightarrow$ 

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b_i$	$q_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	10	
$x_4$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	18	
$-z$	0	100	-150	0	-6000	

Da  $x_1$  und  $x_4$  BV sind, gibt es in ihren Spalten nur einmal 1, sonst stets 0. Die größte Zahl in der Grundzeile (z-Zeile) ist 600, daher wird die zugehörige Spalte zur Pivotspalte. Käme der gleiche maximale Wert in mehreren Spalten vor, so hat man unter diesen Spalten freie Hand bei der Wahl der Pivotspalte. 600 ist durch einen Pfeil gekennzeichnet. Damit soll angedeutet werden, dass die ganz oben stehende Variable  $x_1$  zur neuen Basisvariablen wird.

Da  $q_1 = \frac{40}{4} = 10$  kleiner als  $q_2 = \frac{28}{1} = 28$  ist, ist die " $x_3$ -Zeile" des Tableaus die Pivotzeile. Damit ist verbunden, dass  $x_3$  nicht mehr Basisvariable im neuen Tableau ist und gegen  $x_1$  ausgetauscht wird. Dies ist ebenfalls durch einen Pfeil vermerkt, der das Entfernen von  $x_3$  aus den Basisvariablen andeutet.

Da im neuen Tableau in der Grundzeile noch ein Koeffizient einer Variablen  $x_1$  Zahl größer als null ist, ist die optimale Lösung noch nicht erreicht. Ein neuer Austauschschritt ist nötig. Die einzelnen Tableaus werden häufig wie folgt übereinander geschrieben:

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b_i$	$q_i$	
$\leftarrow x_3$	4	2	1	0	40	$\frac{40}{4} = 10$	
$x_4$	1	2	0	1	28	$\frac{28}{1} = 28$	1. Tableau
$-z$	600↑	400	0	0	0		
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	10	$10 : (\frac{1}{2}) = 20$	
$\leftarrow x_4$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	18	$18 : (\frac{3}{2}) = 12$	2. Tableau
$-z$	0	100↑	-150	0	-6000		
$x_1$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	4		
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	12		3. Tableau
$-z$	0	0	$-\frac{400}{3}$	$-\frac{200}{3}$	-7200		

In der Grundzeile gibt es keine positiven Zahlen mehr. Daher ist die optimale Lösung erreicht. Das letzte Tableau, ergänzt durch die Gleichung der Zielfunktion, lautet als Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{1}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_4 &= 4 \\
 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - \frac{1}{6} x_3 + \frac{2}{3} x_4 &= 12 \\
 -z + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - \frac{400}{3} x_3 - \frac{200}{3} x_4 &= -7200
 \end{aligned}$$

Setzt man die Nichtbasisvariablen  $x_3$  und  $x_4$  gleich null, so erhält man die optimale Lösung:  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = 12$ ;  $-z = -7200$  oder  $z = 7200$ .

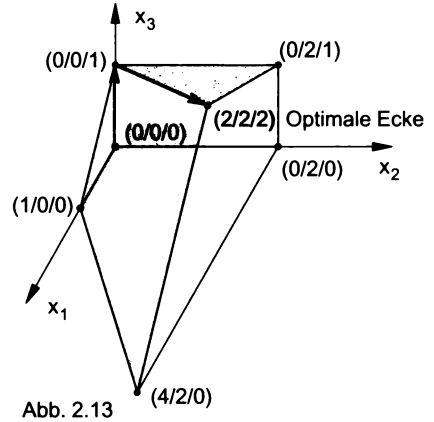
Diese Werte können natürlich auch sofort aus dem letzten Tableau abgelesen werden. Der Gewinn ist mit € 7 200,- maximal, wenn man 4 Stück vom Gerät A und 12 Stück vom Gerät B herstellt.

Abb. 2.13 veranschaulicht den Simplex-Algorithmus für die folgende lineare Optimierungsaufgabe in Standardform mit drei Strukturvariablen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ :

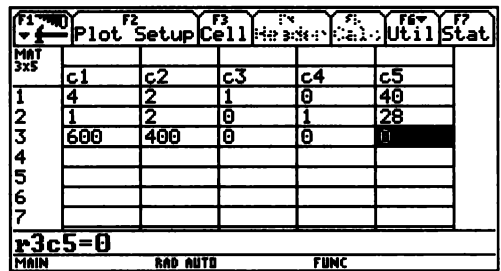
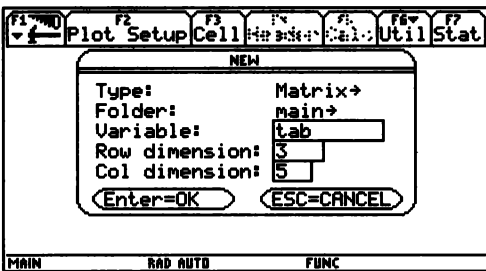
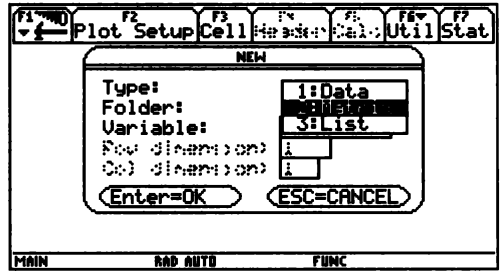
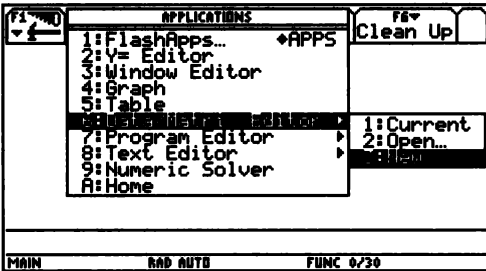
Nebenbedingungen:  $x_2 \leq 2$   
 $-x_1 + 2x_3 \leq 2$   
 $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Zielfunktion:  $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \text{Maximum}$

Durch die Nebenbedingungen wird nun ein konvexer ebenflächig begrenzter Körper im dreidimensionalen Raum definiert. Die optimale Lösung liegt in einer Ecke dieses Körpers. Der Simplex-Algorithmus findet sie in besonders effizienter Weise durch Fortbewegen entlang der Kanten des Körpers derart, dass sich dabei der Zielfunktionswert (bei einer Maximumaufgabe) erhöht. Das Wort "Simplex" bezeichnet allgemein einen "ebenflächig" begrenzten konvexen Körper in einem Raum beliebiger Dimension.



Das folgende einfache Programm kann zur Bestimmung eines Simplex-Austauschschrittes, also zur Berechnung eines neuen Tableaus dienen. Zuvor ist es nötig, das Anfangstableau unter dem Namen tab als Matrix zu definieren:



```
simplex()
Prgm
Local z,s,i,j,p
ClrIO
Dialog
Title "Pivotelement"
Request "Zeile ?", z
Request "Spalte ?", s
EndDlog
```

Programm zur Durchführung eines Simplex-Austauschschrittes für Phase I und Phase II

Eingabe der Zeilen- und Spaltennummer des Pivotelementes

Voyage 200

```

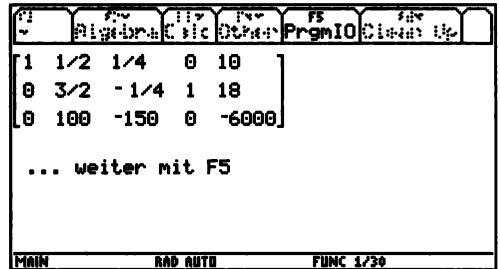
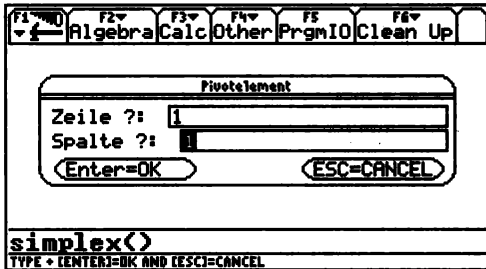
expr(z)→z : expr(s)→s
tab[z,s]→p
For i,1,rowDim(tab)
  For j,1,colDim(tab)
    If i≠z and j≠s Then
      tab[i,j]-tab[i,s]*tab[z,j]/p → tab[i,j]
    EndIf
  EndFor
EndFor
For j,1,colDim(tab)
  tab[z,j]/p → tab[z,j]
EndFor
For i,1,rowDim(tab)
  If i≠z Then
    0→ tab[i,s]
  EndIf
EndFor
Disp tab
Disp "", " ... weiter mit F5"
EndPrgm
    
```

Berechnung des neuen Tableaus außerhalb der Pivotzeile oder -spalte nach der Rechtecksregel

Berechnung der neuen Elemente in der Pivotzeile

Berechnung der neuen Elemente in der Pivotspalte

Anzeige des neuen Tableaus



Aufruf des Programmes durch simplex(), was wiederholt erfolgen kann.

Oft liegt jedoch eine Optimierungsaufgabe nicht in der Standardform vor. In diesen Fällen ist ein Vorlauf nötig, die sogenannte **Phase I** der Simplex-Methode (Abb. 2.14).

Auch hier werden Austauschschritte vorgenommen. Ihr Ziel ist das Erreichen der Phase II der Simplex-Methode, das Lösen einer Optimierungsaufgabe in Standardform, wie das in Beispiel 2.18 erfolgte.

Wir lösen nun die Aufgabe in Beispiel 9.12, "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 268 ff, mit der Simplex-Methode.

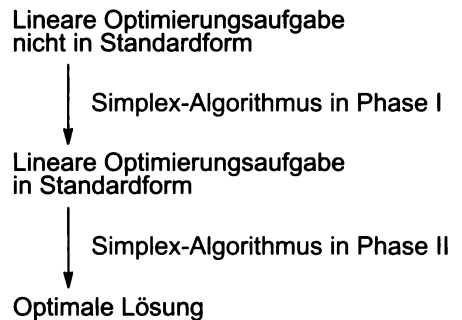


Abb. 2.14 Simplex-Methode

### Beispiel 2.19 : Simplex-Methode für ein Problem nicht in Standardform

Ein Unternehmen muss täglich mindestens 120 hl Abwässer entsorgen. Dafür kommen zwei Frächter A und B in Frage. A kann pro Fahrt bis zu 20 hl, B bis zu 8 hl befördern. Aus Personalgründen kann A jedoch täglich höchstens 4 Fahrten, B höchstens 10 Fahrten anbieten. A verlangt pro Fahrt € 400,-, B pro Fahrt € 300,-. Wie muss das Unternehmen die Fahraufträge verteilen, damit die Beförderungskosten minimal bleiben?

#### Lösung

Wir bezeichnen wieder allgemeiner mit  $x_1$  und  $x_2$  (statt mit  $x$  und  $y$ ) die Anzahl der Fahrten von A bzw. B. Dann ergibt sich folgende mathematische Formulierung des Problems:

Nebenbedingungen:  $20 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \geq 120$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ (Nichtnegativitätsbedingungen)}$$

Zielfunktion:  $z = 400 \cdot x_1 + 300 \cdot x_2 \rightarrow \text{Minimum}$

Es liegen gleich zwei Abweichungen von der Standardform einer linearen Optimierungsaufgabe vor: Zum einen ist eine der Nebenbedingungen (abgesehen von den Nichtnegativitätsbedingungen) nicht von der Form linearer Term  $\leq$  nichtnegative Konstante, zum anderen ist die Zielfunktion zu minimieren. Der erste Schritt besteht nun darin, die mathematische Formulierung der Standardform anzunähern.

(1) Um " $\leq$ " in der Nebenbedingung  $20 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \geq 120$  zu erreichen, multiplizieren wir diese Ungleichung mit  $(-1)$ . Beachte, dass sich dabei der Ungleichheitssinn umkehrt:

$$-20 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 \leq -120.$$

Freilich liegt nun eine andere Abweichung von der Standardform vor: Die rechte Seite ist negativ, dies kann jedoch im Folgenden in Kauf genommen werden.

(2) Statt  $z = 400 \cdot x_1 + 300 \cdot x_2$  zu *minimieren*, kann man genauso gut die Zielfunktion  $zz = -z = -400 \cdot x_1 - 300 \cdot x_2$  *maximieren*. Die Lage des Minimums bleibt gleich. Diese Gleichung kann weiters auch in der Form  $-zz - 400 \cdot x_1 - 300 \cdot x_2 = 0$  geschrieben werden.

Man kann nun wieder durch Einführung von Schlupfvariablen ein Gleichungssystem bilden, das durch die Funktionsgleichung der Zielfunktion ergänzt wird:

	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$
$-20 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -120$	$x_3$	-20	-8	1	0	0	-120
$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 4$	$x_4$	1	0	0	1	0	4
$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 10$	$x_5$	0	1	0	0	1	10
$-zz - 400 \cdot x_1 - 300 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 0$	$-zz$	-400	-300	0	0	0	0

Setzt man im Gleichungssystem  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ , so ist  $x_3 = -120$ ,  $x_4 = 4$  und  $x_5 = 10$ . Diese Basislösung ist nicht zulässig, es gibt eine Variable, die einen nichtnegativen Wert hat.

**Simplex-Algorithmus in Phase I  
(Optimierungsaufgabe noch nicht in Standardform)**

- (1) Stelle fest, ob es negative Zahlen  $b_i$  (ausgenommen möglicherweise in der Grundzeile) gibt. Eine Zeile mit der *betragsmäßig* größten solchen Zahl wird zur *Pivotzeile*. Gibt es keine negativen Zahlen  $b_i$  mehr, so gehe zur Phase II der Simplex-Methode über.
- (2) Suche negative Zahlen in der Pivotzeile und wähle eine *betragsgrößte* zum *Pivotelement*. Die zugehörige Spalte wird zur *Pivotspalte*. Gibt es in der Pivotzeile keine negativen Zahlen, so gibt es keine Lösung im zulässigen Bereich: Ende.
- (3) Führe mit dem Pivotelement einen Austauschschritt durch und setze mit (1) fort.

Anders als in der Phase II wird in der Phase I zuerst die Pivotzeile festgelegt und erst danach die Pivotspalte. Außerdem ist nun das Pivotelement negativ. Die Tableaus enthalten in der Phase I keine  $q_i$ -Werte.

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$	$q_i$
$\leftarrow x_3$	-20↑	-8	1	0	0	-120	
$x_4$	1	0	0	1	0	4	
$x_5$	0	1	0	0	1	10	
-ZZ	-400	-300	0	0	0	0	
$x_1$	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{20}$	0	0	6	
$\leftarrow x_4$	0	$-\frac{2}{5}\uparrow$	$\frac{1}{20}$	1	0	-2	
$x_5$	0	1	0	0	1	10	
-ZZ	0	-140	-20	0	0	2400	
$x_1$	1	0	0	1	0	4	
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{2}$	0	5	
$x_5$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{2}$	1	5	
-ZZ	0	0	$-\frac{75}{2}$	-350	0	3100	

Phase I

Phase I abgeschlossen,  
Übergang zu Phase II

Es gibt auch noch eine weitere Art, die Phase I durchzuführen, indem man mit *künstlichen Variablen* und einer *künstlichen Zielfunktion* arbeitet. Diese zweite Art wird meist in kommerzieller Software angewendet.

Da in der  $b_i$ -Spalte keine negativen Werte mehr auftreten, ist die Phase I beendet. Die lineare Optimierungsaufgabe liegt in der Standardform vor, eine zulässige Basislösung wurde gefunden. Es folgt nun Phase II. Da jedoch in *diesem* Beispiel in der Grundzeile keine positiven Koeffizienten in der Zielfunktion auftreten, liegt schon das Tableau für die optimale Lösung vor; ein Austauschschritt in Phase II ist nicht mehr nötig:

$x_1 = 4, x_2 = 5; -zz = z = 3100.$

Die Kosten sind minimal und zwar gleich € 3100,-, wenn der Frächter A 4 Fahrten und der Frächter B 5 Fahrten macht.

Liegt eine **Nebenbedingung** (abgesehen die Nichtnegativitätsbedingungen) als **Gleichung** statt als Ungleichung vor, so kann man die Gleichung durch zwei Ungleichungen ersetzen: eine mit " $\leq$ ", die andere mit " $\geq$ ".

*Beispiel:* Würde im Beispiel 2.19 genau 120 hl Abwässer zu befördern sein, so lautet die zugehörige Nebenbedingung:  $20 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = 120$ .

Man ersetzt durch  $20 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 120$  sowie durch  $20 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \geq 120$ . Die zweite Ungleichung wird zur Bearbeitung in Phase I umgeschrieben in  $-20 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 \leq -120$ .

Man kommt hier ebenfalls auf das gleiche Ergebnis wie in Beispiel 2.19. Führe die Rechnungen aus!

**Lineare Optimierung mit Microsoft Excel:**

Dies erfolgt mit dem Zusatzprogramm Solver. Da x1, x2 usw. Zelladressen bedeuten, verwenden wir die Variablenbezeichnungen x, y und für den Zielfunktionswert z. Man trägt zuerst in A1,B1 und C1 die Texte x, y und z ein; darunter in A2 und B2 die Zahlen 0 als Startwerte. Günstig ist es, statt A2 und B2 die Namen x und y zu verwenden (Menüpunkt Einfügen/Namen/Definieren). Danach wird in C2 nach einem Gleichheitszeichen der Zielfunktionsterm  $400 \cdot x + 300 \cdot y$  eingetragen.

Nun können in den Zellen B5 bis B9 die linken Seiten der 5 Nebenbedingungen eingetragen werden (in der gleichen Reihenfolge wie auf Seite 65): in B6 wird jeweils nach einem Gleichheitszeichen x, in B7 wird y, in B8 und B9 wieder =x und =y eingetragen.

Danach kann der Solver aufgerufen werden (Menü Extras; falls dort nicht vorhanden, zuerst über das Menü Extras den Add-in-Manager laden). Es erscheint ein Dialogfenster, das ausgefüllt wird. Mit dem Befehl Lösen erhält man für x, y und z die optimalen Werte.

C2		=400*x+300*y	
x	y	z	
0	0	0	

B5		=20*x+8*y	
x	y	z	
0	0	0	
Nebenbedingungen:			
1.	0		
2.	0		
3.	0		
4.	0		
5.	0		

Solver Parameter

\$C\$2

\$A\$2:\$B\$2

\$B\$5 >= 120  
 \$B\$6 <= 4  
 \$B\$7 <= 10  
 \$B\$8 >= 0  
 \$B\$9 >= 0

x	y	z	
4	5	3100	
Nebenbedingungen			
1.	120		
2.	4		
3.	5		
4.	4		
5.	5		



Lineare Optimierung tritt in vielen Anwendungen auf. Die in der Praxis wohl häufigste Aufgabengruppe bilden die Transportprobleme. Da die Tableaus mit der Anzahl der Strukturvariablen schnell groß werden und man dabei mit der Simplex-Methode die Grenzen der Handrechnung überschreitet, sollen nur zwei Situationen behandelt werden: 2 "Lager" sowie 2 oder 3 "Verbraucher".

**Beispiel 2.20 : Transportproblem**

Für die Versorgung von drei Großbaustellen ("Verbraucher")  $V_1, V_2, V_3$  mit Fertigbeton stehen zwei Auslieferungsorte ("Lager")  $L_1, L_2$  zur Verfügung. Die Kapazitäten der beiden Lager, der Bedarf der drei Verbraucher, jeweils in LKW-Fuhren, und die Entfernungen zwischen den Lagern und Verbrauchern sind in der nachstehenden Tabelle angegeben:

Lager	Entfernung der Verbraucher			Lagerkapazität
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	
von $L_1$	15 km	30 km	25 km	50 Fuhren
von $L_2$	25 km	35 km	40 km	45 Fuhren
Bedarf	35 Fuhren	30 Fuhren	30 Fuhren	

- a) Wie ist die Belieferung vorzunehmen, damit die gesamte Transportweglänge (und damit die Transportkosten) minimal sind?
- b) Löse das Problem, wenn nur die beiden Verbraucher  $V_1$  und  $V_2$  zu beliefern sind!

**Lösung**

Zu a)

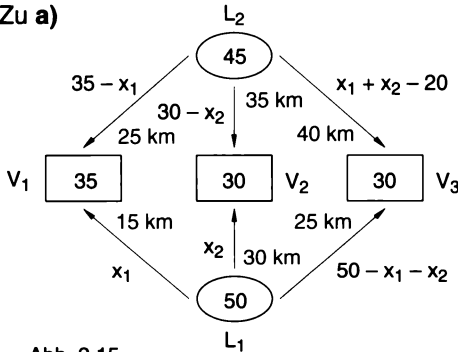


Abb. 2.15

Wir stellen zuerst fest, dass die Gesamtkapazität der Lager und der Gesamtbedarf der Verbraucher gleich sind, nämlich 95 LKW-Fuhren. Ein solches Transportproblem wird als *ausgeglichenes* oder *geschlossenes Problem* bezeichnet.

Man kann folgende Variablen einführen (Abb. 2.15):

- $x_1$  ... Liefermenge in Fuhren von  $L_1$  an  $V_1$
- $x_2$  ... Liefermenge in Fuhren von  $L_1$  an  $V_2$ .

Alle anderen Liefermengen lassen sich nun durch  $x_1$  und  $x_2$  ausdrücken:

- Liefermenge von  $L_1$  an  $V_3$ :  $50 - x_1 - x_2$  (damit ist  $L_1$  leer)
- Liefermenge von  $L_2$  an  $V_1$ :  $35 - x_1$
- Liefermenge von  $L_2$  an  $V_2$ :  $30 - x_2$
- Liefermenge von  $L_2$  an  $V_3$ :  $45 - (35 - x_1) - (30 - x_2) = x_1 + x_2 - 20$  (damit ist auch  $L_2$  leer)  
Oder:  $30 - (50 - x_1 - x_2) = x_1 + x_2 - 20$

Natürlich können Liefermengen nicht negativ sein. Daraus ergeben sich die Nebenbedingungen.

Zielfunktion: Die gesamte Transportlänge  $z$  ist zu minimieren.

$$z = 15x_1 + 30x_2 + 25 \cdot (50 - x_1 - x_2) + 25 \cdot (35 - x_1) + 35 \cdot (30 - x_2) + 40 \cdot (x_1 + x_2 - 20) = 5x_1 + 10x_2 + 2375 \rightarrow \text{Minimum.}$$

Zusammengefasst lautet das Modell unserer Transportaufgabe:

Nebenbedingungen:  $x_1 + x_2 \leq 50$   
 $x_1 \leq 35$   
 $x_2 \leq 30$   
 $x_1 + x_2 \geq 20$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  (Nichtnegativitätsbedingungen)

Zielfunktion:  $z = 5x_1 + 10x_2 + 2375 \rightarrow \text{Minimum}$

Da die Aufgabe nicht in Standardform vorliegt, ist die Simplex-Methode mit Phase I zu beginnen. Zum Anlegen des Anfangstableaus schreiben wir die Nebenbedingungen (abgesehen von den Nichtnegativitätsbedingungen) mit den Schlupfvariablen  $x_3, x_4, x_5$  und  $x_6$  in Gleichungsform. Dabei ist von der " $\leq$  - Form" der Nebenbedingungen auszugehen, d.h.  $x_1 + x_2 \geq 20$  ist zuerst in die Form  $-x_1 - x_2 \leq -20$  umzuschreiben. Zusätzlich wird auch die zu maximierende Zielfunktion  $zz = -z$  eingeführt:

$zz = -5x_1 - 10x_2 - 2375.$

Diese Gleichung schreiben wir in der Form  $-zz = 5x_1 + 10x_2 + 2375$  oder schließlich

$-zz - 5x_1 - 10x_2 = 2375,$

wie sie in die Grundzeile des Anfangstableaus aufgenommen wird.

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 &= 50 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 &= 35 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 &= 30 \\ -1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 &= -20 \\ -zz - 5 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 &= 2375 \end{aligned}$$

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_i$
$x_3$	1	1	1	0	0	0	50
$x_4$	1	0	0	1	0	0	35
$x_5$	0	1	0	0	1	0	30
$\leftarrow x_6$	-1↑	-1	0	0	0	1	-20
-zz	-5	-10	0	0	0	0	2375

Da nur  $b_4 = -20$  negativ ist, ist die zugehörige Zeile Pivotzeile. Pivotspalte könnte die  $x_1$ - oder auch  $x_2$ -Spalte sein, da in der Pivotzeile in diesen beiden Spalten gleiche negative Werte stehen. Nach dem Austauschschritt  $x_1$  gegen  $x_6$  ist die Phase I bereits beendet, man erhält als Ausgangstableau für die Phase II:

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_i$	$q_i$
$x_3$	0	0	1	0	0	1	30	
$x_4$	0	-1	0	1	0	1	15	
$x_5$	0	1	0	0	1	0	30	
$x_1$	1	1	0	0	0	-1	20	
-zz	0	-5	0	0	0	-5	2475	

Dieses Tableau ist aber schon optimal, da in der Grundzeile in den Spalten für die Variablen  $x_1$  bis  $x_6$  keine positiven Werte stehen. Man liest ab:

$x_1 = 20, x_2 = 0$  (da Nichtbasisvariable),  $-zz_{\max} = z_{\min} = 2475.$

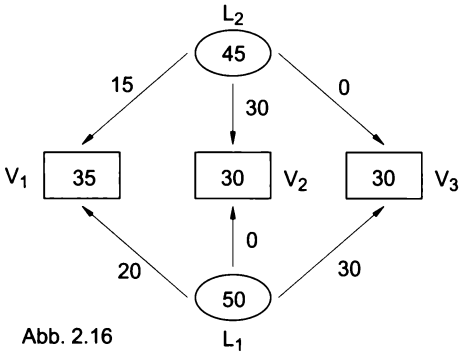


Abb. 2.16

Zu **b)** Die Gesamtkapazität der Lager übersteigt nun den Gesamtbedarf der Verbraucher. Ein solches Transportproblem wird als *nicht ausgeglichenes* oder *offenes Problem* bezeichnet. Man kann es allerdings sofort in ein ausgeglichenes Transportproblem überführen, in dem man einen fiktiven Verbraucher  $V_3$  in der Entfernung 0 km von den beiden Lagern einführt, der die Überkapazität (von 30 Fuhren) aufnimmt.

Der einzige Unterschied zu a) ergibt sich in der Zielfunktion, da jetzt zweimal 0 km als Faktor auftritt. In Abb. 2.17 sind die Liefermengen eingetragen.

Die Nebenbedingungen ergeben sich wieder aus der Forderung, dass alle Liefermengen nicht negativ sind. Nicht zu vergessen sind nun die Bedingungen, dass von  $L_1$  höchstens 50 und von  $L_2$  höchstens 45 Fuhren gestellt werden können:

$$x_1 + x_2 \leq 50 \text{ sowie } 45 - (35 - x_1) - (30 - x_2) \geq 0 \text{ oder umgeformt: } x_1 + x_2 \geq 20.$$

Zielfunktion:  $z = 15 x_1 + 30 x_2 + 25 \cdot (35 - x_1) + 35 \cdot (30 - x_2) = -10 x_1 - 5 x_2 + 1925 \rightarrow$  Minimum. Somit:

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 50 \\ x_1 &\leq 35 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_1 + x_2 &\geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \text{ (Nichtnegativitätsbedingungen)} \end{aligned}$$

Zielfunktion:  $z = -10 x_1 - 5 x_2 + 1925 \rightarrow$  Minimum

Wir führen wieder die zu maximierende Zielfunktion  $zz = -z$  ein:  $zz = 10 x_1 + 5 x_2 - 1925$ . Diese Gleichung schreiben wir in der Form  $-zz = -10 x_1 - 5 x_2 + 1925$  oder schließlich  $-zz + 10 x_1 + 5 x_2 = 1925$ , wie sie in die Grundzeile des Anfangstableaus aufgenommen wird.

Nach einem Austauschschritt in Phase I erreicht man mit dem folgenden Tableau Phase II :

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b_i$	$q_i$
$x_3$	0	0	1	0	0	1	30	$30 : 1 = 30$
$\leftarrow x_4$	0	-1	0	1	0	1	15	$15 : 1 = 15$
$x_5$	0	1	0	0	1	0	30	
$x_1$	1	1	0	0	0	-1	20	
$-zz$	0	-5	0	0	0	10↑	1725	

Abb. 2.16 zeigt die Liefermengen. Voreilig wäre eine Schlussweise, die meint, zuerst den gesamten Bedarf von 35 Fuhren von  $L_1$  zu  $V_1$  zu liefern, da diese Strecke die kürzeste ist. Das würde zur Folge haben, dass von  $L_2$  auf der langen Strecke zu  $V_3$  geliefert werden muss.

Die gesamte minimale Transportstrecke ist 2475 km.

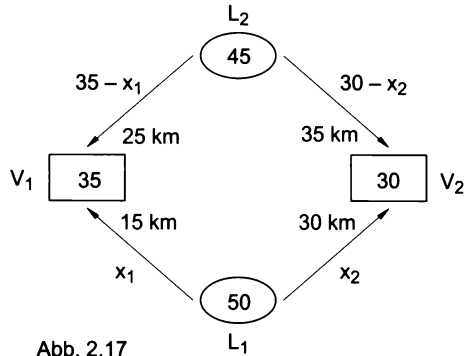


Abb. 2.17

Nach zwei weiteren Austauschschritten erreicht man das optimale Tableau mit  $x_1 = 35$  Fuhren und  $x_2 = 15$  Fuhren bei einer minimalen Transportlänge  $z_{\min} = 1\,500$  km. In Abb. 2.18 sind die optimalen Liefermengen angegeben. Abb. 2.19 zeigt die graphische Lösung von a) und b).

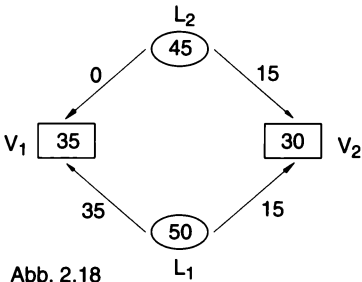


Abb. 2.18

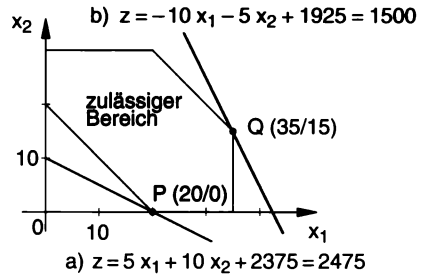


Abb. 2.19

### Im Überblick: Simplex-Methode in der linearen Optimierung

Bei einer linearen Optimierungsaufgabe definieren die Nebenbedingungen, in der Sprache des dreidimensionalen Raumes gesprochen, einen **konvexen ebenflächig begrenzten Körper** als **zulässigen (Lösungs-)Bereich**. Ein solcher Körper besitzt Ecken. **Nach dem Hauptsatz der linearen Optimierung** erreicht die Zielfunktion ihr Optimum in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs (sofern dieser nicht unbeschränkt ist).

Die Anzahl der Ecken des zulässigen Bereichs kann in praktischen Aufgabenstellungen extrem hoch sein. Mit der **Simplex-Methode** gibt es ein numerisches Verfahren, das die optimale Ecke schnell und zielsicher ansteuert.

Die Simplex-Methode zerfällt im Allgemeinen in zwei Phasen. **Phase I** hat das Ziel, eine Ecke des zulässigen Bereichs zu finden. In **Phase II** wird dann, von Ecke zu Ecke des zulässigen Bereichs gehend, der Zielfunktionswert der Ecke immer weiter verbessert. Dies erfolgt solange, bis nach verhältnismäßig wenigen solcher "Eckensprünge" das Optimum (sofern vorhanden) erreicht wird. In der praktischen Ausführung ist jeder Ecke ein sogenanntes **Simplex-Tableau** zugeordnet, aus der durch einen überlegten "Austauschschritt" eine Nachbarecke angesteuert wird.

### Aufgaben

Alle folgenden Aufgaben sollen mit der Simplex-Methode gelöst werden. Besitzt die Aufgabe nur zwei Strukturvariablen, kann die Lösung *auch* graphisch ermittelt werden. Weitere Übungsaufgaben siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 270 f.

#### Aufgaben in Standardform

2.57 Löse die folgende Aufgabe:

a)  $2x_1 + x_2 \leq 14$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 14$   
 $x_1 + x_2 \leq 8$   
 $x_1, x_2 \geq 0$   
 $z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Maximum}$

c)  $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$   
 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6$   
 $x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 20$   
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$   
 $z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \text{Maximum}$

b)  $x_1 + 2x_2 \leq 40$   
 $x_1 + x_2 \leq 25$   
 $5x_1 + 2x_2 \leq 110$   
 $x_1, x_2 \geq 0$   
 $z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Maximum}$

d)  $x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 14$   
 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$   
 $3x_1 + 2x_2 \leq 9$   
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$   
 $z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \text{Maximum}$

- 2.58 Produktionsplan:** Ein Möbelerzeuger stellt zwei Arten A und B von Sitzbänken her, wobei der Herstellungsprozess einfachheitshalber in drei Abschnitte geteilt ist: Tischlerarbeit, Oberflächenbehandlung und Tapezierung. Eine Sitzbank A benötigt 4 h Tischlerarbeit, 1 h Oberflächenbehandlung und 2 h Stunden Tapezierung. Für Sitzbank B lauten diese Werte: 2 h, 1 h bzw. 6 h. Für die Tischlerarbeiten stehen täglich maximal 62 Arbeitsstunden, für die Oberflächenbehandlung maximal 18 Arbeitsstunden und für die Tapezierung maximal 72 Arbeitsstunden zur Verfügung. Wie viel Stück von A und von B sollen täglich erzeugt werden, wenn der Reingewinn pro Sitzbank A € 100,- und pro Sitzbank B € 84,- beträgt?
- 2.59 Product Mix:** A truck travelling from Vienna to Munich is to be loaded with two types A and B of cargo. Each crate of cargo A is  $1 \text{ m}^3$  in volume, weighs 100 kg and earns € 100 for the driver. Each crate of cargo B is  $0,75 \text{ m}^3$  in volume, weighs 200 kg, and earns € 150,- for the driver. The truck can carry no more than  $60 \text{ m}^3$  and no more than 10 t. Also, the number of crates of cargo B must be less than or equal to the number of crates of cargo A. Find the number of crates of cargo A and B to maximize the profit for the driver.
- 2.60 Produktionsplan:** Ein Betrieb stellt drei verschiedene Artikel  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  her. Die Produktion wird durch die zur Verfügung stehende Maschinenzeit (in Stunden) auf drei Montagestraßen I, II und III begrenzt:

Artikel	Bearbeitungszeit auf		
	I	II	III
$A_1$	1	2	0
$A_2$	2	1	2
$A_3$	4	2	2
Verfügbare Zeit pro Woche	40	26	30

Der Reingewinn beträgt je Einheit für Artikel  $A_1$  € 8,-, für  $A_2$  € 6,- und für  $A_3$  € 10,-. Die Produktion soll so erfolgen, dass Gewinn möglichst groß ist.

*Aufgaben nicht in Standardform*

- 2.61** Löse die folgende Aufgabe:

<p><b>a)</b> <math>x_1 + x_2 \leq 6</math>  <math>-2x_1 + 3x_2 \geq 8</math>  <math>x_1, x_2 \geq 0</math>  <math>z = 5x_1 + 3x_2</math>                  → Maximum</p>	<p><b>b)</b> <math>3x_1 + 2x_2 \geq 20</math>  <math>x_1 + x_2 \geq 9</math>  <math>x_1 + 2x_2 \geq 13</math>  <math>x_1, x_2 \geq 0</math>  <math>z = 2x_1 + 3x_2</math>                  → Minimum</p>	<p><b>c)</b> <math>x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 20</math>  <math>x_1 + x_2 \leq 50</math>  <math>x_1 + 3x_3 \geq 30</math>  <math>x_1, x_2, x_3 \geq 0</math>  <math>z = x_1 - 3x_2 + x_3 + 200</math>                  → Minimum</p>
---	--	--

- 2.62 Investmentplanung:** Herr Maier hat insgesamt € 4 500,- für den Kauf von Aktien dreier Arten G, M und H zur Verfügung. G bedeutet Aktien mit geringem Risiko, M und H solche mit mittlerem bzw. hohem Risiko. Entsprechend seinen Grundsätzen will er um höchstens € 500,- mehr in G-Aktien als in M-Aktien und mindestens € 2500,- zusammen in G- und M-Aktien investieren. Weiters will er höchstens € 3 500,- zusammen in M- und H-Aktien investieren. Die erwarteten Erträge sind 4%, 7% und 10% für G-, M- bzw. H-Aktien. Wie viel soll Herr Maier in jede Aktienart investieren?

*Hinweis:* Sind  $x_1$  und  $x_2$  die Beträge für die G- bzw. M-Aktien, so ist  $4 500 - x_1 - x_2$  der Betrag für die H-Aktien.

**2.63 Produktionsplan:** Für die Erzeugung von drei Baugruppen  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$ , die sich wiederum aus drei Einzelteilen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  zusammensetzen, stehen nur je 1 000 Stück dieser Einzelteile zur Verfügung. Die Zusammensetzung jeder Baugruppe ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Einzelteil	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$E_1$	2	1	2
$E_2$	3	0	1
$E_3$	0	2	3

Wegen Absatzschwierigkeiten können von  $B_1$  höchstens 100 Stück produziert werden, während wegen vertraglicher Verpflichtungen von  $B_3$  mindestens 300 Stück hergestellt werden müssen. Der Gewinn pro Stück beträgt bei  $B_1$  € 12,- bei  $B_2$  € 9,- und bei  $B_3$  € 10,-. Wie soll bei maximalem Gewinn produziert werden?

**2.64 Mischungsaufgabe:** Eine Handelskette kauft 100 kg Walnuskerne, 100 kg Erdnuskerne und 100 kg Rosinen. Sie könnte diese Artikel einzeln zu folgenden Preisen verkaufen: Walnuskerne zu € 5,- pro kg, Erdnuskerne zu € 3,- pro kg, Rosinen € 2,- pro kg. Würde man diese drei Artikel als "Studentenfutter" gemischt verkaufen, so wäre pro Kilogramm ein Verkaufspreis von € 4,- zu erzielen. Im Studentenfutter muss der Massenanteil der Walnüsse mindestens 25% betragen, während der Rosinenanteil höchstens 25% betragen darf. Wie viel sollte als Studentenfutter verkauft werden, wie viel einzeln, um den Verkaufspreis zu maximieren?

**2.65 Mischungsaufgabe:** Ein Händler kauft 100 Kisten Obst ein. Darunter müssen mindestens 30 Kisten Äpfel, mindestens 20 Kisten Zwetschken und mindestens 10 Kisten Pfirsiche sein. Zusätzlich müssen mindestens so viele Kisten Zwetschken wie Pfirsiche vorhanden sein. Pro Kiste Äpfel verdient der Händler € 4,-, pro Kiste Zwetschken € 5,- und pro Kiste Pfirsiche € 6,-. Wie viele Kisten von jeder Obstsorte muss er nehmen, um den Verkaufsgewinn zu maximieren?

Hinweis:  $x_1$ ,  $x_2$  und  $100 - x_1 - x_2$  sind die Anzahlen der Kisten.

**2.66 Prüfungsstrategie:** Ein Student tritt bei einer Prüfung an, bei der es 10 große Fragen zu je 12 Punkten und 40 kleine Fragen zu je 3 Punkten zu erzielen gibt. Die Prüfungsdauer beträgt höchstens 120 Minuten. Der Student schätzt, dass er für die Beantwortung einer großen Frage 10 min und für die einer kleinen Aufgabe 2 min braucht. Für eine positive Beurteilung müssen mindestens 3 große und 12 kleine Aufgaben beantwortet werden. Wie viele große und wie viele kleine Aufgaben sollte der Student beantworten, um eine möglichst große Punkteanzahl zu erreichen?

**2.67 Transportaufgabe:** Für die Versorgung von drei Verbrauchern mit Heizöl stehen einem Heizölhändler zwei Lager zur Verfügung. Die vorrätigen Lagermengen, der Verbraucherbedarf und die Entfernungen zwischen den Lagern und Verbrauchern sind in der nachstehenden Tabelle angegeben:

Lager	Entfernung der Verbraucher (km)			Lagermenge (hl)
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	
von $L_1$	50	20	30	300
von $L_2$	40	30	50	200
Bedarf (hl)	150	100	250	

Es wird angenommen, dass die Transportkosten je hl und km € 0,1 betragen.

- Wie ist die Belieferung vorzunehmen, damit die Transportkosten minimal sind?
- Wie ist vorzugehen, wenn es nur die beiden Verbraucher  $V_1$  und  $V_2$  gibt?

**2.68 Transportaufgabe:** Für die Belieferung von drei Baustellen  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  mit Ziegeln stehen zwei Ziegelwerke zur Verfügung:

Ziegelwerk	Transportkosten je Palette in €			Lagermenge (in Paletten)
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$Z_1$	1	3	4	400
$Z_2$	2	2	2	300
Bedarf (in Paletten)	100	350	250	

- a) Wie ist die Belieferung transportkostenoptimal vorzunehmen?
- b) Wie ist die Frage zu beantworten, wenn es nur die Verbraucher  $B_1$  und  $B_2$  gibt?

**2.69 Transportaufgabe:** Ein Baumarkt hat drei Baustellen  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  mit Schotter aus zwei Auslieferungslagern zu versorgen. Die folgende Tabelle zeigt die vorrätigen Lagermengen, den Baustellenbedarf sowie die Kosten je Fuhre:

Lager	Transportkosten je Fuhre in €			Lagermenge (in Fuhren)
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$L_1$	5	3	6	60
$L_2$	6	5	4	80
Bedarf (in Fuhren)	40	50	50	

- a) Wie ist die Belieferung transportkostenoptimal vorzunehmen?
- b) Wie ist die Frage zu beantworten, wenn nur  $B_1$  und  $B_2$  zu beliefern sind?
- c) Wie ist zu liefern, wenn es nur die Baustellen  $B_1$  und  $B_3$  gibt?

**2.70 Transportaufgabe:** Ein Brennstoffhändler hat zwei Auslieferungslager, von denen er zwei Verbraucher  $V_1$  und  $V_2$  mit Koks zu versorgen hat. Die vorrätigen Lagermengen, der Verbraucherbedarf und die Entfernungen zwischen den Lagern und Verbrauchern sind in der nachstehenden Tabelle angegeben:

Lager	Entfernung der Verbraucher (in km)		Lagermenge (in t)
	$V_1$	$V_2$	
von $L_1$	30	15	120
von $L_2$	20	10	60
Bedarf (in t)	80	60	

Es wird angenommen, dass die Transportkosten je Tonne und Kilometer € 0,1 betragen.

- a) Wie ist die Belieferung vorzunehmen, damit die Transportkosten minimal ist?
- b) Wie ist zu liefern, wenn der Bedarf beider Verbraucher je 90 t ist?

## 2.5 Graphen und Netzwerke

Graphen bilden die fundamentalen Datenstrukturen der Diskreten Mathematik. Ihre wichtigste Anwendung liegt in der *Kombinatorischen Optimierung*, die sich mit Lösungsverfahren (Algorithmen) für kombinatorische Probleme beschäftigt. Die folgenden Ausführungen sind nur ein erster Schritt in das breite Anwendungsgebiet der Graphen.

### Beispiel 2.21 : Wie soll der Schneepflug fahren?

Sechs Orte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  und  $P_6$  sind durch Straßen, wie in Abb. 2.20, gezeigt verbunden. Ist es möglich, für einen Schneepflug eine Route von  $P_1$  ausgehend derart zu finden, dass er alle Straßen nur einmal durchfährt?

#### Lösung

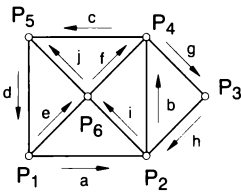


Abb. 2.21

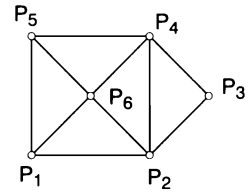


Abb. 2.20

Abb. 2.21 zeigt eine Lösung, die man hier noch durch Probieren findet. Allerdings beendet der Schneepflug seine Route nicht im Anfangspunkt  $P_1$ , einen solchen Rundweg gibt es hier nicht.

Die Darstellung des Straßennetzes in Abb. 2.20 beschränkt sich nur auf das für die Aufgabenstellung Allernötigste. Die Darstellung ist nicht maßstäblich, die Straßen werden durch meist geradlinig gezeichnete Verbindungslinien unabhängig von der tatsächlichen Art der Straße, die Orte durch Punkte wiedergegeben. Eine solche Ansammlung von Punkten mit (höchstens) einer Verbindungslinie zwischen diesen Punkten heißt allgemein ein einfacher **Graph**. Die Punkte werden **Ecken** oder **Knoten**, die Verbindungslinien **Kanten** des Graphen genannt.

### Beispiel 2.22 : Minimalnetz

Der Graph in Abb. 2.22 zeigt schematisch ein Straßennetz (Nachrichtennetz, Gasleitungsnetz, ...), das jeden Ort A, B, C, D, E und F mit jedem anderen direkt oder über Zwischenstationen verbindet. Können einige Verbindungen zwischen zwei Orten eingespart werden? Darüber hinaus besteht der Wunsch, dass das Ersatznetz eine möglichst geringe Gesamtlänge besitzen soll.

Die Werte bei den Verbindungslinien (Kanten) geben, nicht maßstäblich, die Entfernung in Kilometern zwischen den zugehörigen Orten an.

#### Lösung

Der Aufbau des minimalen Ersatznetzes stellt eine Optimierungsaufgabe dar. Man wählt zuerst eine (oder die) kürzeste Kante, dann unter den verbleibenden Kanten wieder eine kürzeste Kante, usw. Zu achten ist, dass kein geschlossener Kantenzug, oder wie man in der Graphentheorie sagt, kein **Zyklus** entsteht. Abb. 2.23 a) bis Abb. 2.23 e) zeigen schrittweise den Aufbau. Die Vorgangsweise wird als **Algorithmus von KRUSKAL** (1956) bezeichnet.

Joseph KRUSKAL (geb. 1928) ist ein amerikanischer Mathematiker.

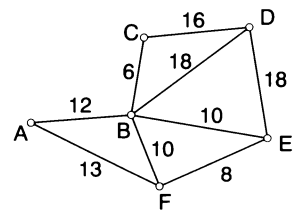


Abb. 2.22



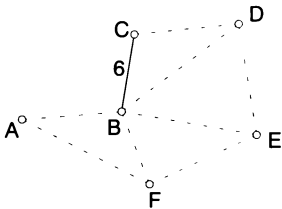


Abb. 2.23 a)

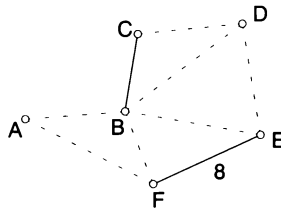


Abb. 2.23 b)

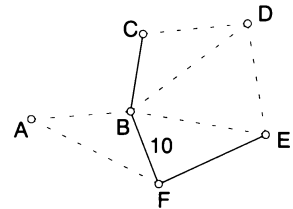


Abb. 2.23 c)

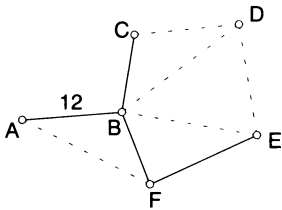


Abb. 2.23 d)

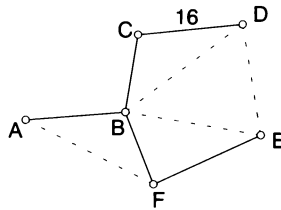


Abb. 2.23 e)

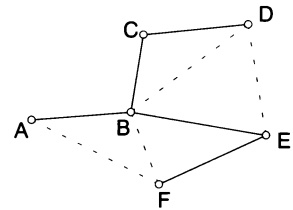


Abb. 2.24

Statt der Kante BF hätte man in Abb. 2.23 c) auch die gleich lange Kante BE wählen können. In Abb. 2.23 d) ist zu achten, dass nicht die Kante BE genommen wird, weil dadurch ein Zyklus entsteht. Aus dem gleichen Grund darf in Abb. 2.23 e) nicht die Kante AF als kürzeste noch verbleibende Kante genommen werden. Abb. 2.23 e) zeigt das fertige Minimalnetz, jeder Punkt ist von jedem anderen Punkt erreichbar, die minimale Netzlänge beträgt 52. Abb. 2.24 zeigt ein weiteres Minimalnetz mit der gleichen Netzlänge.

Das Minimalnetz in Abb. 2.23 e) oder in Abb. 2.24 erinnert an einen Baum, wenn man den Graphen geeignet dreht. Unter einem **Baum** versteht man einen *zusammenhängenden Graphen ohne Zyklen*. Man bezeichnet daher in der Graphentheorie das Minimalnetz in Abb. 2.23 e) oder 2.24 auch als einen *minimal aufspannenden Baum* des Graphen in Abb. 2.22.

Ein Graph wie in Abb. 2.22 wird allgemein als ein **Netzwerk** bezeichnet. Ein Netzwerk ist ein Graph, dessen Kanten mit Zahlen (Entfernungen, Zeitdauern, Verlegungskosten, Stromstärken, ...) bewertet sind. Diese Zahlen heißen **Längen** oder **Gewichte** der Kanten.

**Beispiel 2.23 : Kürzeste Wege von einer Ecke**

Im Netzwerk der Abb. 2.25 (Straßennetz, Rohrnetz, ...) soll ein kürzester Weg von der Ecke A zu *allen* anderen Ecken gefunden werden. Zu jeder Kante ist ihre Länge angegeben.

**Lösung**

Die Optimierungsaufgabe wird gelöst, indem man schrittweise einen "Entfernungsbaum" von der Anfangsecke A aus konstruiert. Dabei nimmt man in jedem Schritt genau eine weitere Ecke hinzu. Diese Ecke wird so gewählt, dass sie die (bzw. eine) kürzeste Entfernung zu A besitzt. Es erleichtert die Arbeit, wenn man jeder dazu genommenen Ecke eine Entfernungsmarke gibt, welche ihre Entfernung zu A angibt. Zu beachten ist, dass der aufgebaute Graph ein Baum bleibt, d.h. es dürfen keine Zyklen entstehen. Dieses Verfahren heißt **Algorithmus von DIJKSTRA**.

Edsger DIJKSTRA (1930 – 2002) war ein niederländischer Informatiker.

Wir beginnen mit A; die Ecke mit der kürzesten Entfernung zu A ist die Ecke E, welche die Entfernungsmarke 4 erhält (Abb. 2.26 a) ).

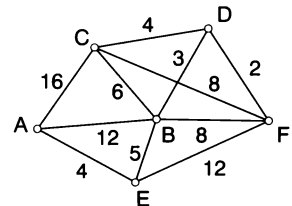


Abb. 2.25

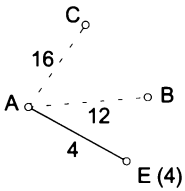


Abb. 2.26 a)

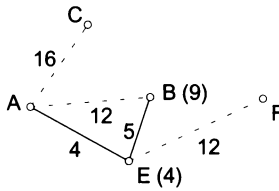


Abb. 2.26 b)

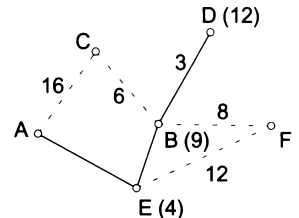


Abb. 2.26 c)

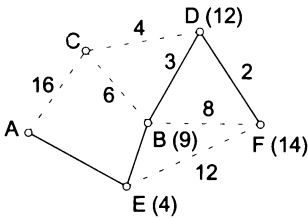


Abb. 2.26 d)

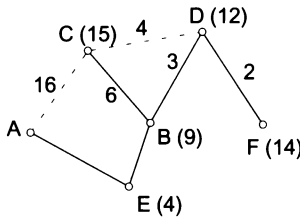


Abb. 2.26 e)

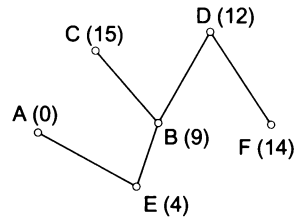


Abb. 2.27

Der Teilbaum besteht nun aus einer Kante mit den Ecken A und E. Von A aus können unmittelbar die Punkte C, B und F erreicht werden. C hat die Entfernung 16, B die Entfernung 12 bzw. über E die Entfernung  $4 + 5 = 9$  und F die Entfernung  $4 + 12 = 16$  von A. Die kürzeste Entfernung zu A hat also B über die Ecke E. Es wird daher die Kante BE hinzugefügt. Der neue Teilbaum besteht nun aus den Kanten AE und BE (Abb. 2.26 b)).

Dies wiederholt sich, bis der Entfernungsbaum bezüglich A in Abb. 2.27 aufgebaut wurde. Die Markierungen zeigen die kürzesten Entfernungen von A.

In der Praxis gibt es nicht nur die Frage nach dem kürzesten Weg zwischen zwei Ecken eines Netzwerks, sondern auch nach dem längsten. Dies tritt in der sogenannten *Netzplantechnik* auf.

### Beispiel 2.24 : Netzplan

Ein eben gelandetes Flugzeug soll zum nächsten Flug vorbereitet werden. Dabei fallen Vorgänge an, die zeitlich aufeinander abzustimmen sind. Die nebenstehende Tabelle zeigt, welche Vorgänge *unmittelbar* vor anderen ausgeführt werden müssen und welche Zeit dafür benötigt wird.

Vorgang	Vorläufer	Dauer
A Vorbereitung	–	10 min
B Passagiere gehen von Bord	A	20 min
C Fracht entladen	A	25 min
D Reinigen	B	20 min
E Wartung und Auftanken	A	30 min
F Fracht laden	C	15 min
G Passagiere gehen an Bord	D	20 min

### Lösung

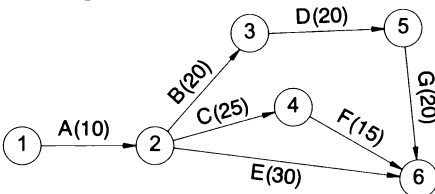


Abb. 2.28

Wieder kann der zeitliche Ablauf zwischen Landung und nächstem Start des Flugzeugs durch einen Graphen (Abb. 2.28) dargestellt werden. Es ist hier üblich, die Vorgänge mit Großbuchstaben zu bezeichnen.

Zuerst fällt auf, dass die Kanten des Graphen nun durch Pfeile dargestellt sind. Man spricht in einem solchen Fall von einem *gerichteten Graphen* oder von einem *Digraphen* (directed graph). Durch die Pfeilrichtung wird zum Ausdruck gebracht, dass eine Kante nur in Pfeilrichtung durchlaufen werden kann.

Jeder Pfeil stellt einen **Vorgang**, auch Aktivität genannt, dar. Ein Vorgang besitzt einen Anfangs- und Endzeitpunkt, die **Ereignisse** genannt werden. Die Ereignisse sind also die Ecken oder Knoten des Graphen; sie werden fortlaufend durchnummeriert. Der Startknoten, der das Anfangsereignis des dargestellten Projektes repräsentiert, erhält die Nummer 1. Der Zielknoten, der das Endereignis des Projektes repräsentiert, erhält die höchste auftretende Nummer. Als "Vorläufer" eines Vorgangs soll ein diesem zeitlich *unmittelbar*vorausgehender Vorgang bezeichnet werden. In diesem Sinne ist im Beispiel B ein Vorläufer von D, aber nicht mehr von A. Ein Vorgang kann auch mehrere Vorläufer besitzen.

Die Pfeile weisen in Richtung von späteren Vorgängen. *Ein Vorgang kann erst beginnen, wenn alle auf seinem Anfangszeitpunkt einlaufenden Vorgänge beendet sind.* Diese graphische Darstellung der Vorgänge eines größeren Projektes zur optimalen Ablaufplanung (engl.: scheduling) wird **Netzplan** genannt. Ein Netzplan wird in der Regel als ein Netzwerk mit nur einem Startknoten und nur einem Zielknoten gezeichnet.

In Abb. 2.28 ist in Klammern bei jedem Vorgang dessen Zeitdauer notiert. Die erforderliche Zeit zwischen Landung und Abflug ist die Dauer des zeitlängsten Weges vom Startknoten (1) zum Zielknoten (6). Es gibt drei Wege zwischen diesen Knoten:



Der zeitlängste Weg  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  heißt **kritischer Weg**. Vorgänge auf diesem Weg werden **kritische Vorgänge** genannt. Ist man interessiert, die Gesamtzeit eines Projektes zu verkürzen, so muss die Dauer der kritischen Vorgänge verkürzt werden. In unserem Beispiel kann die Zeit zwischen Landung und Abflug nicht kürzer als 70 Minuten ausfallen.

Diese Ermittlung des längsten Weges in einem Netzplan bildet den Kern der *Methode des kritischen Weges* (*Critical Path Method, CPM*). Bei einem CPM-Netzplan werden die Vorgänge durch Pfeile dargestellt. Häufig werden Vorgänge auch durch die Knoten dargestellt. Aus Platzgründen kann nur auf den CPM-Netzplan eingegangen werden, wobei auch hier für weitere Besonderheiten auf die Spezialliteratur verwiesen werden muss.

**Beispiel 2.25 : Scheinvorgänge in einem CPM-Netzplan**

Die folgende Tabelle gibt die Vorgangsliste eines Netzplanmodells (ohne Zeitdauer der Vorgänge) an. Zeichne einen Netzplan.

a)	Vorgang	Vorläufer	b)	Vorgang	Vorläufer
	A	–		A	–
	B	–		B	A
	C	A		C	A
	D	A, B		D	B, C

## Lösung

Zu a) Die Vorgänge C und D besitzen einen *gemeinsamen* Vorläufer, nämlich A. D besitzt *darüber hinaus* noch den Vorläufer B. Um die logische Abhängigkeit richtig auszudrücken, ist die Einführung eines so genannten **Scheinvorgangs S** nötig. Ein *Scheinvorgang (dummy)* hat die *Zeitdauer null*; seine Aufgabe ist nur, eine gegebene Abhängigkeit zwischen Vorgängen auszudrücken. Scheinvorgänge werden durch strichlierte Pfeile dargestellt.

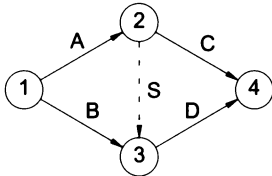


Abb. 2.29

Durch den Scheinvorgang S (Abb. 2.29) ist gewährleistet, dass die Vorgänge B und A vor Beginn des Vorgangs D beendet sein müssen.

Zu b)

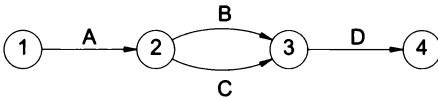


Abb. 2.30 a) Nicht möglich!

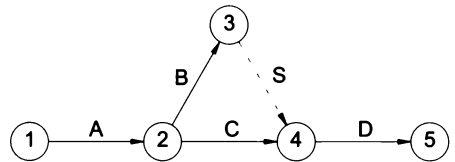


Abb. 2.30 b)

Zwei Ereignisse (Knoten) dürfen *nur durch einen Vorgang verbunden sein!* Ein Graph wie in Abb. 2.30 a) darf als Netzplan nicht gezeichnet werden. Um die gewünschte zeitliche Anordnung darzustellen, wird ein weiterer Knoten und ein Scheinvorgang eingeführt (Abb. 2.30 b).

Scheinvorgänge sind in CPM-Netzplänen häufig anzutreffen.

## Im Überblick: Graphen und Netzwerke

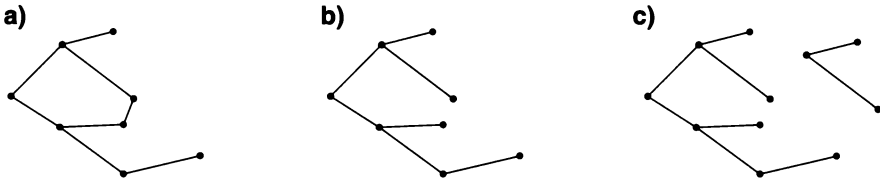
Ein einfacher **Graph** ist ein Diagramm, das aus **Ecken** (Punkten, Knoten) sowie im Allgemeinen aus **Kanten** besteht; zwei Ecken werden von höchstens einer Kante verbunden. Von besonderer Bedeutung unter den Graphen ist der **Baum**, das ist ein zusammenhängender Graph ohne Zyklus, d.h. ohne einen geschlossenen Kantenzug. Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Graph mit gerichteten Kanten, die durch Pfeile dargestellt werden. Ein **Netzwerk** ist ein Graph (auch ein gerichteter Graph) mit einer **Bewertung** jeder Kante durch eine Zahl, die **Länge** oder **Gewicht** der Kante heißt.

Zwei praktisch wichtige Optimierungsaufgaben in einem Netzwerk sind das Auffinden eines **Minimalnetzes** (minimaler aufspannender Baum des Netzwerkes) und der **kürzeste Weg von einer Ecke zu allen anderen Ecken**.

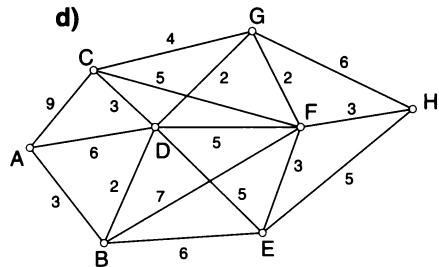
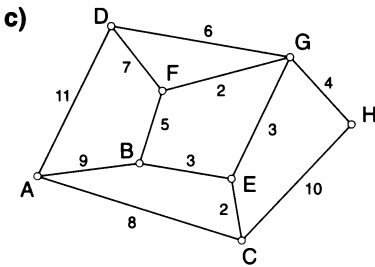
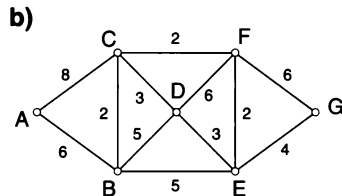
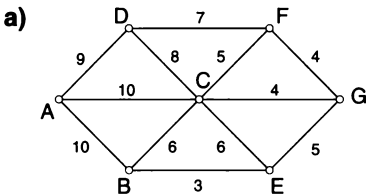
In der **Netzplantechnik** wird ein umfangreiches Projekt durch ein Netzwerk seiner Teilaufgaben oder **Vorgänge** dargestellt. Die **Mindestdauer** des Projektes ist der **zeitlängste Weg** im Netzwerk vom Anfang bis zum Ende. Grundsätzlich unterscheidet man zwei Arten von Netzplänen: die Vorgänge werden zum einen durch die gerichteten Kanten (Pfeile), zum anderen durch die Knoten des Netzwerks dargestellt.

**Aufgaben**

2.71 Ist der folgende Graph ein Baum?



2.72 Gegeben ist ein Netzwerk. Ermittle ein Minimalnetz (einen minimalen aufspannenden Baum) und bestimme seine Weglänge:



2.73 Ermittle die kürzesten Entfernungen aller Ecken von A im Netzwerk der Aufgabe

- a) 2.72 a), c) 2.72 c),  
 b) 2.72 b), d) 2.72 d).

2.74 A communication line that must reach each of the locations represented by vertices is to be laid so as to require a minimal cost. How should this be done? The cost of each connection is marked on the graph in Abb. 2.31.

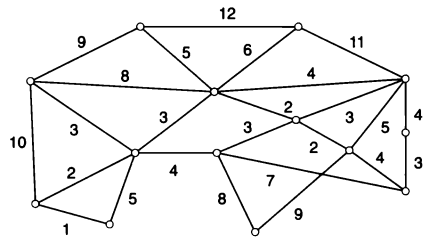


Abb. 2.31

2.75 Ein europäisches Unternehmen hat Niederlassungen in Berlin (Be), Brüssel (Br), London (L), Madrid (M), Paris (P), Stockholm (S), Wien (W) und Zürich (Z). Es möchte ein möglichst preiswertes Leitungsnetz für die Übertragung von Daten zwischen den genannten Städten aufbauen. Die folgende Tabelle gibt die Mietkosten (in 100 €) pro Monat an. Bestimme das geforderte Leitungsnetz.

	Be	Br	L	M	P	S	W
Z	23	20	22	21	23	31	15
W	21	21	25	26	25	30	
S	16	23	19	30	29		
P	19	12	15	18			
M	24	19	22				
L	22	20					
Br	14						

**2.76** Ein weltweit operierendes Unternehmen hat Filialen in sechs Städten A, B, C, D, E und F. Die folgende Tabelle gibt die Flugpreise (in €) für die Direktverbindungen zwischen diesen Städten (wenn vorhanden). Bestimme die preisgünstigste Verbindung aller Städte mit C.

	A	B	C	D	E
F	400	300	-	300	150
E	300	-	300	100	
D	350	250	150		
C	-	200			
B	400				

**2.77** Zeichne einen Netzplan entsprechend folgender Tabelle, die in der linken Spalte die Vorgänge und in der rechten Spalte die jeweiligen Vorläufer enthält (ohne Zeitdauer):

<b>a)</b> A -	<b>b)</b> A -	<b>c)</b> A -	<b>d)</b> A -	<b>e)</b> A -	<b>f)</b> A -
B -	B -	B A	B A	B A	B -
C A	C A	C B	C A	C B	C A, B
D C	D B	D A	D C	D -	D B

**2.78** Zeichne einen Netzplan entsprechend folgender Tabelle, die in der linken Spalte die Vorgänge und in der rechten Spalte die jeweiligen Vorläufer enthält (ohne Zeitdauer).

<b>a)</b> A -	<b>b)</b> A -	<b>c)</b> A -	<b>d)</b> A -	<b>e)</b> A -	<b>f)</b> A -
B A	B A	B -	B A, C	B A	B A
C B	C -	C A	C -	C A	C -
D C	D B, C	D C	D B	D B	D A, C
E A	E B	E A, B	E A	E B, C	E A, D

**2.79** Für den Bau eines Hauses sind folgende Vorgänge zu planen. Dazu sind die Vorläufer der Vorgänge und ihre Zeitdauer (in Tagen) angegeben. Bestimme den kritischen Weg und die minimale Projektdauer.

Vorgang	Vorläufer	Dauer
A Kellerbau	-	20
B Rohbau aufstellen	A	17
C Dachstuhl errichten	B	4
D Dach decken	C	3
E Installationen vornehmen	B	8
F Außen verputzen	D, E	5
G Innen verputzen	D, E	6
H Malerarbeiten	G	3
K Böden verlegen	H	7
L Türen und Fenster montieren	H	3
M Blitzschutz montieren	F	1

**2.80** Für ein Projekt sind folgende Vorgänge zu planen. Mit angegeben sind die Vorläufer der Vorgänge und ihre Zeitdauer (in Tagen). Bestimme den kritischen Weg und die minimale Projektdauer.

<b>a)</b> A - 12	<b>b)</b> A - 6	<b>c)</b> A - 9	<b>d)</b> A - 4
B A 8	B A 4	B - 12	B A 1
C B 8	C B 6	C A 3	C A 3
D C 10	D A 10	D C 1	D B 3
E A 13	E B 7	E F, B 6	E B 6
F C, E 8	F C, D 5	F A 10	F C 6
	G D 4	G F 5	G C 7
			H C 3
			K E, F 5
			L D, E, F 10
			M H 6

### 3 Unendliche Reihen

Unendliche Reihen werden dazu benützt, um Funktionen wie etwa die Sinusfunktion zu definieren und in jeder gewünschten Genauigkeit zu berechnen. Darüber hinaus werden durch "Reihenentwicklungen" einfache Ersatzfunktionen oder Näherungsformeln für gegebene Funktionen gewonnen. Die Reihenentwicklung einer Funktion ist auch eine besonders wirkungsvolle Methode bei der Lösung vieler Probleme. Grundlegend für die Behandlung unendlicher Reihen sind jene mit konstanten Gliedern.

#### 3.1 Unendliche Reihen mit konstanten Gliedern (Zahlenreihen)

In "Ingenieur-Mathematik 3", Seite 42 ff., wurde bereits ein sehr wichtiger Typ einer unendlichen Reihe, nämlich die unendliche *geometrische Reihe*, besprochen.

$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^n + \dots$  heißt **unendliche geometrische Reihe**.

Zwei Beispiele unendlicher geometrischer Reihen:

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad \text{b) } 3 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

Die Reihenglieder bilden eine geometrische Folge  $(a \cdot q^n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , d.h. jedes Reihenglied bis auf das erste ist ein bestimmtes gleich bleibendes Vielfaches  $q$  des vorangehenden.

Im Beispiel a) ist  $a = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$ , in b) ist  $a = 3$  und  $q = 0,1$ .

Addiert man fortgesetzt, so kommen etwa in Beispiel a) die Zwischensummen, auch **Teilsummen** oder **Partialsommen** genannt, der Zahl 2 beliebig nahe. *Daher* sagt man, dass 2 die **Summe** dieser unendlichen Reihe ist. Auf diese Weise erhielten wir den folgenden Satz:

#### Konvergenzsatz für unendliche geometrische Reihen:

Ist  $|q| < 1$ , so gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^n + \dots = \frac{a}{1 - q}$ .

Für  $|q| \geq 1$  besitzt die Reihe keine (endliche) Summe.

Somit gilt:

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{b) } 3 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots = \frac{3}{1 - 0,1} = \frac{3}{0,9} = \frac{10}{3}$$

Die unendliche Reihe wird üblicherweise in der Form  $3, \dot{3}$ , also als unendliche periodische Dezimalzahl, geschrieben.

In gleicher Weise definiert man eine allfällige Summe einer beliebigen unendlichen Reihe.

Die unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$  heißt **konvergent**, wenn die

Folge der Teilsummen  $s_1 = c_1, s_2 = c_1 + c_2, s_3 = c_1 + c_2 + c_3, \dots,$

$s_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n, \dots$  konvergiert.

Ihr Grenzwert  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  heißt **Summe** der unendlichen Reihe.

Man schreibt kurz:  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots = s$ .

Besitzt die Teilsummenfolge  $\langle s_n \rangle$  keinen Grenzwert, so heißt auch die Reihe **divergent**.

**Anmerkungen:**

- (1) Es ist unzulässig, bei einer unendlichen Reihe ohne vorherige Konvergenzuntersuchung von einer Summe zu sprechen. Siehe dazu den Trugschluss in "Ingenieur-Mathematik 3", Seite 43.
- (2) Die Indizierung der Reihenglieder beginnt in der Regel mit 1 oder 0. Sie kann aber auch mit einer anderen ganzen Zahl beginnen. Natürlich kann auch die Laufvariable statt mit  $n$  mit einem anderen Buchstaben bezeichnet werden.

**Beispiel 3.1 : Konvergenz von Reihen**

Untersuche, ob die folgende Reihe konvergent ist:

a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$
 Diese Reihe wird "harmonische Reihe" genannt.

c) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

**Lösung**

Zu a) Bei dieser Reihe können die Teilsummen wie bei der geometrischen Reihe explizit angegeben werden.

Man führt eine Teilbruchzerlegung durch: 
$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit  $n \cdot (n+1)$  führt auf

$$1 = A \cdot n + A + B \cdot n = (A + B) \cdot n + A$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:  $A + B = 0$  und  $A = 1$ . Daraus folgt  $B = -1$ .

Somit: 
$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
 für alle  $n \geq 1$ .

Damit kann man die  $n$ -te Teilsumme  $s_n$  der Reihe wie folgt schreiben:

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ , ist die Reihe konvergent und besitzt die Summe 1.

Zu b) Obwohl hier oft auf eine Summe meist unter 5 getippt wird, besitzt die Reihe doch keine Summe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{64} + \dots$$

$> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \quad > 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2} \quad > 32 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$

Man erkennt, dass die Teilsummen über alle Grenzen wachsen. Die harmonische Reihe ist daher divergent.

Zu c) Teilsummenfolge:  $s_1 = 1; s_2 = 1 - 1 = 0; s_3 = 1 - 1 + 1 = 1; s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0; \dots$   
Die Teilsummenfolge  $\langle s_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$  besitzt daher keinen Grenzwert. Die Reihe ist divergent.



Versucht man dagegen in der Reihe Klammern zu setzen, die bei ihrer Auflösung die vorgelegte Reihe ergeben, so erhält man konvergente Reihen:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1.$$

Bei *endlichen* Reihen ändert das Setzen oder das Auflösen von Klammern nicht den Summenwert. Dies gilt, wie dieses Beispiel zeigt, nicht allgemein bei unendlichen Reihen!

Die Reihe  $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots$ , alle  $c_n > 0$ , bei der aufeinander folgende Glieder verschiedene Vorzeichen haben, heißt **alternierende Reihe**.

*Beispiele:*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad (\text{"LEIBNIZ'sche Reihe"});$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots \quad (\text{eine geometrische Reihe}).$$

Ist  $s$  der Summenwert einer konvergenten Reihe und  $s_n$  ihre  $n$ -te Teilsumme, so nennt man  $s - s_n$  das  $n$ -te *Restglied*  $R_n$  dieser Reihe. Für alternierende Reihen kann allgemein eine Abschätzung des Restgliedes angegeben werden:  $|R_n| < |a_{n+1}|$ .  $R_n$  ist absolut kleiner als der Betrag des ersten weggelassenen Reihengliedes  $a_{n+1}$ .

Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$  heißt **absolut konvergent**, wenn auch die daraus gebildete Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = |c_1| + |c_2| + |c_3| + \dots + |c_n| + \dots$  konvergent ist.

*Anmerkungen:*

(1) Die alternierende Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} - \dots$  ist, wie sich später zeigen wird, konvergent. Sie ist jedoch nicht absolut konvergent, da durch Setzen der Absolutstriche die divergente harmonische Reihe entsteht.

(2) Absolut konvergente Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  haben die Eigenschaft, dass ihre Glieder beliebig umgeordnet werden können, ohne dass sich an der Konvergenz oder der Summe etwas ändert. Ist eine Reihe wie die harmonische Reihe zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent, so kann durch Umordnung von Reihengliedern die Reihensumme geändert werden. Es kann dadurch sogar jede beliebige Reihensumme erzeugt werden, sie kann auch divergent werden.

Da die Teilsummen nur selten in expliziter Form angegeben werden können, ist die Bestimmung der Summe einer unendlichen Reihe in der Regel schwierig. Man begnügt sich daher mit der Konvergenzprüfung durch gewisse **Konvergenzkriterien**. Es gibt eine Vielzahl davon; die folgenden werden ohne Herleitung angegeben.

**Notwendiges Konvergenzkriterium**  
 Erforderlich für die Konvergenz der Reihe  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$  ist, dass die Reihenglieder  $c_n$  eine *Nullfolge* bilden, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ .

Falls die Reihenglieder  $c_n$  keine Nullfolge bilden, ist die Reihe divergent. Dies bedeutet daher einen **Divergenz-Nachweis!**

Beispiele:

- (1)  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$  ist divergent;
- (2)  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$  ist divergent.

Bilden die Reihenglieder eine Nullfolge, so ist damit noch keine Konvergenz- oder Divergenzaussage möglich.

Beispiele:

- (1) Bei der harmonischen Reihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  bilden die Reihenglieder eine Nullfolge; die Reihe ist divergent.
- (2) Bei der geometrischen Reihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  bilden die Reihenglieder ebenfalls eine Nullfolge; die Reihe ist konvergent.

Oft erweist sich das folgende Konvergenzkriterium als geeignet, das die Beträge der Quotienten aufeinander folgender Reihenglieder untersucht.

**Quotientenkriterium:**

Gegeben ist die unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + c_{n+1} + \dots$

Ist  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ , so gilt:

- $g < 1 \Rightarrow$  die Reihe ist absolut konvergent;
- $g = 1 \Rightarrow$  keine Aussage möglich;
- $g > 1 \Rightarrow$  die Reihe ist divergent.

Dies bedeutet, dass die Glieder bei  $g < 1$  mindestens ebenso schnell klein werden wie die Glieder einer konvergenten geometrischen Reihe.

**Beispiel 3.2 : Quotientenkriterium**

Untersuche mit dem Quotientenkriterium, ob die folgende Reihe konvergent ist:

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$ ;
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ , die harmonische Reihe;
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{8}{27} + \frac{1}{4} + \frac{32}{125} + \dots$

**Lösung**

Zu a)  $c_n = \frac{1}{n!}$ ;  $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ .

Da die Reihenglieder positiv sind, können die Absolutstriche weggelassen werden. Dies ist auch bei den beiden folgenden Aufgaben der Fall.

$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{1}{n+1}$ ; da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ , ist die Reihe konvergent.

Zu b)  $c_n = \frac{1}{n}$ ;  $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ;  $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ .

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ , ist mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage über Konvergenz (oder Divergenz) möglich.

Diese Situation ist typisch bei der Anwendung von Konvergenzkriterien. Man versucht es dann mit einem anderen Konvergenzkriterium oder wie bei der harmonischen Reihe in Beispiel 3.1 b), Seite 83, mit anderen Überlegungen, es gibt kein Universalrezept zum Nachweis der Konvergenz oder Divergenz.

Zu c)  $c_n = \frac{2^n}{n^3}$ ;  $c_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}$ ;  $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2^{n+1} \cdot n^3}{2^n \cdot (n+1)^3} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \rightarrow 2 > 1$ .

Die Reihe ist daher divergent.

**LEIBNIZ<sup>5</sup>-Kriterium für alternierende Reihen**

Eine alternierende Reihe  $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots$ , alle  $c_n > 0$ , ist konvergent, wenn die Zahlen  $c_n$  eine *monoton* fallende Nullfolge bilden, d.h.  $c_{n+1} \leq c_n$  für alle  $n$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ .

**Beispiel 3.3 : LEIBNIZ-Kriterium**

Untersuche mit dem LEIBNIZ-Kriterium die Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$  ("LEIBNIZ'sche Reihe") auf Konvergenz.

**Lösung**

$c_n = \frac{1}{n}$ ;  $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ; da jedes die Reihenglied  $c_n$  kleiner als das unmittelbar nachfolgende Glied  $c_{n+1}$  ist und dabei  $c_n \rightarrow 0$ , ist die Reihe konvergent.

Im Folgenden sind für einige Zahlenreihen die Summen ohne Begründung angegeben:

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$                        $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e$                        $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$  (LEIBNIZ'sche Reihe)

<sup>5</sup> Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716), deutscher Mathematiker und Philosoph

## Im Überblick: Unendliche Reihen mit konstanten Gliedern (Zahlenreihen)

Eine unendliche Reihe mit der symbolischen Schreibweise

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$  wird als *Folge der Teilsummen*  $\langle s_n \rangle$ ,

$s_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$  definiert.  $c_n$  ist das  $n$ -te Reihenglied. Die unendliche Reihe heißt **konvergent**, wenn die Folge ihrer Teilsummen  $\langle s_n \rangle$  einen Grenzwert  $s$  besitzt. Dieser Grenzwert wird als **Summe** der Reihe bezeichnet. Besitzt  $\langle s_n \rangle$  keinen Grenzwert, so heißt die Reihe **divergent**.

Nicht alle Eigenschaften *endlicher* Reihen bleiben möglicherweise bei *unendlichen* Reihen erhalten. Von besonderer Bedeutung sind die **absolut konvergenten** Reihen, deren Reihenglieder beliebig umgeordnet werden dürfen.

**Konvergenzkriterien** können eine Entscheidung ermöglichen, ob eine unendliche Reihe konvergiert oder divergiert. Beispiele unter vielen sind das **Quotienten-** und das **LEIBNIZ'sche Kriterium**, letzteres für alternierende Reihen. Es gibt Reihen, deren Konvergenz (Divergenz) man mit dem einen Kriterium nicht nachweisen kann, wohl aber mit einem anderen. Das **notwendige Konvergenzkriterium** besagt, dass es für die Konvergenz einer Reihe notwendig ist, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden; ist dies nicht der Fall, so ist die Reihe divergent.

### Aufgaben

**3.1** Stelle fest, ob die folgende Reihe eine geometrische Reihe ist und bestimme gegebenenfalls ihre Summe:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$       b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}}$       c)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k}$       d)  $\sum_{m=0}^{\infty} 3 \cdot 10^{-m}$       e)  $\sum_{k=0}^{\infty} 5 \left(\frac{2}{3}\right)^k$

**3.2** Führe für die Teilsummen  $s_n$  der folgenden Reihe eine Partialbruchzerlegung durch und bestimme gegebenenfalls die Summe der Reihe:

a)  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \dots$

b)  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3m-2) \cdot (3m+1)} + \dots$

c)  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+4)} + \dots$

d)  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)} + \dots$

**3.3** Bilde die Teilsummenfolge  $\langle s_n \rangle$  der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots$  und überprüfe damit die Reihe auf Konvergenz.

**3.4** Untersuche das Grenzwertverhalten der Glieder der folgenden Reihe. Welche Aussage über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe ist möglich?

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

3.5 Untersuche die folgende Reihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums auf Konvergenz:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,5^n}{n^2}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$

k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{n!}$

3.6 Untersuche die folgende alternierende Reihe mit Hilfe des LEIBNIZ'schen Kriteriums auf Konvergenz:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

3.7 Bei einem Stapel aus  $n$  homogenen Ziegeln der Länge  $l$  (Abb. 3.1) sollen die Ziegel nach einer Seite hin so weit wie möglich verschoben werden, ohne dass der Stapel kippt (labiles Gleichgewicht wird noch zugelassen). Wie weit kann der Überhang  $w_n$  maximal werden, wenn genügend Ziegel vorhanden sind?

*Hinweis:* Nummeriere die Ziegel von oben nach unten durch. Der zweite Ziegel wird unter dem ersten Ziegel möglichst weit nach links verschoben, der dritte unter dem zweiten ebenso, usw.

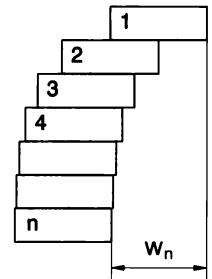


Abb. 3.1

Ist  $0,9 = 1$  oder doch nicht?

Fragt man so, lautet oft die Antwort "Ich glaube, es fehlt noch etwas auf 1" oder ähnlich. Rechnet man formal, so kommt man schnell zu einer Antwort:

$0,9 = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots$  ist eine unendliche geometrische Folge mit dem Anfangsglied  $a = 0,9$  und dem Quotienten  $q = \frac{1}{10} = 0,1$ . Da  $q < 1$ , besitzt diese Reihe eine Summe (Seite 82):

$$0,9 = \frac{a}{1-q} = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

Die Rechnung bejaht also die eingangs gestellte Frage. Vielleicht misstraut man der Rechnung und will trotzdem weiter festhalten, dass  $0,9 < 1$  ist, nämlich gleich einer Zahl  $s < 1$ . Man kommt aber schnell auf einen Widerspruch. Jede noch so nahe bei 1 liegende Zahl  $s$  wird von  $0,9999\dots 9$  übertroffen, wenn die Anzahl der Neuner hinter der Null groß genug ist. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als die Richtigkeit von  $0,9 = 1$  anzuerkennen. Die Schwierigkeit entsteht, weil unser Alltagsdenken  $0,9$  als Prozess und nicht als Ergebnis empfindet.

## 3.2 Potenzreihen

Die Reihenglieder müssen nicht konstant sein, sie können auch Funktionen einer Variablen sein. Von großer Bedeutung sind dabei die Potenzreihen, da sie besonders einfach zu handhaben sind und vielseitig angewendet werden können.

Eine Reihe der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$  heißt **Potenzreihe**. Die Zahlen  $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe.

*Beispiele:*

- (1) Ein einfaches Beispiel einer Potenzreihe ist die geometrische Reihe  $1 + q + q^2 + \dots$ , wenn man  $q$  nicht als feste Zahl, sondern als Variable auffasst und dann wie üblich mit  $x$  bezeichnet:  $1 + x + x^2 + \dots$ . Ihre Koeffizienten  $a_n$  sind gleich 1 für alle  $n$ . Die geometrische Reihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$ , d.h. im Intervall  $] -1, 1[$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

- (2) Die Potenzreihe  $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$  besitzt die Koeffizienten  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{6}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{120}, a_6 = 0, a_7 = -\frac{1}{5040}, \dots$

Die geometrische Reihe  $1 + x + x^2 + \dots$  konvergiert in einem symmetrisch zu 0 liegendem Intervall. Dies ist ganz typisch für das Konvergenzverhalten einer *beliebigen* Potenzreihe. Allgemein lässt sich Folgendes beweisen:

Jede **Potenzreihe konvergiert** entweder nur für  $x = 0$  oder für alle Werte  $x$  oder es gibt eine Zahl  $r$ , sodass die Reihe für  $|x| < r$  absolut konvergiert und für  $|x| > r$  divergiert.  $r$  heißt **Konvergenzradius**.

Es gilt:  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ , wenn die Quotienten bildbar und der Grenzwert vorhanden ist.

Der Konvergenzbereich ist also (bis auf die Randstellen  $x = -r$  und  $x = r$ ) ein symmetrisch zu 0 gelegenes Intervall (Abb. 3.2), sofern er nicht nur  $x = 0$  oder die ganze Zahlengerade umfasst. Ob in den Randpunkten Konvergenz oder Divergenz besteht, ist fallweise zu entscheiden. Die Formel für den Konvergenzradius folgt aus dem Quotientenkriterium.

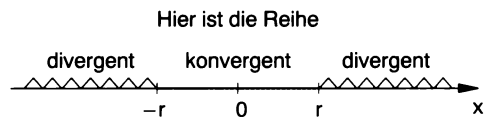


Abb. 3.2

### Beispiel 3.4 : Konvergenzradius

Ermittle den Konvergenzradius der Potenzreihe

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^n = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^3 + \dots$

**Lösung**

Zu a)  $a_n = 1$ ;  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$ .

Zu b)  $a_n = \frac{1}{n!}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ ,  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1} = \infty$ ;  
 dies bedeutet, dass die Potenzreihe für alle  $x$  konvergent ist.

Zu c)  $a_n = \frac{n}{2^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ ,  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} = 2$ .

Potenzreihen sind einfach handzuhaben. Es gilt, wie man zeigen kann:

Mit konvergenten Potenzreihen können die **gleichen elementaren Rechenoperationen** (Additionen, Multiplikationen, ...) vorgenommen werden wie mit **endlichen Summen**.  
 Konvergente Potenzreihen können **gliedweise differenziert** und **integriert** werden. Die neue Potenzreihe hat den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche.

**Beispiele für die Anwendung von Potenzreihen:**

- Berechnung von Funktionswerten
- Aufstellen von Näherungsformeln
- Integration nach Potenzreihenentwicklung
- Auswerten von unbestimmten Ausdrücken
- Definition von speziellen Funktionen

**Wie kommt man zu Potenzreihen?**

Wir wissen, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ . Das bedeutet aber, dass die Funktion

$f(x) = \frac{1}{1-x}$  in eine Potenzreihe "entwickelt" wurde. Damit stellt sich aber die Frage, wie eine vorgegebene Funktion  $f(x)$  in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Allgemein wird die Potenzreihe das Aussehen haben:  $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots$

Wir müssen nun die unbekanntenen Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  bestimmen. Eine viel verwendete Methode zur Potenzreihenentwicklung einer Funktion verwendet die Ableitungen  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots \\ f'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + \dots \\ f''(x) &= 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot x^2 + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot x + \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten ergeben sich nun einfach, wenn man in diesen Gleichungen  $x = 0$  setzt.

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 && \text{oder} && a_0 = f(0), \\ f'(0) &= a_1 && \text{oder} && a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \\ f''(0) &= 2 \cdot a_2 && \text{oder} && a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \\ f'''(0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 && \text{oder} && a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}. \end{aligned}$$

Allgemein erkennt man daraus, dass  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

Damit erhält man die

**TAYLOR<sup>6</sup>-Reihe einer Funktion  $f(x)$ :**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

*Anmerkungen:*

- (1) Notwendig für das Aufstellen der Taylor-Reihe einer Funktion  $f(x)$  ist, dass  $f(x)$  um die Stelle  $x = 0$  beliebig oft differenzierbar ist.
- (2) Man sagt, dass man die Funktion an der Stelle  $x = 0$  in eine Potenzreihe entwickelt. Die allgemeine Form der Taylor-Reihe sieht eine Entwicklung auch an einer von null verschiedenen Stelle  $x_0$  vor. Die angegebene Form ist damit ein Spezialfall einer Taylor-Reihe und wird oft auch als **MACLAURIN<sup>7</sup>-Reihe** bezeichnet.
- (3) Die Taylor-Reihe konvergiert trivialerweise für  $x = 0$  gegen  $f(0)$ . Anderenfalls ist die Konvergenz sowie auch  $f(x)$  als Summenfunktion nicht sicher garantiert. Genaueres dazu erfordert Kenntnisse aus der Theorie komplexer Funktionen. Wir betrachten jedoch im Folgenden nur Funktionen, die sich "gutartig" verhalten und gegen  $f(x)$  konvergieren.
- (4) Jede konvergente Potenzreihe ist eine Taylor-Reihe, nämlich die ihrer Summenfunktion.
- (5) Die Teilsummen  $s_n(x)$  der Taylor-Reihe sind *einfache Polynomfunktionen*. Sie werden auch **Taylor-Polynome** genannt. Abbruch der Taylor-Reihe nach dem linearen Glied in  $x$  bedeutet die *Linearisierung* der Funktion an der Stelle 0, also das Ersetzen der Funktion durch ihre Tangente an dieser Stelle.  
Das Ersetzen der Funktion  $f(x)$  durch das Taylorpolynom  $s_n(x)$  vom Grad  $n$  bedeutet, dass der Funktionswert und alle Ableitungen bis hin zur  $n$ -ten von  $f(x)$  und  $s_n(x)$  an der Stelle 0 übereinstimmen.  
Daher wird auch ein Abnehmen der Güte der Näherung von  $f(x)$  durch eine Taylor-Polynom  $s_n(x)$  verständlich, je weiter man sich von der Stelle 0 entfernt. Umgekehrt heißt dies, dass zum Erreichen einer höheren Genauigkeit weitere Glieder der Reihe dazugenommen werden müssen.
- (6) Gerade Funktionen  $f(x)$  besitzen in ihrer Reihenentwicklung nur gerade Potenzen von  $x$ , ungerade Funktionen nur ungerade Potenzen.

**Beispiel 3.5 : Potenzreihenentwicklung einer Funktion**

- a) Entwickle die Funktion  $f(x) = \sin x$  und bestimme  $\sin 30^\circ$  auf vier Nachkommastellen genau.
- b) Entwickle  $f(x) = \cos x$  in eine Potenzreihe.

**Lösung**

Zu a)

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = 1$

usw.

<sup>6</sup> Brook TAYLOR (1685 – 1731), englischer Mathematiker

<sup>7</sup> Colin MACLAURIN (1698 – 1746), schottischer Mathematiker



Da die vierte Ableitung wieder gleich  $f(x)$  ist, wiederholen sich danach die Ableitungen.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} \cdot x^5 + \dots =$$

$$= 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \dots$$

Damit ergibt sich die Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \dots$$

Dies ist auch die eigentliche Definition des Sinus einer Zahl, aus der alle Eigenschaften der Sinusfunktion wie Periodizität, Wertebereich usw. herleitbar sind. Beachte, dass diese Reihenentwicklung nur gültig ist, wenn der Winkel  $x$  im Bogenmaß gegeben ist. Denn dies war Voraussetzung, dass  $f'(x) = \cos x$ , usw. Würde  $x$  im Gradmaß zu nehmen sein, müsste man in der Reihe  $x$  durch  $\frac{x \cdot \pi}{180}$  ersetzen, wodurch die Reihe nicht mehr ihre einfache Form behalten würde.

$$s_1(x) = x$$

$$s_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$s_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$s_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

$$s_9(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$$

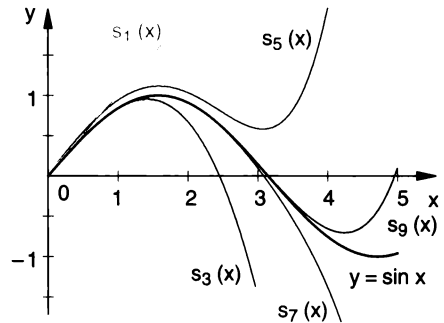


Abb. 3.3

Abb. 3.3 zeigt die Graphen der Sinusfunktion sowie deren Taylor-Polynome  $s_1(x)$ ,  $s_3(x)$ ,  $s_5(x)$ ,  $s_7(x)$  und  $s_9(x)$ . Die Graphen der Taylor-Polynome schmiegen sich umso mehr der Sinuskurve an, je höher ihr Grad ist. Betrachtet man den Graphen eines bestimmten Taylor-Polynoms, so erkennt man, dass die Näherung mit zunehmender Entfernung von der Entwicklungsstelle immer schlechter wird.

Ist  $x$  deutlich kleiner als 0,5 (im Gradmaß etwa  $30^\circ$ ), so wird bereits das Glied  $-\frac{x^3}{6}$  so klein, dass es unbedeutend wird:

x	$s_1(x) = x$	$\sin x$	Prozentueller Fehler
0,1	0,1	0,0998	0,17%
0,2	0,2	0,1987	0,67%
0,3	0,3	0,2955	1,52%

Man erhält daher die bekannte Näherungsformel  $\sin x \approx x$  für betragsmäßig kleine Winkel  $x$  im Bogenmaß.

Bestimmung von  $\sin 30^\circ$ , dessen genauer Wert gleich  $\frac{1}{2}$  ist:  $x = 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$ .

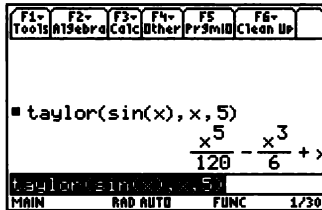
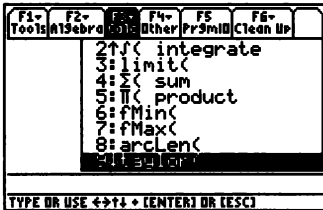
x	$s_1(x) = x$	$s_3(x) = s_1(x) - \frac{x^3}{6}$	$s_5(x) = s_3(x) + \frac{x^5}{120}$	$s_7(x) = s_5(x) - \frac{x^7}{5040}$
$\frac{\pi}{6}$	0,523599	0,499674	0,500002	0,500000

Mit der Näherung  $s_5(x)$  ist die gewünschte Genauigkeit erreicht. Damit ist grundsätzlich eine Möglichkeit zur Berechnung von Funktionswerten aufgezeigt.

Zu b) Die Kosinusreihe kann ebenfalls durch Aufstellen der Taylor-Reihe gefunden werden. Einfacher geht man vor, wenn man die Sinus-Reihe gliedweise ableitet:

$$\cos x = (\sin x)' = \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

TI  
89



MC

**n-tes Taylorpolynom einer Funktion:**

Anklicken des Schlüsselwortes *reihe* in der Symbolik-Palette. Im ersten Platzhalter wird der Funktionsterm, im zweiten die Entwicklungsvariable und nach einem Beistrich  $n + 1$  für das  $n$ -te Taylorpolynom eingegeben. Die Angabe für den Polynomgrad kann entfallen; in diesem Fall wird bis zum Grad 5 entwickelt.

$$\sin(x) \text{ reihe, } x, 8 \rightarrow 1 \cdot x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7.$$

### Beispiel 3.6 : Weitere Potenzreihenentwicklungen

Entwickle folgende Funktion in eine Potenzreihe a)  $f(x) = e^x$ , b)  $f(x) = \ln(1 + x)$ .

**Lösung**

$$\begin{aligned} \text{Zu a) } f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot x^4 + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Somit gilt die Reihenentwicklung:  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Daraus kann etwa die Zahl  $e = e^1$  berechnet werden.

Zu b) Da  $\ln 0$  nicht gebildet werden kann, wird statt der Logarithmusfunktion  $y = \ln x$  die Funktion  $f(x) = \ln(1 + x)$  an der Stelle 0 in eine Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1 + x)^2} & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1 + x)^3} & f'''(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{3 \cdot 2}{(1 + x)^4} & f^{(4)}(0) &= -3! \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Damit:  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Diese Reihe konvergiert für  $-1 < x \leq 1$ . Setzt man  $x = 1$ , so erhält man die LEIBNIZ-Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , deren Summe somit  $\ln 2$  beträgt.

#### Approximation von Funktionen:

Ein TAYLOR-Polynom nähert eine Funktion gut in der Nähe der Entwicklungsstelle 0, weiter weg ist die Näherung schlechter. In Rechnern werden daher Funktionen meist durch Polynome ersetzt, die eine *gleich bleibend* gute Näherung über einen bestimmten x-Bereich geben. Hier sind besonders Reihen mit so genannten TSCHEBYSCHEFF-Polynomen zu erwähnen, mit denen viele elementare Funktionen auf Computern berechnet werden.

Eine Approximation von Funktionen kann auch durch eine **Polynominterpolation** erfolgen. Eine Polynominterpolation bedeutet, dass die zu nähernde Funktion  $f(x)$  durch ein Polynom  $n$ -ten Grades ersetzt wird, das an  $n + 1$  vorgeschriebenen Stellen mit  $f(x)$  übereinstimmt. Dabei erweist es sich aber als zweckmäßiger, den Polynomgrad  $n$  nicht zu hoch zu wählen. Man nimmt dafür mehrere Interpolationspolynome und setzt aus diesen die Näherung stückweise zusammen. Man erhält eine **Spline-Funktion** (siehe "Ingenieur-Mathematik 3", Seite 307 ff).

Schließlich stellt es sich heraus, dass man mit **rationalen Funktionen**  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P(x)$  und  $Q(x)$  Polynome, oft mit geringerem Rechenaufwand bessere Näherungen erzielen kann als mit Polynomen.

#### Beispiel 3.7 : EULER'sche Formel

Beweise die EULER'sche Formel  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$

#### Lösung

Die Reihenentwicklung  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  gilt auch für komplexe Argumente.

Tatsächlich wird durch diese Reihe die Exponentialfunktion im Reellen und im Komplexen *definiert*.

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + \frac{j\varphi}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \dots = \\ &= 1 + j\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Da diese Reihe absolut konvergent ist, kann beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich dabei die Reihensumme ändert. Wir fassen den Realteil und den Imaginärteil zusammen:

$$e^{j\varphi} = \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) + j \cdot \left( \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right) = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi.$$

Die folgende Tabelle zeigt die Potenzreihenentwicklung einiger wichtiger Funktionen:

Funktion	Potenzreihe	Konvergenz
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$	$ x  < 1$
$\frac{1}{(1+x)^2}$	$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$	$ x  < 1$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots$	$ x  < 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \dots$	$ x  < 1, x \neq -1$
$(1+x)^n$	$1 + \binom{n}{1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \binom{n}{3} \cdot x^3 + \binom{n}{4} \cdot x^4 + \dots$ <i>Binomische Reihe; sie bricht ab und wird zum binomischen Lehrsatz, wenn n eine natürliche Zahl ist.</i>	$ x  < 1$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$	alle x
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$	alle x
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$	$ x  < \frac{\pi}{2}$
$e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	alle x
$\ln(1+x)$	$\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$	$ x  < 1, x \neq -1$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2 \cdot \left( \frac{x^1}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \right)$	$ x  < 1$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \dots$	$ x  < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin x$	$ x  < 1$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$	$ x  \leq 1$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$	alle x
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$	alle x
$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \dots$	$ x  < \frac{\pi}{2}$



### Beispiel 3.9 : Integration durch Potenzreihenentwicklung

Berechne das Integral  $G(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$  nach vorangegangener Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe.

#### Lösung

Der Integrand  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  ist die Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung; sein Graph ist eine Gauß'sche Glockenkurve. Die Berechnung dieses Integrals ist von großer Bedeutung, die Integration ist jedoch in geschlossener Form nicht möglich.

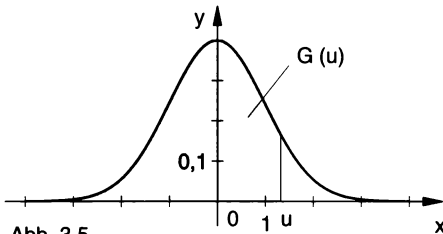


Abb. 3.5

Aus der Statistik ist bekannt, dass der Flächeninhalt unter jeder Dichtefunktion gleich 1 ist. Damit ist die Fläche bis 0 gleich 0,5. Somit ist

$$G(u) = 0,5 + \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \text{ und wir können}$$

die Integration auf das Intervall  $[0, u]$  beschränken.

Unter Verwendung der Reihe  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  ergibt sich nach Ersetzen von  $x$  durch  $-\frac{x^2}{2}$  in dieser Reihe:

$$\begin{aligned} G(u) &= 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} - \frac{x^6}{8 \cdot 3!} + \frac{x^8}{16 \cdot 4!} - \dots \right) dx = \\ &= 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - \dots \right]_0^u = \\ &= 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left( u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{40} - \frac{u^7}{336} + \frac{u^9}{3456} - \dots \right). \end{aligned}$$

Damit berechnet man etwa  $G(1) = 0,8413$ .

### Beispiel 3.10 : Auswertung eines unbestimmten Ausdrucks

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = ?$$

#### Lösung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left( x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots \right) = 1.$$

### Im Überblick: Potenzreihen

Der einfachste Fall einer Reihe, deren Glieder nicht konstant sind, ist durch eine **Potenzreihe** gegeben; ihre Glieder sind von der Form  $a_n \cdot x^n$ . Eine Potenzreihe **konvergiert absolut** in einem symmetrisch um 0 gelegenen Intervall  $]-r, r[$ .  $r$  heißt **Konvergenzradius**. Außerhalb dieses Intervalles ist die Potenzreihe (abgesehen möglicherweise von den Randstellen) **divergent**. Der Konvergenzradius  $r$  kann auch null sein oder über alle Schranken wachsen, d.h. " $r = \infty$ ".

Mit konvergenten Potenzreihen kann in vieler Hinsicht **gleich einfach** umgegangen werden wie mit **Polynomfunktionen**. Sie dürfen gliedweise differenziert und integriert werden. Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich gliedweise addiert, subtrahiert oder multipliziert werden.

Unter gewissen Voraussetzungen ist es möglich, eine gegebene **Funktion in eine Potenzreihe zu "entwickeln"**. Bricht man die Potenzreihe ab, so erhält man eine einfache Polynomfunktion (lineare Funktion, quadratische Funktion, ...) als Näherungsfunktion. Potenzreihenentwicklungen von Funktionen erweisen sich als sehr nützlich bei der Lösung vieler Probleme.

Ist die Funktion  $f(x)$  an der Stelle 0 definiert und existieren um  $x = 0$  alle Ableitungen, so ist eine notwendige Voraussetzung erfüllt, dass  $f(x)$  als **TAYLOR-Reihe** darstellbar ist. Sie stellt eine viel verwendete Möglichkeit dar, eine Funktion in eine Potenzreihe zu entwickeln.

## Aufgaben

**3.8** Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihe:

a)  $10x + 10^2 x^2 + 10^3 x^3 + \dots$

b)  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

c)  $x - \frac{x^2}{2 \cdot 10} + \frac{x^3}{3 \cdot 10^2} - \frac{x^4}{4 \cdot 10^3} + \dots$

d)  $1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \dots$

e)  $\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$

f)  $1 + 2^1 x^2 + 2^2 x^4 + 2^3 x^6 + \dots$

**3.9** Entwickle in eine Potenzreihe:

a)  $f(x) = \tan x$

b)  $f(x) = \sinh x$

c)  $f(x) = \cosh x$

d)  $f(x) = \arctan x$

e)  $f(x) = \sqrt{1+x}$

f)  $f(x) = \sqrt{2+x}$

g)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

h)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

**3.10** Zur Berechnung der natürlichen Logarithmen kann die Reihenentwicklung für  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  verwendet werden. Durchläuft nämlich  $x$  das Intervall von  $-1$  bis  $+1$  (die Randstellen ausgenommen), dann durchläuft  $\frac{1+x}{1-x}$  die positiven Zahlen. Bestimme damit  $\ln 2$ .

**3.11** Bestimme die Potenzreihen folgender Funktion durch gliedweise Multiplikation bis zum Glied der Ordnung 4:

a)  $f(x) = e^{-x} \cdot \sin 3x$

b)  $f(x) = \sin^2 x$

c)  $f(x) = \cos^2 x$

d)  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1+x^2}$

**3.12** Zeige die Richtigkeit der folgenden Näherung:

a)  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

b)  $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$

c)  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$

d)  $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{3}$

e)  $t \cdot \sin 2t \approx 2t^2$

f)  $\sin^2 \frac{t}{3} \approx \frac{t^2}{9}$

g)  $e^{-t} \cdot \cos 2t \approx 1 - t$

h)  $\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{1+2x}} \approx 1 - \frac{3}{2}x$

- 3.13** Die barometrische Höhenformel  $p = p_0 \cdot e^{-h/H}$  mit  $p_0 = 1013$  mbar und  $H = 7991$  m gibt den Luftdruck in einer Höhe  $h$  über dem Meeresniveau an. Gib eine lineare Näherung für  $p$  in Abhängigkeit von  $h$  an. Bis zu welcher Höhe ist die Abweichung der Näherungsformel höchstens 5% ?
- 3.14** Bauteile mögen eine exponential verteilte Lebensdauer mit der mittleren Lebensdauer  $T$  haben. Dann ist die Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass ein Bauteil während der Prüfzeit  $t$  ausfällt, gleich  $1 - e^{-t/T}$ . Ist die Prüfzeit  $t$  klein gegen  $T$ , so kann  $p$  linear genähert werden. Wie lautet diese Näherungsformel?
- 3.15** Für die Resonanzkreisfrequenz eines elektrischen Reihenschwingkreises mit der Induktivität  $L$  und der Kapazität  $C$  gilt  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ . Wird die Kapazität geringfügig von  $C$  auf  $C + x$  geändert, so ändert sich die Resonanzkreisfrequenz auf  $\frac{1}{\sqrt{L \cdot (C + x)}}$ . Ermittle für diesen Term bei  $L = 0,2$  H und  $C = 50 \mu\text{F}$  eine lineare Näherungsformel. Bestimme sodann mit der genauen Formel und mit der Näherungsformel die Resonanzkreisfrequenz, wenn  $x = 2 \mu\text{F}$  ist.

- 3.16** Der Pfeiler einer Brücke (Abb. 3.6) mit der Höhe  $h$  verschiebt sich um die Strecke  $a$  seitlich. Zeige, dass für die Senkung der Brücke näherungsweise gilt:  $s \approx \frac{a^2}{2h}$ .

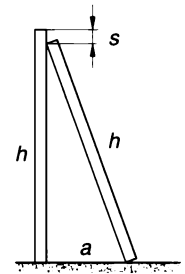


Abb. 3.6

- 3.17** Nach der Relativitätstheorie ist die kinetische Energie eines Körpers mit der Ruhemasse  $m_0$  und der Geschwindigkeit  $v$  gegeben durch  $E_{\text{kin}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - x^2}} - m_0 c^2$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $x = \frac{v}{c}$  ist. Zeige, dass  $E_{\text{kin}}$  für kleine Geschwindigkeiten  $v$ , d.h.  $x \ll 1$ , in die bekannte Formel  $E_{\text{kin}} = \frac{m_0 v^2}{2}$  übergeht.

- 3.18** Für den Flächeninhalt eines Kreissegments gilt  $A = \frac{1}{2} r^2 \cdot (\alpha - \sin \alpha)$ , wenn  $\alpha$  der Mittenwinkel im Bogenmaß ist. Zeige, dass folgende Näherungsformel gilt:

$$A \approx \frac{1}{12} r^2 \alpha^3 \left(1 - \frac{\alpha^2}{20}\right).$$

- 3.19** Bei einem sphärischen Hohlspiegel (Abb. 3.7) mit dem Mittelpunkt  $M$  und Brennpunkt  $F$  gilt für den Abstand  $\overline{FM} = \frac{r}{2 \cos \alpha}$ , wie man geometrisch überlegen kann. Welche Näherungsformel erhält man für diesen Abstand für kleine Einfallswinkel  $\alpha$ ?

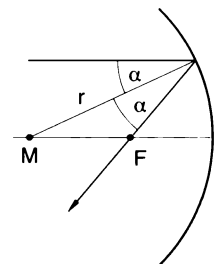


Abb. 3.7

- 3.20** Für die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit  $c$  in Luft gilt die Gleichung  $c = 331,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273,15 \text{ } ^\circ\text{C}}}$ , wobei  $\vartheta$  die Lufttemperatur in  $^\circ\text{C}$  ist. Leite eine lineare Näherungsformel für  $c$  ab. Wie groß ist der Fehler bei  $\vartheta = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$ ?



**3.21** Ein Leitungsseil (Abb. 3.8) ist in einer Höhe  $h = 8,0$  m auf zwei Masten befestigt, die voneinander einen Abstand  $2s = 50,0$  m haben. Der größte Seildurchhang ist  $d = 1,5$  m. Die Seilkurve ist durch  $y = f(x) = a \cdot \cosh \frac{x}{a} + b$  gegeben. Die Größe  $a$  kann näherungsweise bestimmt werden, wenn  $f(x)$  durch eine quadratische Funktion ersetzt wird.

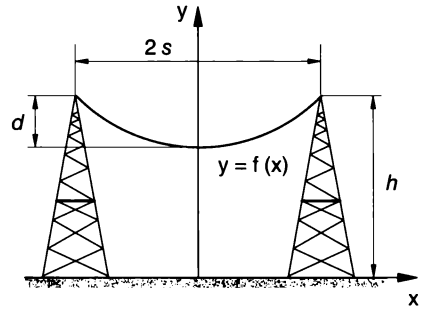


Abb. 3.8

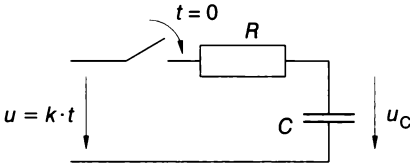


Abb. 3.9

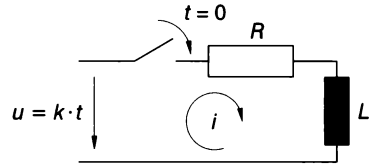


Abb. 3.10

**3.22** In einem  $RC$ -Glied (Abb. 3.9) wird zur Zeit  $t = 0$  s der Schalter geschlossen, wodurch eine lineare Spannung (Rampenspannung)  $u = k \cdot t$  anliegt. Für die Spannung  $u_C$  am Kondensator gilt:  $u_C = k \cdot [t - \tau \cdot (1 - e^{-t/\tau})]$ . Zeige durch Abbruch der Taylor-Reihe für  $u_C$ , dass  $u_C$  anfänglich fast quadratisch mit der Zeit  $t$  ansteigt. Führe die Rechnung, wenn die Zeitkonstante  $\tau = RC = 0,5$  s und  $k = 5$  Vs $^{-1}$  ist.

**3.23** In einem  $RL$ -Glied (Abb. 3.10) wird zur Zeit  $t = 0$  s der Schalter geschlossen, wodurch eine lineare Spannung (Rampenspannung)  $u = k \cdot t$  anliegt. Für die Stromstärke im Kreis gilt:  $i = \frac{k}{R} \cdot [t + \frac{L}{R} \cdot (e^{-Rt/L} - 1)]$ . Zeige durch Abbruch der Taylor-Reihe für  $i$ , dass  $i$  anfänglich fast quadratisch mit der Zeit  $t$  ansteigt. Führe die Rechnung aus, wenn  $R = 5 \Omega$ ,  $L = 0,5$  H und  $k = 5$  Vs $^{-1}$  ist.

**3.24** Bestimme den folgenden Grenzwert mit Hilfe einer Reihenentwicklung:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{-x}}{1 - e^{2x}}$

**3.25** Berechne das folgende Integral nach vorhergegangener Reihenentwicklung:

a)  $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  (Integralsinus)      b)  $\int_0^x \sqrt{1 + t^3} dt$       c)  $\int_0^x \frac{e^t}{1 + t} dt$       d)  $\int_0^x \cos \sqrt{t} dt$

### 3.3 Fourier-Reihen

Periodische Vorgänge spielen in der Natur eine große Rolle. Sie treten in Form von Schwingungen und Wellen vielfach auf. Ihre Beschreibung erfolgt durch periodische Funktionen. Die fundamentalen periodischen Funktionen sind die Sinusfunktionen, die oft auch als harmonische Funktionen bezeichnet werden. Es kann als eine der Grundaufgaben der Analysis bezeichnet werden, eine beliebige periodische Funktion durch eine Reihe von Sinusfunktionen (hier sind auch die Kosinusfunktionen eingeschlossen) darzustellen.

Die Überlagerung (Addition) zweier Sinusschwingungen *gleicher* Frequenz ist wieder eine Sinusschwingung dieser Frequenz ("Ingenieur-Mathematik 2", Seite 157 f). In Abb. 3.11 ist die Überlagerung zweier Sinusschwingungen *ungleicher* Frequenz dargestellt. Es ergibt sich eine periodische Funktion.

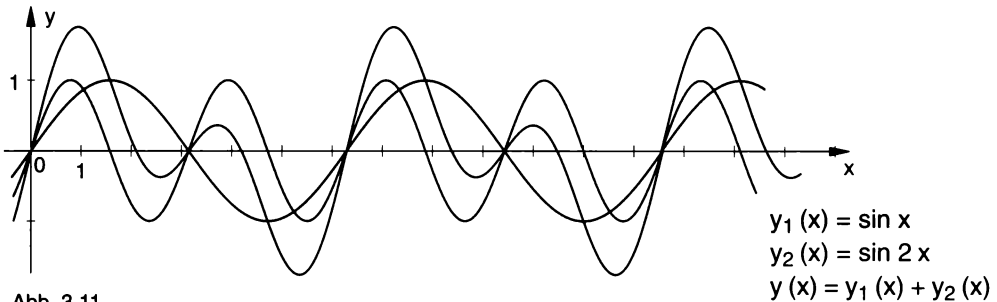


Abb. 3.11

Die periodische Funktion  $y(x)$  in Abb. 3.11 ist umgekehrt als Summe von Sinusfunktionen darstellbar. Es stellt sich nun die Frage, ob man möglicherweise eine beliebige vorgegebene periodische Funktion als Summe von Sinusfunktionen darstellen kann. FOURIER<sup>8</sup> hat gezeigt, dass dies unter sehr allgemeinen Voraussetzungen für die periodische Funktion immer der Fall ist. Wir betrachten zuerst  $2\pi$ -periodische Funktionen und danach allgemein  $T$ -periodische Funktionen.

Sei  $f(x)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Ist das Periodenintervall  $[0, 2\pi]$  in endlich viele Teilintervalle zerlegbar, in denen  $f(x)$  sowohl stetig als auch monoton ist, dann kann diese Funktion in eine so genannte **Fourier-Reihe** zerlegt werden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  heißen **Fourier-Koeffizienten**.

*Anmerkungen:*

- (1) Es gibt viele hinreichende Bedingungen für die Konvergenz einer Fourier-Reihe gegen  $f(x)$ . Hier ist die so genannte DIRICHLET'sche<sup>9</sup> Bedingung angeführt.
- (2) Das konstante Glied  $\frac{a_0}{2}$  hat keinen Einfluss auf die Periodizität; es bedeutet nur ein Verschieben der Reihe in  $y$ -Richtung. Dass dieses in der Form  $\frac{a_0}{2}$  statt  $a_0$  angesetzt wird, erklärt sich später.

<sup>8</sup> Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768–1830), französischer Physiker und Mathematiker

<sup>9</sup> Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805–1859), deutscher Mathematiker

- (3) An einer Unstetigkeitsstelle (endlichen Sprungstelle) konvergiert die Fourier-Reihe gegen das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes an dieser Stelle.
- (4) Die angegebene Form der Fourier-Reihe wird als **Sinus-Kosinus-Form** bezeichnet. In der Reihe treten jeweils Summen von Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Frequenz auf:  $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ . Da auch die Kosinusfunktion eine Sinusfunktion ist und die beiden Sinusfunktionen gleiche Frequenz haben, ist ihre Summe wieder eine Sinusfunktion der gleichen Frequenz:

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = A_n \sin(nx + \varphi_n) \text{ mit } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ und } \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

$A_n$  ist ihre *Amplitude* und  $\varphi_n$  ihre Phasenlage (auch Nullphasenwinkel oder kurz Phase). Aus diesem Grund kann die Fourier-Reihe einer Funktion  $f(x)$  nach Umordnung auch in der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \varphi_1) + A_2 \sin(2x + \varphi_2) + A_3 \sin(3x + \varphi_3) + \dots$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) + \dots \text{ mit } A_0 = \frac{a_0}{2}$$

geschrieben werden. Wir sprechen nun von der **Amplituden-Phasenform** der Fourier-Reihe von  $f(x)$ . Man nennt weiters:

- $A_1 \sin(x + \varphi_1)$     **1. Harmonische** oder **Grundschiwingung**; sie besitzt die *gleiche* Frequenz wie die periodische Funktion  $f(x)$ .
- $A_2 \sin(2x + \varphi_2)$     **2. Harmonische** oder **1. Oberschiwingung**; sie besitzt die *doppelte* Frequenz der Grundschiwingung.
- $A_3 \sin(3x + \varphi_3)$     **3. Harmonische** oder **2. Oberschiwingung**; sie besitzt die *dreifache* Frequenz der Grundschiwingung.

usw.

Die  $n$ -te Harmonische wird auch Teilschiwingung der **Ordnung**  $n$  genannt. Die Entwicklung einer periodischen Funktion als Fourier-Reihe heißt **harmonische Analyse** oder **Fourier-Analyse**.

Abb. 3.12 zeigt eine physikalische Fourier-Analyse: Weißes Licht wird durch ein Prisma nach Frequenzen in sein Spektrum zerlegt.

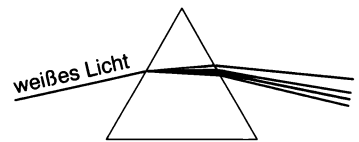


Abb. 3.12

- (5) Die Gesamtheit der Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  oder der Werte  $A_n$  und  $\varphi_n$  definiert die periodische Funktion  $f(x)$  vollständig! Sie wird **Spektrum** von  $f(x)$  genannt. Graphisch werden diese Werte über dem Laufindex oder den zugehörigen Kreisfrequenzen als Linien gezeichnet, weswegen man von einem **Linienpektrum** spricht.
- (6) Ein Maß für den Oberschiwingungsgehalt einer periodischen Funktion  $f(x)$  ist der

**Klirrfaktor  $k$ :** 
$$k = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}.$$

Man kann zeigen, dass dies gleich dem Verhältnis des Effektivwertes aller Oberschiwingungen zum Effektivwert aller Harmonischen ist.

Wegen Effektivwert einer Sinusschiwingung = Scheitelwert durch  $\sqrt{2}$  können in der Formel für den Klirrfaktor statt der Amplituden (= Scheitelwerte)  $A_n$  auch die Effektivwerte gesetzt werden.

**Bestimmung der Fourier-Koeffizienten:**

Zur Bestimmung von  $a_0$  wird die Reihe innerhalb der Periode von 0 bis  $2\pi$  integriert:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_0^{2\pi} a_1 \cos x dx + \int_0^{2\pi} a_2 \cos 2x dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^{2\pi} b_1 \sin x dx + \int_0^{2\pi} b_2 \sin 2x dx + \dots$$

Wegen  $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \cdot \pi$ ,

$$\int_0^{2\pi} a_n \cos nx dx = a_n \left[ \frac{1}{n} \cdot \sin nx \right]_0^{2\pi} = \frac{a_n}{n} \cdot [\sin(2\pi n) - \sin 0] = 0 \quad \text{und}$$

$$\int_0^{2\pi} b_n \sin nx dx = b_n \left[ -\frac{1}{n} \cdot \cos nx \right]_0^{2\pi} = \frac{b_n}{n} \cdot [-\cos(2\pi n) - (-\cos 0)] = \frac{b_n}{n} \cdot (-1 + 1) = 0$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), ist  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = a_0 \cdot \pi$ , woraus folgt:  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ .

In ähnlicher Weise erhält man die weiteren Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , indem die Reihe zuerst jeweils mit  $\cos nx$  bzw.  $\sin nx$  multipliziert und danach von 0 bis  $2\pi$  integriert wird. Nach Ausführung der Integrationen erhält man:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Man erkennt nun auch den Grund, warum in der Fourier-Reihe  $\frac{a_0}{2}$  statt  $a_0$  steht: Damit erreicht man für die Fourier-Koeffizienten eine einheitliche Darstellungsform.  $\frac{a_0}{2}$  ist der **lineare Mittelwert von  $f(x)$**  über eine Periode. Dieser wird oft auch als **Gleichanteil** in den technischen Anwendungen bezeichnet.

Ersetzt man im Funktionsterm  $f(x)$  die Variable  $x$  durch  $\omega_0 \cdot t$  mit  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , so wird daraus eine  $T$ -periodische Funktion der Variablen  $t$ :  $f(x) = f(\omega_0 \cdot t)$ . Die Formeln für die Fourier-Koeffizienten ändern sich daher etwas: Statt des Faktors  $\frac{1}{\pi}$  vor dem Integralzeichen ist nun  $\frac{1}{T} = \frac{2}{T}$  zu setzen, das Integrationsintervall ist nun  $[0, T]$ . Im Folgenden wird eine  $T$ -periodische Funktion allgemein mit  $f(t)$  bezeichnet.

Zusammenfassend ergibt sich:

**Fourierkoeffizienten:**

**f(x) ist 2π-periodisch:**  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ ;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

**f(t) ist T-periodisch:**  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$  mit  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ;

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

*Anmerkungen:*

(1) **Verschiebung des Integrationsintervalles:** Es ist gleichgültig, ob bei einer 2π-periodischen Funktion das Integrationsintervall von 0 bis 2π oder von -π bis π genommen wird. Wesentlich ist nur, dass es eine *volle Periode* der Länge 2π erfasst. So könnte die Integration auch von π bis 3π erfolgen usw. Entsprechendes gilt, wenn eine T-periodische Funktion vorliegt.

(2) Wir **nähern** eine Funktion f(x) durch eine Teilsumme s<sub>n</sub> der Fourier-Reihe bis zur n-ten

Harmonischen  $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ . Während die Annäherung

einer Funktion durch ein Taylorpolynom vom Grade n im Allgemeinen schlechter wird, je weiter man sich von der Entwicklungsstelle x<sub>0</sub> entfernt, liegt hier eine ganz andere Art einer Annäherung vor. Betrachtet man nämlich als Ausmaß für den Fehler bei der Annäherung die **quadratische Abweichung [f(x) - s<sub>n</sub>(x)]<sup>2</sup> im Mittel** über das Intervall (0, 2π), so ist diese dann am kleinsten, wenn die Fourier-Koeffizienten gerade die angeführten Werte haben. Irgendwie andere Werte für die Fourier-Koeffizienten in der Summe s<sub>n</sub>(x) der Schwingungen bis n-ten Harmonischen würden in der Näherung von f(x) durch s<sub>n</sub>(x) zu einem größeren mittleren quadratischen Fehler führen.

**Beispiel 3.11 : Spektrum einer Rechtecksimpulsfolge**

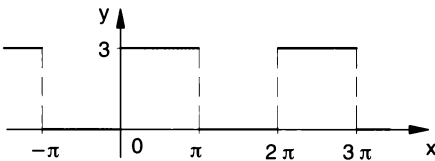


Abb. 3.13

Gegeben ist eine Rechtecksimpulsfolge

(Abb. 3.13) durch  $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$  mit periodischer Fortsetzung für alle x.

Wie lautet die Fourier-Reihe dieser Funktion? Wie groß ist der Klirrfaktor?

**Lösung**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} 3 dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 dx \right] = \frac{1}{\pi} [3x]_0^{\pi} + 0 = \frac{1}{\pi} \cdot [3 \cdot \pi - 3 \cdot 0] = 3.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3 \cdot \cos(nx) dx + 0 = \frac{1}{\pi} \left[ 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{3}{n} \cdot \sin(n \cdot \pi) - \frac{3}{n} \cdot \sin(0) \right] = 0 \quad \text{für alle } n.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3 \cdot \sin(nx) dx + 0 = \frac{1}{\pi} \left[ -3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{3}{n} \cdot \cos(n \cdot \pi) + \frac{3}{n} \cdot \cos(0) \right] = \frac{3}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)].$$

Damit:

$$b_1 = \frac{3}{\pi \cdot 1} [1 - \cos(1 \cdot \pi)] = \frac{3}{\pi \cdot 1} [1 - (-1)] = \frac{6}{\pi};$$

$$b_2 = \frac{3}{\pi \cdot 2} [1 - \cos(2 \cdot \pi)] = \frac{3}{\pi \cdot 2} [1 - 1] = 0;$$

$$b_3 = \frac{3}{\pi \cdot 3} [1 - \cos(3 \cdot \pi)] = \frac{1}{\pi} [1 - (-1)] = \frac{2}{\pi};$$

$$b_4 = \frac{3}{\pi \cdot 4} [1 - \cos(4 \cdot \pi)] = \frac{3}{\pi \cdot 4} [1 - 1] = 0;$$

usw.

Man erkennt:  $b_n = \frac{3}{\pi \cdot n} [1 - (-1)] = \frac{6}{\pi \cdot n}$  für  $n = 1, 3, 5, \dots$  und  $b_n = 0$  für  $n = 2, 4, 6, \dots$

Allgemein kann man auch zusammenfassend schreiben:

$$b_n = \frac{3}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n] \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Somit lautet die Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sin x + \frac{6}{3\pi} \sin 3x + \frac{6}{5\pi} \sin 5x + \frac{6}{7\pi} \sin 7x + \dots =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

Zur Zeit Fouriers war es noch kaum vorstellbar, dass eine Funktion mit Sprungstellen wie die Rechteckimpulsfolge als eine Reihe von "glatten" Sinusfunktionen exakt dargestellt werden kann.

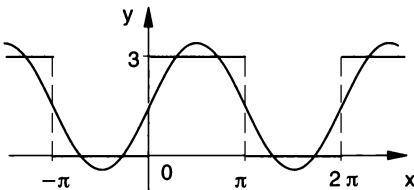


Abb. 3.14 a) Näherung bis zur 1. Harmonischen

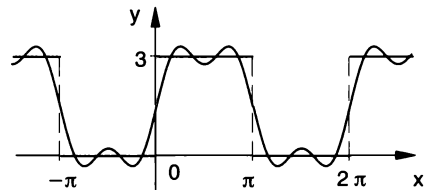


Abb. 3.14 b) Näherung bis zur 3. Harmonischen

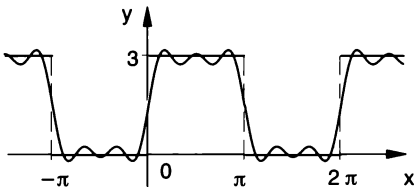


Abb. 3.14 c) Näherung bis zur 5. Harmonischen

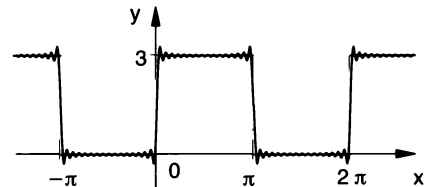


Abb. 3.14 d) Näherung bis zur 31. Harmonischen

In den Abbildungen 3.14 a) bis 3.14 d) sind einige Näherungen von  $f(x)$  durch Teilsummen der Fourier-Reihe gezeigt.

Das Auftreten der Spitzen unmittelbar neben den Sprungstellen ist typisch für das Verhalten von Fourier-Reihen an solchen Stellen. Die Spitzen werden mit zunehmendem  $n$  immer ausgeprägter; trotzdem konvergiert die Fourier-Reihe an allen Stellen!

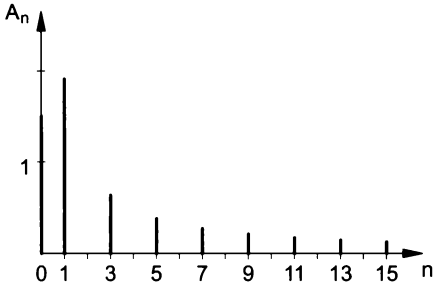


Abb. 3.15 Amplitudenspektrum

Abb. 3.15 zeigt das Amplitudenspektrum von  $f(x)$ . Dabei werden die Amplituden

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{6}{\pi n}$$

für  $n$  ungerade, sonst 0, über  $n$  aufgetragen.

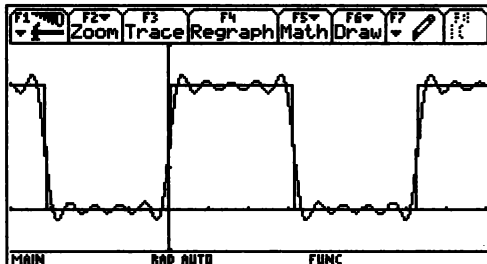
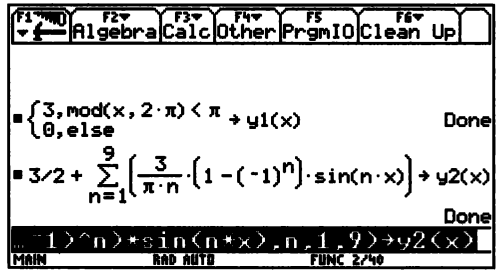
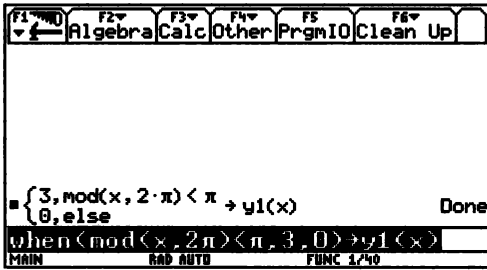
Meist beschränkt man sich auf das Amplitudenspektrum, das eine Information gibt, wie stark die Amplituden der Oberschwingungen mit wachsender Frequenz abnehmen. Allerdings ist ein Rückschluss vom Amplitudenspektrum auf die Funktion  $f(x)$  nicht möglich,

es müssen noch die Phasen der Grundschwingung und der Oberschwingungen mitberücksichtigt werden.

Klirrfaktor:  $A_n^2 = \left(\frac{6}{\pi n}\right)^2 = \frac{36}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$  für  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

$$k = \frac{\sqrt{\frac{36}{\pi^2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right)}}{\sqrt{\frac{36}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{8}}} = 0,435 = 43,5\%$$

Dabei wurde Gebrauch gemacht, dass  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$  (Seite 86).



Man kann zuerst  $f(x)$  auf  $y1(x)$  und die Teilsumme  $s_n(x)$  auf  $y2(x)$  abspeichern. Nach Einstellen des Zeichenbereiches mit dem Window-Editor (empfehlenswert  $xres = 1$ ) können die Graphen gezeichnet werden.

### Vereinfachungen bei der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten:

Liegt der Graph von  $f(x)$  spiegelbildlich zur  $y$ -Achse (Abb. 3.16), so ist  $f(-x) = f(x)$ , die Funktion heißt **gerade Funktion**. Ist die Funktion  $f(x)$  punktsymmetrisch zum Ursprung (Abb. 3.17), so ist  $f(-x) = -f(x)$ , die Funktion heißt in diesem Fall **ungerade Funktion**.

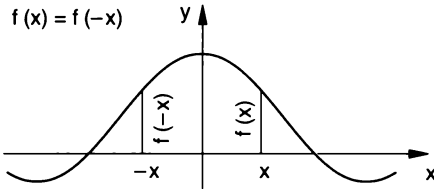


Abb. 3.16 Gerade Funktion

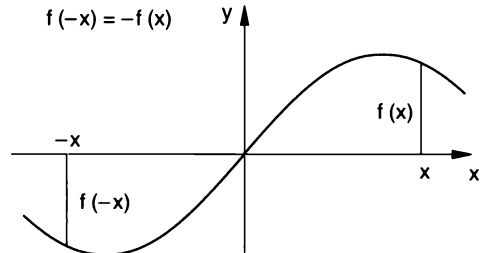


Abb. 3.17 Ungerade Funktion

In diesen beiden Fällen ergeben sich Vereinfachungen bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

	$2\pi$ -periodisch	T-periodisch
<b>f gerade</b>  Kosinusreihe (mit Gleich- anteil)	$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx;$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(n x) dx, \quad b_n = 0$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x)$	$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt;$ $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n \omega_0 t) dt, \quad b_n = 0$ $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega_0 t)$
<b>f ungerade</b>  Sinusreihe	alle $a_n = 0$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(n x) dx$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x)$	alle $a_n = 0$ $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n \omega_0 t) dt$ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \omega_0 t)$

*Begründung* für Periode  $2\pi$  (entsprechend für Periode  $T$ ):

(a) Ist  **$f(x)$  gerade**, so ist  $f(x) \cdot \cos(n \cdot x)$  gerade und  $f(x) \cdot \sin(n \cdot x)$  ungerade. Denn es gilt:

$$f(-x) \cdot \cos(-n \cdot x) = f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \quad \text{sowie} \quad f(-x) \cdot \sin(-n \cdot x) = f(x) \cdot [-\sin(n \cdot x)] = -f(x) \cdot \sin(n \cdot x).$$

Wir wählen nun als Integrationsintervall nicht  $[0, 2\pi]$ , sondern  $[-\pi, \pi]$ . Durch das symmetrisch zu 0 gelegene Integrationsintervall ergeben sich Vereinfachungen bei der Integration (siehe Abb. 3.16 und 3.17): Die orientierten Flächeninhalte über  $[-\pi, 0]$  und  $[0, \pi]$  sind bei geraden Funktionen gleich groß, bei ungeraden Funktionen gegengleich:



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

(b) Ist **f(x) ungerade**, so ist  $f(x) \cdot \cos(n \cdot x)$  ungerade und  $f(x) \cdot \sin(n \cdot x)$  gerade. Denn nun gilt:

$$f(-x) \cdot \cos(-n \cdot x) = -f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \text{ sowie } f(-x) \cdot \sin(-n \cdot x) = -f(x) \cdot [-\sin(n \cdot x)] = f(x) \cdot \sin(n \cdot x).$$

Für die Integrationen ergeben sich diesmal:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

**Beispiel 3.12 : Fourier-Reihe einer geraden bzw. ungeraden Funktion**

Ermittle die Fourier-Reihe folgender Funktion f(t):

**a) Sägezahnfunktion**

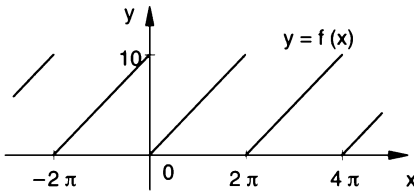


Abb. 3.18

**b) Dreiecksimpulsfolge**

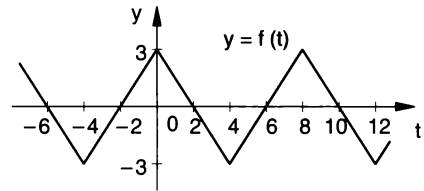


Abb. 3.19

**Lösung**

Zu **a)**

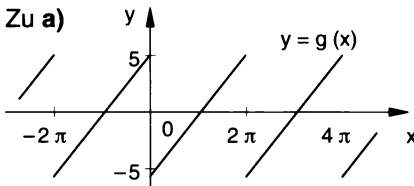


Abb. 3.20

Verschiebt man den Graphen von  $f(x)$  um 5 Einheiten nach unten, so erhält man den Graphen der Funktion  $g(x)$ . Diese Funktion ist ungerade, während  $f(x)$  weder gerade noch ungerade ist. Es gilt:  $f(x) = 5 + g(x)$ .

Wir ermitteln nun die Fourier-Reihe der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $g(x) = \frac{5}{\pi}x - 5$ .

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{\pi}x - 5\right) \sin(nx) dx = \underbrace{\frac{10}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{10}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx}_{I_2}$$

Wegen  $\int x \cdot \sin a x \, dx = \frac{1}{a^2} [\sin(a x) - a x \cos(a x)]$  (Formelsammlung, partielle Integration) ergibt sich:

$$I_1 = \frac{1}{n^2} [\sin(n x) - n x \cos(n x)]_0^\pi = \frac{1}{n^2} [\sin(n \pi) - n \pi \cos(n \pi) - \sin 0 + 0] = -\frac{\pi}{n} \cos(n \pi).$$

$$I_2 = \left[ -\frac{1}{n} \cos(n x) \right]_0^\pi = \frac{1}{n} \cdot [1 - \cos(n \pi)].$$

$$b_n = -\frac{10}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{n} \cos(n \pi) - \frac{10}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot [1 - \cos(n \pi)] = -\frac{10}{\pi n}.$$

$$g(x) = -\frac{10}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(2 x)}{2} + \frac{\sin(3 x)}{3} + \frac{\sin(4 x)}{4} + \dots \right).$$

Daher:

$$f(x) = 5 - \frac{10}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(2 x)}{2} + \frac{\sin(3 x)}{3} + \frac{\sin(4 x)}{4} + \dots \right).$$

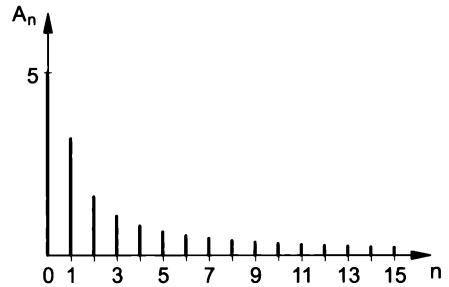
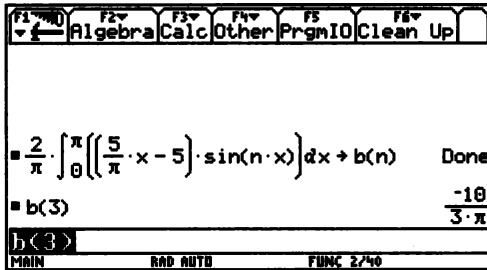


Abb. 3.21 Amplitudenspektrum

Abb. 3.21 zeigt das Amplitudenspektrum von  $f(x)$ :

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = 5, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{10}{\pi n} \text{ für alle } n.$$

Zu b) Die Funktion  $f(t)$  besitzt die Periode  $T = 8$  und ist gerade. Ihre Funktionsgleichung zwischen 0 und  $\frac{T}{2} = 4$  lautet:  $f(t) = k \cdot t + d = -\frac{3}{2} t + 3$ .

Die Grundschwingung der Fourier-Reihe hat die Kreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ .

Die Fourier-Reihe von  $f(x)$  ist eine "reine" Kosinusreihe; auch der lineare Mittelwert  $\frac{a_0}{2}$  ist, wie man auch aus der Abb. 3.19 entnehmen kann, null:

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \, dt = \frac{4}{8} \int_0^4 \left( -\frac{3}{2} t + 3 \right) dt = \frac{1}{2} \cdot \left[ -\frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + 3t \right]_0^4 = 0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n \omega_0 t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \left( -\frac{3}{2} t + 3 \right) \cos(n \omega_0 t) \, dt = \\ &= \underbrace{-\frac{3}{4} \int_0^4 t \cos(n \omega_0 t) \, dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^4 \cos(n \omega_0 t) \, dt}_{I_2} \end{aligned}$$

Wegen  $\int x \cdot \cos(a x) dx = \frac{1}{a^2} \cdot [\cos(ax) + a x \sin(ax)]$  (Formelsammlung, partielle Integration) ergibt sich mit  $a = n \cdot \omega_0 = n \cdot \frac{\pi}{4}$ :

$$I_1 = \int_0^4 t \cdot \cos(n \omega_0 t) dt = \frac{1}{n^2 \omega_0^2} [\cos(n \omega_0 t) + n \omega_0 t \cdot \cos(n \omega_0 t)]_0^4 =$$

$$= \frac{16}{n^2 \pi^2} [\cos(n \pi) + n \pi \sin(n \pi) - \cos 0 - 0] = \frac{16}{n^2 \pi^2} [\cos(n \pi) - 1].$$

$$I_2 = \int_0^4 \cos\left(n \frac{\pi}{4} t\right) dt = \left[ \frac{4}{n \pi} \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{4} t\right) \right]_0^4 = \frac{4}{n \pi} \cdot \sin(n \pi) - \frac{4}{n \pi} \cdot \sin(0) = 0.$$

$$a_n = -\frac{3}{4} \cdot I_1 + \frac{3}{2} \cdot I_2 = \frac{12}{n^2 \pi^2} [1 - \cos(n \pi)].$$

Somit:

$$a_1 = \frac{12}{1^2 \pi^2} [1 - \cos \pi] = \frac{24}{\pi^2}; \quad a_2 = \frac{12}{2^2 \pi^2} [1 - \cos(2 \pi)] = 0;$$

$$a_3 = \frac{12}{3^2 \pi^2} [1 - \cos(3 \pi)] = \frac{8}{3 \pi^2}; \quad a_4 = \frac{12}{4^2 \pi^2} [1 - \cos(4 \pi)] = 0;$$

$$a_5 = \frac{12}{5^2 \pi^2} [1 - \cos(5 \pi)] = \frac{24}{25 \pi^2}; \quad a_6 = \frac{12}{6^2 \pi^2} [1 - \cos(6 \pi)] = 0;$$

usw.

Allgemein:  $a_n = \frac{24}{n^2 \pi^2}$  für  $n$  ungerade,  $a_n = 0$  für  $n$  gerade.

$$f(t) = \frac{24}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\cos(\omega_0 t)}{1^2} + \frac{\cos(3 \omega_0 t)}{3^2} + \frac{\cos(5 \omega_0 t)}{5^2} + \frac{\cos(7 \omega_0 t)}{7^2} + \dots \right).$$

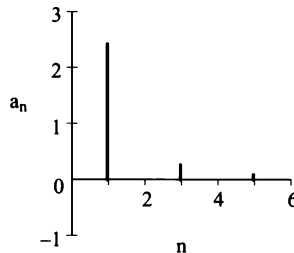
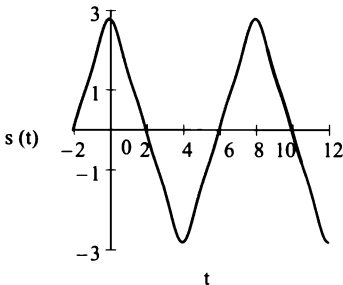
MC

$$n := 1 \dots 5 \quad a_n := \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 \left( -\frac{3}{2} \cdot t + 3 \right) \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot t\right) dt \quad a_3 = 0.270$$

Näherung bis 4. Oberschwingung:  $s(t) := \sum_{n=1}^5 a_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot t\right)$

$t := -2, -1.95 \dots 12$

Amplitudenspektrum:



**Anmerkung:** Funktionen, die sich nur durch Verschiebung längs der x- bzw. t-Achse unterscheiden, besitzen das gleiche Amplitudenspektrum.

Dies kann man sich zunutze machen. Gelingt es so durch Verschieben von  $f(t)$ , eine gerade oder ungerade Funktion  $g(t)$  zu erzeugen, so kann man die Fourier-Reihe von  $g(t)$  aufstellen und daraus auch das Amplitudenspektrum von  $f(t)$  entnehmen.

**Verhalten der Fourierkoeffizienten für  $n \rightarrow \infty$ :**

Bei allen behandelten Beispielen ist festzustellen:  $a_n \rightarrow 0$  sowie  $b_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Allgemein kann man zeigen: Hat  $f(t)$  Sprungstellen, so gehen  $a_n$  und  $b_n$  wie  $\frac{1}{n}$  gegen null. Ist  $f(t)$  stetig mit "Ecken", so gehen  $a_n$  und  $b_n$  wie  $\frac{1}{n^2}$  gegen null. Dies setzt sich fort: Die Fourier-Koeffizienten gehen umso schneller gegen null, je "glatter" die Funktion  $f(t)$  ist.

**Im Überblick: Fourier-Reihen**

Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion  $f(t)$  stellt diese mit einem Gleichanteil und einer im Allgemeinen unendlichen Reihe von Sinusfunktionen (harmonischen Funktionen) dar. Die **1. Harmonische** oder **Grundschwingung** in der Fourier-Reihe hat die **Grundfrequenz**  $f_0 = \frac{1}{T}$ , die **höheren Harmonischen** oder **Oberschwingungen** haben Frequenzen, die **ganzzahlige Vielfache** der Grundfrequenz  $f_0$  sind.

Die Darstellung einer Funktion  $f(t)$  durch ihre Fourier-Reihe wird auch als **Fourier-Analyse** oder **Harmonische Analyse** bezeichnet.

Die Fourier-Reihe einer Funktion  $f(t)$  der Periode  $T$  (Grundkreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ) wird in reeller Schreibweise in der

**Sinus-Kosinusform:**  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \omega_0 t) + b_n \sin(n \omega_0 t)]$  oder in der

**Amplituden-Phasenform:**  $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \omega_0 t + \varphi_n)$  angegeben.

Dabei gilt:  $A_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

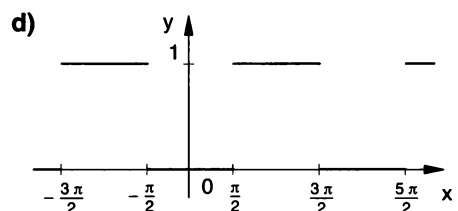
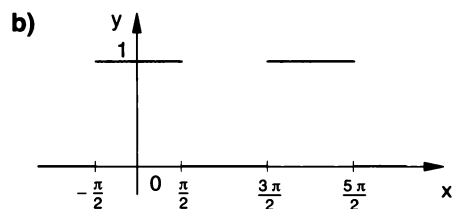
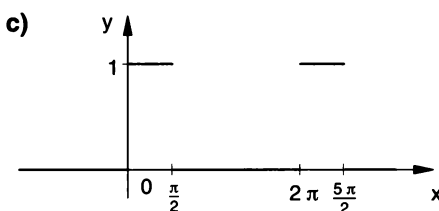
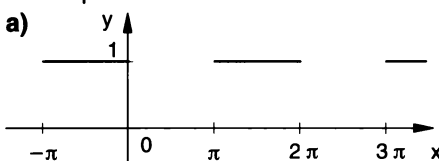
$a_n$  und  $b_n$  werden **Fourier-Koeffizienten** genannt.  $A_n$  ist die Amplitude,  $\varphi_n$  die Phasenlage der  $n$ -ten Harmonischen. Ihre graphische Darstellung erfolgt in je einem **Linien-spektrum**.

Ist speziell  $T = 2\pi$ , so ist  $\omega_0 = 1$ .

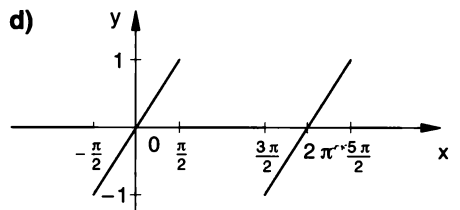
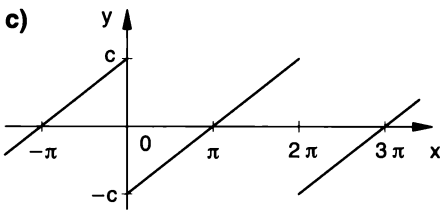
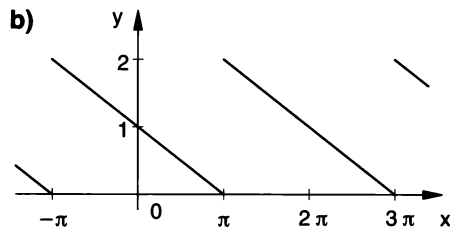
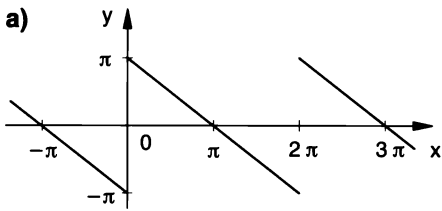
Für  $n \rightarrow \infty$  gehen die Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  einer Funktion  $f(t)$  gegen null. Dies erfolgt umso rascher, je "glatter" die Funktion  $f(t)$  ist.

**Aufgaben**

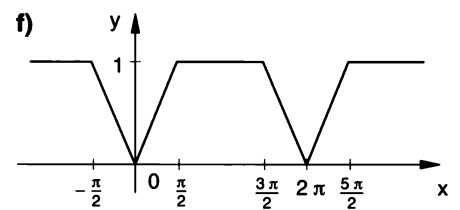
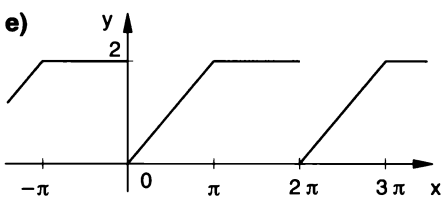
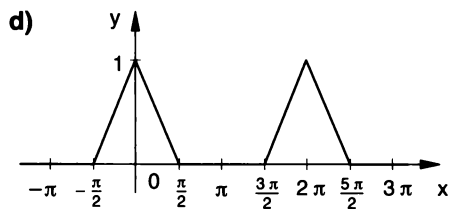
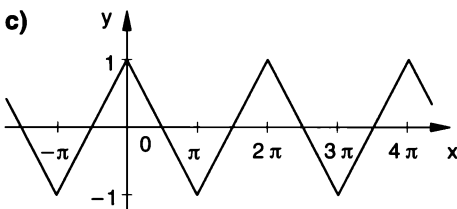
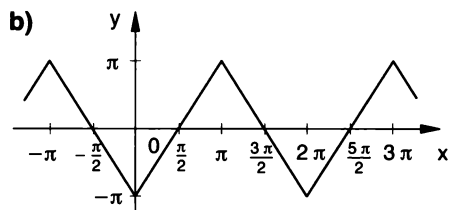
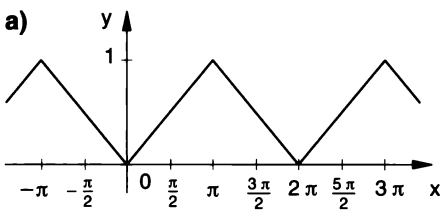
**3.26** Schreibe die folgende periodische Funktion als Fourier-Reihe und zeichne das Amplitudenspektrum:



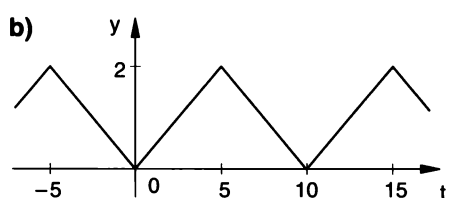
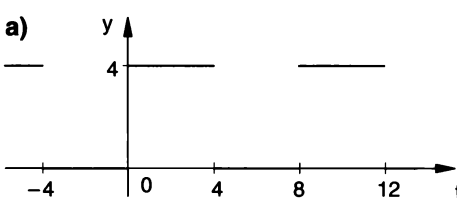
3.27 Schreibe die folgende periodische Funktion als Fourier-Reihe und zeichne das Amplitudenspektrum:

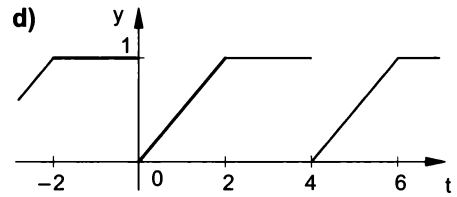
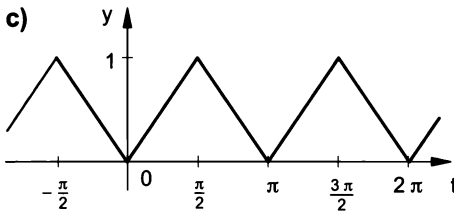


3.28 Schreibe die folgende periodische Funktion als Fourier-Reihe und zeichne das Amplitudenspektrum:



3.29 Schreibe die folgende periodische Funktion als Fourier-Reihe und zeichne das Amplitudenspektrum:





- 3.30** Schreibe die Funktion  $f(t) = |\sin t|$  als Fourier-Reihe (Aufgabe zur "Zweiweggleichrichtung" eines elektrischen Stromes).
- 3.31** Schreibe die Funktion  $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$  mit periodischer Fortsetzung für  $x < 0$  sowie  $x \geq 2\pi$  als Fourier-Reihe (Aufgabe zur "Einweggleichrichtung" eines elektrischen Stromes).
- 3.32** Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$  mit periodischer Fortsetzung für  $x < -\pi$  sowie  $x > \pi$ . Schreibe die Funktion als Fourier-Reihe, setze danach  $x = \frac{\pi}{2}$  und zeige dadurch, dass  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ .
- 3.33** Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$  mit periodischer Fortsetzung für  $x < -\pi$  sowie  $x \geq \pi$ . Schreibe die Funktion als Fourier-Reihe, setze danach  $x = 0$  und zeige dadurch, dass  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ .
- 3.34** Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^2$  für  $-\pi \leq x \leq \pi$  mit periodischer Fortsetzung für  $x < -\pi$  sowie  $x > \pi$ . Schreibe die Funktion als Fourier-Reihe, setze danach  $x = 0$  sowie  $x = \pi$  und zeige dadurch, dass  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$  bzw.  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  ist.

### 3.4 Numerische Fourier-Analyse

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten mittels Integration ist nur möglich, wenn die Funktionsgleichung der zu analysierenden Funktion  $f(t)$  gegeben ist. In vielen Anwendungen liegen jedoch von  $f(t)$  nur die Werte an gleich abständigen Zeitpunkten vor.

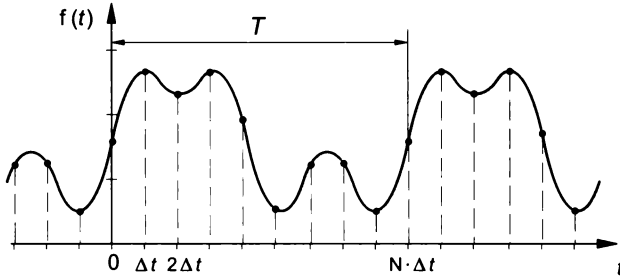


Abb. 3.22 Abtastung einer periodischen Funktion  $f(t)$

Wir nehmen an, dass  $f(t)$  periodisch mit der Periode  $T$  ist;  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  ist die Kreisfrequenz der Grundschwingung.  $f(t)$  wird im Zeitabstand  $\Delta t$  gemessen (Abb. 3.22), wodurch sich die  $N$  Werte  $y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , ergeben. *Wichtig ist, dass  $N \cdot \Delta t$  genau gleich einer Periode  $T$  der Grundschwingung ist:  $N \cdot \Delta t = T$ .*

Durch die  $N$  Punkte  $(t_k/y_k)$  mit  $t_k = k \cdot \Delta t$  lässt sich nun eine periodische Funktion "legen", die als endliche Fourier-Reihe angesetzt wird:

$$f(t) \approx s_M(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + \dots + a_M \cos(M \omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + \dots + b_M \sin(M \omega_0 t).$$

Die Reihe ist bis zur  $M$ -ten Harmonischen dargestellt. Daher sind  $2M + 1$  Koeffizienten zu bestimmen, nämlich  $a_0$  für den Gleichanteil  $\frac{a_0}{2}$  sowie die Amplituden  $a_n$  und  $b_n$  der Kosinus- und Sinusglieder. Um diese  $2M + 1$  Koeffizienten zu bestimmen, sind  $2M + 1$  oder mehr unabhängige Gleichungen nötig. Die nötigen Gleichungen ergeben sich aus den  $N$  Abtastwerten  $y_k$ , weshalb gelten muss:

$$N \geq 2M + 1.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der Frequenz  $f_0$  der Grundschwingung, so ergibt sich:

$N \cdot f_0 \geq (2M + 1) \cdot f_0$ . Die Größe  $N \cdot f_0 = \frac{N}{T} = \frac{N}{N \cdot \Delta t} = \frac{1}{\Delta t}$  ist die Anzahl, wie oft die Funktion  $f(t)$  in der Sekunde abgetastet wird, also die Abtastfrequenz  $f_a$ . Somit erhält man:

$$f_a \geq (2M + 1) \cdot f_0.$$

$M \cdot f_0$  ist aber die Frequenz der höchsten in der Reihe vorkommenden Oberschwingung. Die Abtastfrequenz  $f_a$  muss also mindestens gleich  $(2M + 1) \cdot f_0$  sein. Dies ist eine Frequenz, die größer als das Doppelte der höchsten in der Funktion  $f(t)$  enthaltenen Frequenz ist. Diese Aussage deckt sich mit einem grundlegenden Satz aus der Digitaltechnologie, der hier ohne weitere Begründung angeführt wird:

#### Abtasttheorem (Sampling Theorem) von SHANNON<sup>10</sup>

Ein Signal  $f(t)$  mit der **höchsten** auftretenden Frequenz  $f_S$  kann aus seinen Abtastwerten vollständig rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz  $f_a = \frac{1}{\Delta t}$  größer als  $2 \cdot f_S$  ist.

<sup>10</sup> Claude Elwood SHANNON (1916 – 2001), amerikanischer Ingenieur und Mathematiker

Schon LAGRANGE<sup>11</sup> zeigte, dass zur Darstellung einer periodischen Funktion durch eine trigonometrische Reihe mit jeweils  $n$  Kosinus- und Sinusgliedern die Kenntnis von  $2n$  gleich abständigen Funktionswerten ausreicht.

Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  werden durch numerische Integration ermittelt. Wir wenden die *Trapezformel* an. Diese besitzt bei *periodischen* Funktionen eine hohe Genauigkeit, wie man in der numerischen Mathematik zeigt.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n \omega_0 t) dt$$

$$a_n \approx \frac{2}{N \cdot \Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{2} [y_0 \cos(n \omega_0 t_0) + 2 y_1 \cos(n \omega_0 t_1) + \dots + 2 y_{N-1} \cos(n \omega_0 t_{N-1}) + y_N \cos(n \omega_0 t_N)].$$

Da wegen der Periodizität  $y_0 \cos(n \omega_0 t_0) = y_N \cos(n \omega_0 t_N)$ , ergibt sich daraus die einfache Rechtecksformel:

$$a_n \approx \frac{2}{N} [y_0 \cos(n \omega_0 t_0) + y_1 \cos(n \omega_0 t_1) + \dots + y_{N-1} \cos(n \omega_0 t_{N-1})] = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} y_k \cos(n \omega_0 t_k).$$

Entsprechendes gilt auch für die Koeffizienten  $b_n$ . Wir ersetzen im Folgenden bei der Angabe der Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  das Näherungszeichen durch das Gleichheitszeichen.

**Numerische Berechnung der Fourier-Koeffizienten** einer periodischen Funktion  $f(t)$  (Periode  $T$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ), die an den  $N$  Stellen  $t_k = k \cdot \Delta t$  die Abtastwerte  $y_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ) besitzt, wobei  $\Delta t = \frac{T}{N}$ :

$$f(t) \approx s_M(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M a_n \cos(n \omega_0 t) + \sum_{n=1}^M b_n \sin(n \omega_0 t), \quad 2M + 1 \leq N,$$

$$\text{mit } a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cos(n \omega_0 t_k), \quad b_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \sin(n \omega_0 t_k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M$$

#### Anmerkungen

- (1)  $a_0$  kann mit der Formel für  $a_n$  berechnet werden, wenn  $n = 0$  gesetzt wird. Man kann auch  $b_n$  für  $n = 0$  berechnen: es ergibt sich null.
- (2) Ist die Anzahl  $N$  der Abtastwerte genau gleich  $2M + 1$ , so nimmt  $s_M(t)$  an den Abtaststellen die Abtastwerte  $y_k$  an. Ist  $N > 2M + 1$ , so wird nach der *Methode der kleinsten Quadrate* ("Ingenieur-Mathematik 3", Seite 320 f.) ausgeglichen.

#### Beispiel 3.13 : Numerische Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Die mit  $T = 2\pi$  periodische Funktion  $f(t) = 0,3 \cdot \cos(2t) + \sin(t) + 0,5 \cdot \sin(3t)$  wurde während einer Periode siebenmal ( $N = 7$ ) abgetastet. Es ergeben sich folgende Werte  $y_k$ : 0,300; 0,932; 0,314; 1,108; -0,734; -0,854 und -1,066.

Zu diesen Abtastwerten soll die Fourier-Reihe bis zur 3. Harmonischen (d.h.  $M = 3$ ) aufgestellt werden.

<sup>11</sup> Joseph Louis LAGRANGE (1736 – 1813), französischer Mathematiker



Lösung

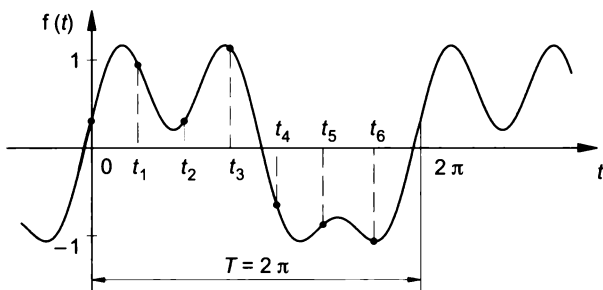
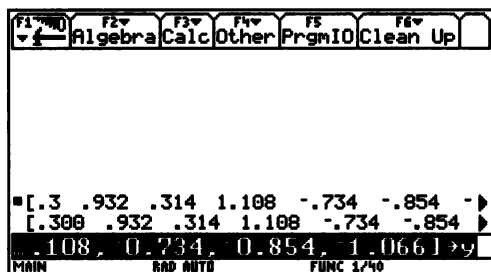


Abb. 3.23 Siebenmalige Abtastung von  $f(t)$  während einer Periode

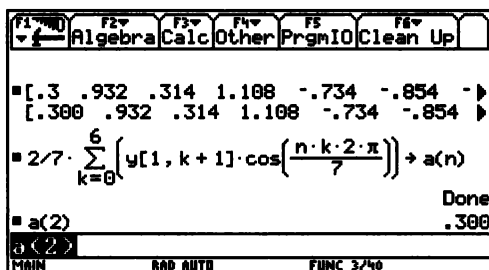
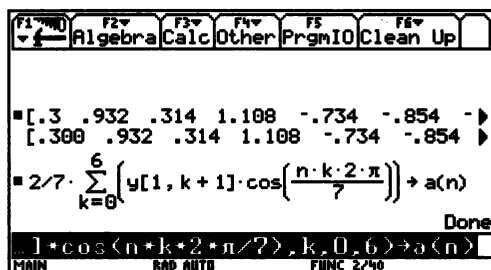
Die numerische Ermittlung der Fourier-Koeffizienten der Reihe ( $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$ )

$$f(t) \approx s_3(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^3 b_n \sin(nt) \text{ erfolgt rechnerunterstützt.}$$

Voyage 200



Die Abtastwerte  $y_k$  werden zu einem Zeilenvektor  $y = (y_0, y_1, \dots, y_6)$  zusammengefasst und unter dem Namen  $y$  abgespeichert. Dabei ist zu beachten, dass  $y$  wie eine Matrix mit nur einer Zeile weiterverarbeitet wird.  $y[1, 1]$  bedeutet  $y_0$ ,  $y[1, 2]$  den Wert  $y_1$ , usw.



Bei der Summenbildung ist zu achten, dass  $y[1, k + 1]$  für  $y_k$  zu schreiben ist. Die mit dem Faktor  $\frac{2}{7}$  multiplizierte Summe wird auf  $a(n)$  abgespeichert.

Entsprechend geht man bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten  $b_n$  vor: statt "cos" ist "sin" zu schreiben.

Im Rahmen der Genauigkeit der abgetasteten Werte  $y_k$  erhält man die ursprünglichen Werte der Fourier-Koeffizienten. Dies hat seinen Grund, dass die höchste im "Signal"  $f(t)$  vorkommende Oberschwingung die dreifache Grundfrequenz besitzt und die Anzahl  $N$  der Abtastungen mindestens gleich  $2 \cdot 3 + 1$  war.

### Beispiel 3.14 : Unterabtastung

Die mit  $T = 2\pi$  periodische Funktion  $f(t) = 0,3 \cdot \cos(2t) + \sin(t) + 0,5 \cdot \sin(3t)$  wurde während einer Periode nur fünfmal ( $N = 5$ ) abgetastet (vgl. Beispiel 3.13, Seite 115). Es ergeben sich folgende Werte  $y_k$ : 0,300; 0,414; 1,156; -0,971 und -0,900.

Zu diesen Abtastwerten soll die Fourier-Reihe bis zur 1. Oberschwingung (d.h.  $M = 2$ ) aufgestellt werden.

#### Lösung

MC

$$N := 5 \quad y := \begin{bmatrix} 0.300 \\ 0.414 \\ 1.156 \\ -0.971 \\ -0.900 \end{bmatrix}$$

$$n := 0 \dots \frac{N-1}{2} \quad a_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot \cos\left[n \cdot \left(k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)\right] \quad b_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot \sin\left[n \cdot \left(k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

$$a := \begin{bmatrix} -0.000 \\ 0.000 \\ 0.300 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 0.000 \\ 1.000 \\ -0.500 \end{bmatrix}$$

Die bis zur ersten Oberschwingung (Kreisfrequenz  $\omega = 2$ ) angesetzte Fourier-Reihe  $s_2(t) = 0,3 \cdot \cos(2t) + \sin(t) - 0,5 \cdot \sin(2t)$  besitzt zwar an den Abtaststellen  $t_k$  die Abtastwerte  $y_k$ , weicht aber dazwischen zum Teil beträchtlich von  $f(t)$  ab (Abb. 3.24); die in  $f(t)$  "enthaltene" zweite Oberschwingung  $0,5 \cdot \sin(3t)$  kann durch die zu geringe Anzahl  $N = 5$  von Abtastungen nicht mehr erfasst werden.

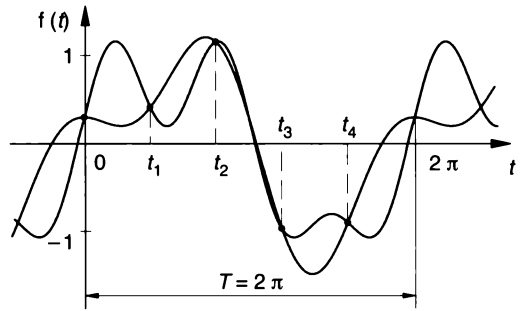


Abb. 3.24  $f(t)$  und ihre Näherung  $s_2(t)$

#### Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

In den Anwendungen kann es notwendig sein,  $N$  sehr groß zu nehmen. Die Berechnung der Näherungswerte für die Fourierkoeffizienten mit den angegebenen Näherungsformeln erfordert etwa  $N^2$  Additionen und, was besonders zur Rechenzeit beiträgt,  $N^2$  Multiplikationen. Ist  $N$  groß, so brauchen selbst schnelle Rechner dafür extrem lange. Es war daher ein großer Durchbruch, als 1965 ein Algorithmus veröffentlicht wurde, der nur noch eine Rechenzeit braucht, die proportional zu  $N \cdot \log_2 N$  ist. Er wurde als **Fast Fourier Transform (FFT, Schnelle Fourier-Transformation)** bekannt.

Die Schnelle Fourier-Transformation gehört zu den am weitest verbreiteten arithmetischen Algorithmen und hat viele Bereiche der naturwissenschaftlichen und technischen Arbeit revolutioniert. Der Grundgedanke bei der FFT, von der es *zahlreiche* Varianten gibt, ist die *Zerlegung* der  $N$  Werte der Folge  $y_k$  in mehrere kleine Teilfolgen, die dann *getrennt* transformiert werden. Besonders wirksam ist es, wenn  $N$  eine Potenz von 2 ist.

Man bildet aus den Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  die komplexe Zahl  $c_n$ :

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - j b_n).$$

Es gilt:  $|c_n| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n$ , d.h. der Betrag von  $c_n$  ist gleich der halben Amplitude  $A_n$  der  $(n - 1)$ -ten Oberschwingung (in der Amplituden-Phasenform der Fourier-Reihe).

Dann ergibt sich für  $n = 0, 1, 2, \dots, M$ :

$$c_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot \cos(n \omega_0 t_k) - j \cdot \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot \sin(n \omega_0 t_k) \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot [\cos(n \omega_0 t_k) - j \cdot \sin(n \omega_0 t_k)].$$

Verwendet man, dass  $n \omega_0 t_k = n \frac{2\pi}{T} k \Delta t = n \frac{2\pi}{T} k \frac{T}{N} = n k \frac{2\pi}{N}$  und die EULER'sche Identität  $e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j \cdot \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - j \cdot \sin(\varphi)$  ist, so erhält man schließlich

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot e^{-jn k 2\pi/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M \quad \text{mit} \quad 2M + 1 \leq N.$$

Ist  $N$  eine gerade Zahl, so folgt aus  $2M + 1 \leq N$  die Forderung  $M < \frac{N}{2}$  und daher  $n < \frac{N}{2}$ . Man definiert:

Die  $N$  Gleichungen

$$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot e^{-jn k 2\pi/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

werden als **diskrete Fourier-Transformation (DFT)** der  $n$ -Werte  $y_k$  in die  $N$ -Werte  $Y(n)$  bezeichnet.

Die FFT ist ein besonders schneller Algorithmus zur Durchführung der DFT, der Berechnung der  $N$ -Werte  $Y(n)$  aus den  $N$ -Werten  $y_k$  wie angegeben. Man erkennt, dass  $c_n = Y(n)$  für  $n < \frac{N}{2}$  ist. Sind die Werte  $c_n$  bestimmt, erhält man die Fourier-Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  aus:

**Näherungsweise Bestimmung der Fourier-Koeffizienten für die Sinus-Kosinus-Form** nach einer erfolgten diskreten Fourier-Transformation (DFT):

$a_n = 2 \cdot \text{Re } c_n$  sowie  $b_n = -2 \cdot \text{Im } c_n$  mit  $n < \frac{N}{2}$ .

Bei  $n > \frac{N}{2}$  weichen  $a_n$  und  $b_n$  immer stärker von den Fourier-Koeffizienten ab, die bekanntlich eine Nullfolge bilden.

**Beispiel 3.15 : Schnelle Fourier-Transformation (FFT)**

- a) Die mit  $T = 2\pi$  periodische Funktion  $f(t) = 0,3 \cdot \cos(2t) + \sin(t) + 0,5 \cdot \sin(3t)$  wurde während einer Periode achtmal ( $N = 8$ ) abgetastet. Es ergeben sich folgende Werte  $y_k$ : 0,300; 1,061; 0,200; 1,061; 0,300; -1,061; -0,800 und -1,061. Ermittle daraus die Fourier-Reihe.
- b) Ermittle aus  $N = 16$  Abtastwerten näherungsweise die Fourier-Reihe der periodischen Dreiecksimpulsfolge  $f(t)$  des Beispiels 3.12, Seite 108.
- c) Ermittle die Fourier-Reihe aus den sieben Abtastwerten des Beispiels 3.13, Seite 115.

**Lösung**

Zu a) Beispielsweise könnte man rechnen:

$$c_2 = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 y_k e^{-j2k2\pi/8} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 y_k e^{-jk\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (0,300 \cdot e^{-j \cdot 0} + 1,061 \cdot e^{-j \cdot \pi/2} + \dots - 1,061 \cdot e^{-j \cdot 7\pi/2}) = 0,150.$$

Die FFT wird von einer Mathematik-Software oder einer einschlägigen Anwender-Software ausgeführt.

**MC**

Vektor der 8 abgetasteten Werte:  $y := \begin{bmatrix} 0.300 \\ 1.061 \\ 0.200 \\ 1.061 \\ 0.300 \\ -1.061 \\ -0.800 \\ -1.061 \end{bmatrix}$

FFFT (y) berechnet alle N-Werte der DFT von  $n = 0$  bis  $n = N - 1$ , FFT (y) nur jene von  $n = 0$  bis  $n = \frac{N}{2}$  (wobei in diesem Fall N eine Potenz von 2 sein muss):

$$c := \text{FFFT}(y) \qquad a := 2 \cdot \text{Re}(c) \qquad b := -2 \cdot \text{Im}(c)$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5j \\ 0.15 \\ -0.25j \\ 0 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.802 \cdot 10^{-13} \\ 0.3 \\ 4.802 \cdot 10^{-13} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man:  $a_0 = 0$ ;  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0,3$ ;  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 0$ ;  $b_1 = 1$ ;  $b_2 = 0$ ;  $b_3 = 0,5$  und  $b_4 = 0$ . Die Funktion konnte, da sie nur Oberschwingungen bis zur dreifachen Grundfrequenz enthält, vollständig aus den  $N = 8$  Abtastwerten reproduziert werden.

Zu b)

**MC**

$$f(t) := \begin{cases} \frac{-3}{2} \cdot t + 3 & \text{if } 0 \leq t < 4 \\ \frac{3}{2} \cdot t - 9 & \text{if } 4 \leq t < 8 \end{cases} \qquad \text{Periode: } T := 8$$

Da  $f(t)$  gerade und der Gleichanteil null ist, treten in der Reihe nur Kosinusglieder auf.

$$N := 16 \quad \text{Abtastwerte: } y := \begin{cases} \text{for } k \in 0 \dots N - 1 \\ y_k \leftarrow f\left(k \cdot \frac{T}{N}\right) \\ y \end{cases} \qquad c := \text{FFT}(y)$$

$$a := 2 \cdot \text{Re}(c) \qquad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.463 \\ 0 \\ 0.304 \\ 0 \\ 0.136 \\ 0 \\ 0.097 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Somit lautet die gesuchte Näherung:

$$s_8(t) = 2,463 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0,304 \cdot \cos(3 \omega_0 t) + 0,136 \cdot \cos(5 \omega_0 t) + 0,097 \cdot \cos(7 \omega_0 t)$$

mit  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$ .

Eine Erhöhung der Abtastwerte und damit verbunden eine Verbesserung der Näherung ist rechnergestützt leicht möglich.

Zu c) In diesem Fall ist N keine Potenz von 2 und zudem eine ungerade Zahl.

MC

$$N := 7 \quad y := \begin{bmatrix} 0.300 \\ 0.932 \\ 0.314 \\ 1.108 \\ -0.734 \\ -0.854 \\ -1.066 \end{bmatrix}$$

Ist N keine Potenz von 2, so nimmt man CFFT (y) und verwendet nur die c-Werte für  $n < N/2$ .  
Bei N = 7:  $n = 0, 1, 2$  und 3.

$$c := \text{CFFT}(y) \quad a := 2 \cdot \text{Re}(c) \quad b := -2 \cdot \text{Im}(c)$$

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.962 \cdot 10^{-5} \\ 0.3 \\ 2.35 \cdot 10^{-4} \\ 2.35 \cdot 10^{-4} \\ 0.3 \\ -9.962 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2.846 \cdot 10^{-4} \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -2.846 \cdot 10^{-4} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Somit:  $a_0 = 0$ ;  $a_1 \approx 0$ ,  $a_2 = 0,3$ ;  $a_3 \approx 0$ ;  $b_1 = 1$ ;  $b_2 \approx 0$ ;  $b_3 = 0,5$ .

**Achtung:** Bei Verwendung von Software zur FFT ist auf die Definition der DFT zu achten. So wird etwa in MATLAB (Vektor y mit den Abtastwerten definieren, danach `fft(y)`) oder in Microsoft Excel (unter Extras/Analyse – Funktionen zu finden) auf den Vorfaktor  $1/N$  verzichtet und nur die Summation ausgeführt!

**Im Überblick: Numerische Fourier-Analyse**

- In vielen Anwendungen liegen von einer periodischen Funktion  $f(t)$  nur **N Abtastwerte** an *gleich abständigen* Zeitpunkten innerhalb einer Periode  $T$  vor. In diesem Fall kann man die Fourier-Koeffizienten näherungsweise mit Hilfe der Trapezformel ermitteln, die hier eine hohe Genauigkeit besitzt.
- Um eine periodische Funktion  $f(t)$  bis zur M-ten Harmonischen zu rekonstruieren, sind nach dem **Abtasttheorem** mindestens  $N = 2 M + 1$  gleich abständige Abtastwerte innerhalb einer Periode nötig.
- Ist N groß, so wird die näherungsweise Ermittlung der Fourier-Koeffizienten mit Hilfe eines besonderen Algorithmus, der **Fast Fourier Transform (FFT, Schnelle Fourier-Transformation)** vorgenommen.

**Aufgaben**

**3.35** Schreibe ein einfaches Programm zur Durchführung der diskreten Fourier-Transformation (DFT) für einen programmierbaren Taschenrechner (TI 92, ...) oder in einer sonstigen Programmiersprache.

**3.36** Aufgrund einer exponential gekrümmten Kennlinie eines Verstärkers bewirkt eine eingehende sinusförmige Spannung einen verzerrten, d.h. nicht mehr sinusförmigen Strom  $i(t) = (e^{1,4+0,5 \cdot \sin t} - 0,9)$  mA. Ermittle aufgrund von 8 Abtastwerten den Gleichstromanteil, die Amplituden der Grundschwingung und der ersten drei Oberschwingungen sowie daraus den Klirrfaktor.

**3.37** Gegeben ist eine periodische Funktion  $f(t) = e^{-t}$  für  $0 \leq t < 2$  mit periodischer Fortsetzung (Abb. 3.25). Bestimme mit Hilfe der Schnellen Fourier-Transformation (FFT) den Gleichanteil  $a_0/2$  sowie die Fourier-Koeffizienten  $a_1, a_2, b_1$  und  $b_2$  für  
**a) N = 64**      **b) N = 1024**      **c) N = 16 384** Abtastwerte  
 und vergleiche das Ergebnis mit einer genauen Berechnung dieser Koeffizienten mit Hilfe eines CAS (TI 92, ...).

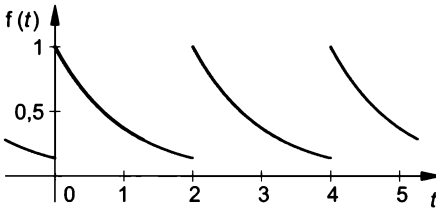


Abb. 3.25

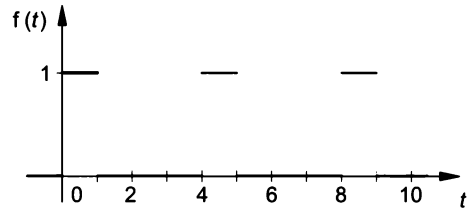


Abb. 3.26

**3.38** Ermittle die Sinus-Kosinusform der Rechtecksimpulsfolge nach Abb. 3.26

- a) mit Hilfe der Integraldarstellung der Fourier-Koeffizienten,
- b) mit Hilfe einer Abtastung an  $N = 8192$  Stellen innerhalb einer Periode.

**3.39** Gegeben ist die periodische Funktion  $f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{5} t\right) + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{5} t\right) + 0,8 \cdot \sin(\pi t)$ . Wie oft müsste diese Funktion innerhalb einer Periode mindestens abgetastet werden, um sie zu reproduzieren? Führe dies durch eine FFT mit einer geeigneten Abtastanzahl  $N$  durch!

**3.40** Eine Funktion wurde im Abstand  $\Delta t = 0,01$  s ab  $t = 0$  s über eine volle Periode  $T = 0,18$  s abgetastet. Es ergab sich:

$t_k$ (in s)	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
$y_k$	2,50	2,85	2,53	2,79	2,45	2,45	2,79	2,53	2,85	2,50
$t_k$ (in s)	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	
$y_k$	1,91	1,64	0,71	0,61	0,61	0,71	1,64	1,91	2,50	

Ermittle die sich daraus ergebende Fourier-Reihe (Genauigkeit der Koeffizienten auf Hundertstel).

## 4 Differentialgleichungen

### 4.1 Grundbegriffe

Bei der näherungsweise Übersetzung eines naturwissenschaftlichen oder technischen Problems in die Sprache der Mathematik (Modellbildung) treten häufig Differentialgleichungen auf.

Für das folgende Beispiel wird daran erinnert, dass die Geschwindigkeit  $v$  und die Beschleunigung  $a$  eines Körpers bei einer geradlinigen Bewegung die erste bzw. zweite Ableitung des zurückgelegten Weges  $s$  nach der Zeit  $t$  sind:  $v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$ .

#### Beispiel 4.1 : Senkrechter Wurf nach oben (ohne Luftwiderstand)

Ein Stein der Masse  $m$  wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  s aus einer Höhe  $h = 15$  m mit einer Geschwindigkeit  $v_0 = 10$  m/s senkrecht nach oben geworfen (Abb. 4.1).

- a) Gib eine Formel an, welche zu jedem Zeitpunkt  $t \geq 0$  s die Höhe  $y$  des Steines angibt.  
b) Wann erreicht der Stein seine größte Höhe, wann trifft er auf dem Boden auf?

#### Lösung

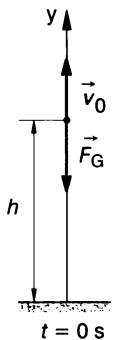


Abb. 4.1

Zu a) Sieht man vom Luftwiderstand ab, so unterliegt der Körper nur der Gewichtskraft  $F_G = m g$ . Nach dem NEWTON'schen Grundgesetz der Mechanik ("Masse  $m$  mal Beschleunigung  $a = \text{Kraft } F$ ") gilt daher:

$$m \cdot y'' = -F_G = -m \cdot g.$$

Die Gewichtskraft  $F_G$  ist negativ anzusetzen, weil sie entgegengesetzt zur  $y$ -Achse gerichtet ist. Dividiert man durch  $m$ , so erhält man

$$y'' = -g.$$

Das Besondere an dieser Gleichung ist, dass die gesuchte Größe  $y$ , die Höhe des Steines, in einer Ableitung auftritt. Deswegen spricht man von einer *Differentialgleichung*. Die Lösung erhält man hier in einfacher Weise durch zweifache Integration. Die erste Integration ergibt die Geschwindigkeit  $v$ :

$$v(t) = y' = \int (-g) dt = -g t + C_1$$

Nochmalige Integration ergibt die gesuchte Größe  $y$ :

$$y(t) = \int (-g t + C_1) dt = -\frac{1}{2} g t^2 + C_1 \cdot t + C_2.$$

Hier treten noch die voneinander unabhängigen Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  auf. Sie werden nicht durch die Differentialgleichung festgelegt. Ihre physikalische Bedeutung erkennt man, wenn man die Geschwindigkeit  $v$  und die Höhe  $y$  zu Beginn der Bewegung berechnet:

$$v(0) = -g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v(0)$$

$$y(0) = -\frac{1}{2} g \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = y(0)$$

Die Integrationskonstanten sind daher die Anfangsgeschwindigkeit  $v(0) = v_0$  bzw. die Anfangshöhe  $y(0) = h$ . Man kann daher abschließend schreiben:  $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \cdot t + h$ . Setzt man  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>, so erhält man mit den angegebenen Werten für  $v_0$  und  $h$  unter Weglassung der Einheiten:  $y = -5 t^2 + 10 \cdot t + 15$ .

Zu **b)** Der Graph von  $y(t)$  ist eine Parabel, die sich nach unten öffnet.  $y(t)$  ist maximal im Parabelscheitel, dort ist  $y'(t) = 0$ :

$$y'(t) = -10 \cdot t + 10 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s.}$$

Der Stein erreicht zur Zeit  $t = 1$  s, d.h. eine Sekunde nach dem Abwurf, seine maximale Wurfhöhe  $y_{\max} = y(1) = 20$  m.

Beim Auftreffen auf dem Boden ist  $y = 0$ :

$-5 t^2 + 10 \cdot t + 15 = 0 \Rightarrow t = 3$  s (die mathematisch mögliche zweite Lösung  $t = -1$  ist aus sachlichen Gründen auszuschließen).

Der Stein trifft drei Sekunden nach dem Abwurf am Boden auf. Abb. 4.2 zeigt das Weg-Zeit-Diagramm des senkrechten Wurfs.

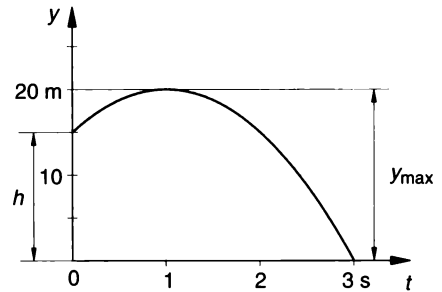


Abb. 4.2

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Lösung einer Differentialgleichung im Allgemeinen nicht durch einfache Integrationen zu gewinnen ist.

### Beispiel 4.2 : Entladen eines Kondensators

Ein Kondensator (Abb. 4.3) mit der Kapazität  $C$  wird auf die Spannung  $U_0$  aufgeladen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  s beginnt die Entladung des Kondensators. Gesucht ist der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung  $u_C$  für  $t \geq 0$  s.

#### Lösung

Nach der 2. KIRCHHOFF'schen Regel (Maschenregel) gilt in der Masche mit dem Kondensator und dem OHM'schen Widerstand für  $t \geq 0$  s, wenn  $i$  die Entladestromstärke und  $u_C$  die Spannung des Kondensators zur Zeit  $t$  sind:

$$R \cdot i + u_C = 0.$$

Ist  $q$  die momentane Ladung des Kondensators, so gilt  $q = C \cdot u_C$ . Wegen  $i = \frac{dq}{dt}$  folgt damit

$i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ . Einsetzen in obige Gleichung ergibt die Differentialgleichung

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Dazu kommt noch die Information, dass die Kondensatorspannung anfänglich gleich  $U_0$  ist, also  $u_C(0) = U_0$ . Auf die Lösung dieser Differentialgleichung für  $u_C$  wird später eingegangen.

Wie erkennt man aus der Differentialgleichung, dass der Faktor  $RC$  die Einheit "Sekunde" hat, was den Namen "Zeitkonstante" rechtfertigt? Führe einen Einheitenvergleich durch!

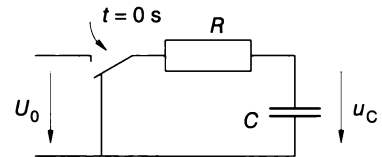


Abb. 4.3

Eine Gleichung der Form  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ , in der also neben einer Funktion  $y = f(x)$  auch noch irgendwelche Ableitungen dieser Funktion vorkommen, heißt **gewöhnliche Differentialgleichung**. Die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung heißt **Ordnung** der Differentialgleichung.



**Anmerkungen**

- (1) Liegt keine besondere Anwendung vor, so verwenden wir die neutralen Buchstaben  $x$  (für die unabhängige Variable) und  $y$  (für die gesuchte Größe als abhängige Variable).
- (2) Hängt in einer Differentialgleichung die gesuchte Größe  $y$  von mehreren Variablen ab und kommen ihre Ableitungen nach diesen Variablen auch in der Differentialgleichung vor, so liegt eine partielle Differentialgleichung vor. Diese werden nicht behandelt.

**Beispiele:**

- Differentialgleichungen 1. Ordnung:  $y' - 2x = 0$ ,  $2y' + y = \sin(3x)$ ,  $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$
- Differentialgleichungen 2. Ordnung:  $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ ,  $y'' + y' + 4y = 0$
- Differentialgleichungen 3. Ordnung:  $y''' + 2y' = x^2$ ;  $y' \cdot y''' + 1 = x$

Das Aufstellen einer Differentialgleichung ist ähnlich wie die Suche nach dem "Ansatz" bei einer Textaufgabe. Während aber bei den üblichen Textaufgaben Gleichungen für Zahlenwerte aufgestellt werden, geht es hier um das Aufstellen von Gleichungen für Funktionen, die deren *Änderung* miteinschließen.

**Etwas Physik**, die beim Aufstellen von Differentialgleichungen hilfreich sein kann:

- (1) **Geradlinige Bewegung** eines Körpers mit veränderlicher Geschwindigkeit  $v$ : NEWTON'sches Grundgesetz der Mechanik:  $m \cdot a = F$  (Masse mal Beschleunigung = Kraft) mit  $a = \frac{dv}{dt}$  und  $F$  als Summe aller am Körper angreifenden Kräfte.  
Reibungskräfte: proportional zu  $v$  (Flüssigkeitsreibung) oder zu  $v^2$  (Luftreibung).
- (2) **Gewicht**  $F_G$  eines Körpers:  $F_G = m g = \rho \cdot V \cdot g$ , wobei  $m$  die Masse,  $\rho$  die Dichte und  $V$  das Volumen des Körpers sind.  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  ist die Fallbeschleunigung.
- (3) **Ausdehnung einer Feder**: Die Verlängerung  $y$  einer Feder ist in gewissen Grenzen proportional zur angelegten Kraft  $F$ :  $F = c \cdot y$  mit  $c$  als Federkonstante.
- (4) **RCL-Netzwerke**:
  - a) Stromstärke  $i = \frac{dq}{dt}$  ( $dq$  ist die Ladungsmenge, die in der Zeitspanne  $dt$  durch den Leiterquerschnitt hindurchbewegt wird).
  - b) Maschenregel (2. KIRCHHOFF'sche Regel): In einem geschlossenen Stromkreis ist die Summe aller "treibenden" Spannungen gleich der Summe aller Spannungsabfälle.
  - c) Spannungsabfälle an OHM'schem Widerstand  $R$ , Kondensator (Kapazität  $C$ , Ladung  $q$ ) und Spule (Induktivität  $L$ ):  $u_R = R \cdot i$ ,  $u_C = \frac{q}{C}$ ,  $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ .

**Beispiel 4.3 : Allgemeine und partikuläre Lösung einer Differentialgleichung**

Stelle die Lösungen der Differentialgleichung  $y' - 2x = 0$  graphisch dar.

**Lösung**

$y' = 2x$  und daraus  $y = \int 2x \, dx = x^2 + C$ .

Die Integrationskonstante  $C$  steht für jede beliebige Zahl, weshalb es unendlich viele Lösungen der Differentialgleichung gibt. Abb. 4.4 zeigt die Graphen dreier Lösungen. Diese und alle weiteren "Lösungskurven" schneiden einander nicht; durch jeden Punkt der Ebene geht weiters **genau eine Lösungskurve**. Daher kann man durch Vorgabe eines Punktes genau eine Lösung auswählen. Gibt man, wie in Abb. 4.4 den Punkt  $P(1/2)$  oder  $y(1) = 2$  vor, so wählt man damit den Graphen der Funktion  $y = x^2 + 1$  als Lösung aus.

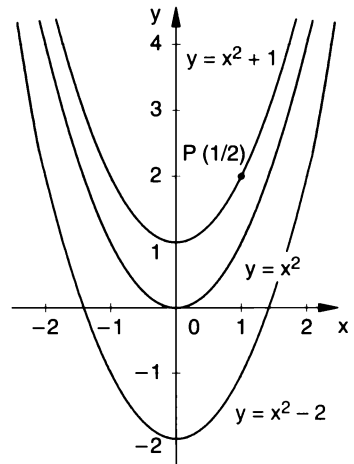


Abb. 4.4

Das in Beispiel 4.3 geschilderte Lösungsverhalten ist typisch für Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung besitzt in der Regel unendlich viele Lösungen. Die Gesamtheit aller dieser Lösungen heißt ihre **allgemeine Lösung**. Diese enthält bei einer Differentialgleichung *erster* Ordnung *eine* Integrationskonstante, bei einer Differentialgleichung *zweiter* Ordnung (siehe Beispiel 4.1) *zwei* Integrationskonstanten. Gibt man der Integrationskonstante bzw. den Integrationskonstanten einen speziellen Wert, so erhält man eine **spezielle** oder **partikuläre** Lösung, an der man in der Regel interessiert ist. Dies erfolgt häufig durch Vorgabe von **Anfangsbedingungen**. Anfangsbedingung(en) und Differentialgleichung zusammen bilden eine so genannte **Anfangswertaufgabe**. Dies kann für die häufig auftretenden Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung wie folgt veranschaulicht werden:

### Geometrische Veranschaulichung einer Anfangswertaufgabe:

#### Differentialgleichung 1. Ordnung:

Die Vorgabe der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  bedeutet das Auswählen jener speziellen Lösungskurve, die durch den Punkt  $P(x_0/y_0)$  mit  $y(x_0) = y_0$  verläuft.

#### Differentialgleichung 2. Ordnung:

Die Vorgabe der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x_0) = k$  bedeutet das Auswählen jener speziellen Lösungskurve, die sowohl durch den Punkt  $P(x_0/y_0)$  mit  $y(x_0) = y_0$  verläuft als auch dort die vorgegebene Steigung  $y'(x_0) = k$  besitzt.

#### Anmerkungen:

- (1) Ohne Begründung wird zur *Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Anfangswertaufgabe*  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  festgehalten: Es sei  $D$  der Definitionsbereich von  $f(x, y)$ . Dann geht durch einen Punkt  $P(x_0/y_0)$  von  $D$  jedenfalls dann genau eine Lösungskurve, wenn  $f(x, y)$  in  $D$  stetig ist, dort die partielle Ableitung  $f_y(x, y)$  existiert und stetig ist.
- (2) Die Lösung einer Differentialgleichung ist oft nicht durch elementare Funktionen möglich ("symbolische" Lösung); es gibt Funktionen, die erst als Lösung einer Differentialgleichung definiert werden! Viele Differentialgleichungen können nur mit einem numerischen Näherungsverfahren gelöst werden.

### Beispiel 4.4 : Anfangswertaufgaben

Löse folgende Anfangswertaufgabe:

- a)  $y' - x = 0$ ,  $y(2) = 4$ ;      b)  $y'' + x = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

**Lösung**

Zu a)  $y' = x$ ; allgemeine Lösung:  $y = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$ ;

Anfangsbedingung:  $y(2) = \frac{2^2}{2} + C = 4 \Rightarrow C = 2$ .

Somit lautet die gesuchte spezielle oder partikuläre Lösung:  $y = \frac{x^2}{2} + 2$ .

Probe:  $\left(\frac{x^2}{2} + 2\right)' - x = x - x = 0$ .

Zu b)  $y'' = 1 - x$ ;  $y' = \int (1 - x) \, dx = x - \frac{x^2}{2} + C_1$ ;

$y = \int \left(x - \frac{x^2}{2} + C_1\right) \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$ ;

Anfangsbedingungen:

$y(0) = \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{6} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$ ;  $y'(0) = 0 - \frac{0^2}{2} + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 2$ .

Somit lautet die gesuchte partikuläre Lösung:  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 2x + 1$ .

Probe:  $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 2x + 1\right)'' + x = \left(x - \frac{x^2}{2} + 2\right)' + x = 1 - x + x = 1$ .

Die partikuläre Lösung kann auch durch Vorgabe von gleich vielen Funktionswerten (oder ihren Ableitungen) geschehen wie Integrationskonstanten vorliegen. In diesem Fall spricht man von einer **Randwertaufgabe**.

**Beispiel 4.5 : Randwertaufgaben**

a)  $y'' - 6x + 12 = 0$ ;  $y(1) = 8$ ;  $y(5) = 0$

b) Ein auf zwei Stützen ruhender Träger der Länge  $L$  mit überall gleichem Querschnitt (Abb. 4.5) ist durch eine konstante Streckenlast  $q(x) = q_0$  belastet. Wie lautet die Gleichung der Biegelinie (neutralen Faser)?

**Lösung**

Zu a)  $y' = \int (6x - 12) \, dx = 3x^2 - 12x + C_1$ ;

$y = \int (3x^2 - 12x + C_1) \, dx = x^3 - 6x^2 + C_1 \cdot x + C_2$

Berücksichtigung der "Randbedingungen":

$y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 8$

$y(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + C_1 \cdot 5 + C_2 = 0$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet:  $C_1 = 3$ ;  $C_2 = 10$ .

Die gesuchte Lösung der Randwertaufgabe lautet daher:  $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ .

Zu b) Bei der angenommenen Biegebeanspruchung kommt es im unteren Teil des Trägers zu einer Verlängerung der Trägerschichten, im oberen Teil zu einer Verkürzung. Dazwischen bleibt eine Schicht, die neutrale Faser oder Biegelinie  $y = y(x)$  in der Länge gleich. Ist die Durchbiegung  $y$  (nach unten positiv genommen) sehr klein gegenüber der Trägerlänge  $L$ , so lässt sich mit Hilfe von physikalischen und geometrischen Überlegungen die folgende **Differentialgleichung der Biegelinie** herleiten:

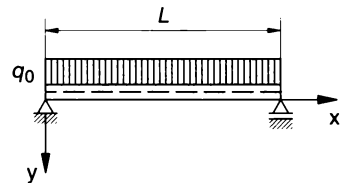


Abb. 4.5 Stützträger mit konstanter Streckenlast

$$y'' = -\frac{M_b}{E \cdot I}$$

Dabei ist  $M_b(x)$  das Biegemoment,  $I$  das Flächenträgheitsmoment des Trägerquerschnitts,  $E$  ist der Elastizitätsmodul (Materialkonstante). Für den vorliegenden Fall ist die Durchbiegung an den beiden Trägern jeweils null. Für eine konstante Belastung  $q_0$  gilt für das Biegemoment  $M_b(x)$ :

$$M_b(x) = \frac{q_0 L}{2} \cdot x - \frac{q_0 x}{2} \cdot x = \frac{q_0}{2} (Lx - x^2).$$

Damit erhält man schließlich die folgende *Randwertaufgabe*:

$$y'' = -\frac{q_0}{2EI} (Lx - x^2), \quad y(0) = y(L) = 0 \quad (0 \leq x \leq L).$$

Ihre Lösung erfolgt durch zwei nacheinander folgende einfache Integrationen. Die dabei anfallenden Integrationskonstanten ergeben sich aus den Randbedingungen  $y(0) = y(L) = 0$  (siehe "Ingenieur-Mathematik 3", Beispiel 7.27, Seite 268):

$$y(x) = \frac{q_0}{24EI} (L^3 x - 2Lx^3 + x^4).$$

## Richtungsfeld einer Differentialgleichung 1. Ordnung

Wir betrachten wie in Beispiel 4.3 die Differentialgleichung  $y' = 2x$ . Durch diese Gleichung kann man in jedem Punkt der  $(x, y)$ -Ebene eine Richtung angeben, die wir durch eine kurze Strecke mit der dort vorgegebenen Steigung  $y'$ , ein so genanntes **Linienelement**, graphisch darstellen. In Abb. 4.6 ist das Linienelement des Punktes  $P(1/2)$  als kurzes Geradenstück mit der Steigung  $2 \cdot 1 = 2$  gezeichnet. Die Gesamtheit aller Linienelemente heißt **Richtungsfeld** dieser Differentialgleichung (Abb. 4.7). Den Lösungen der Differentialgleichung entsprechen nun Kurven, die in das Richtungsfeld "hineinpassen", d.h. in jedem Kurvenpunkt verläuft das dortige Linienelement tangential.

Auch daraus erkennt man, dass die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung nicht aus einer Lösung besteht, sondern aus einer Schar von Lösungen.

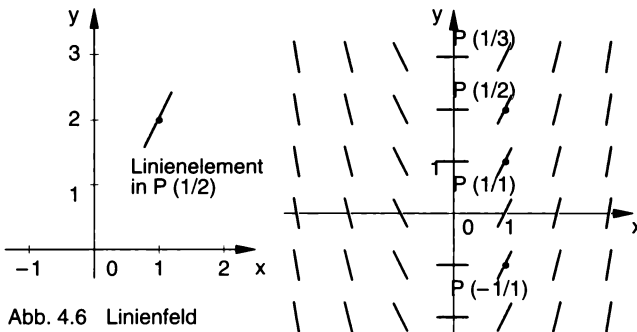


Abb. 4.6 Linienfeld

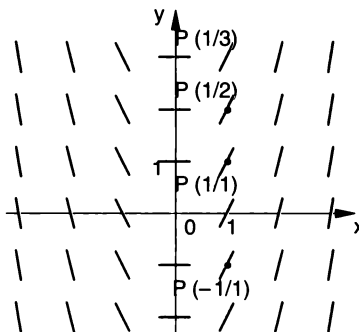


Abb. 4.7 Richtungsfeld von  $y' = 2x$

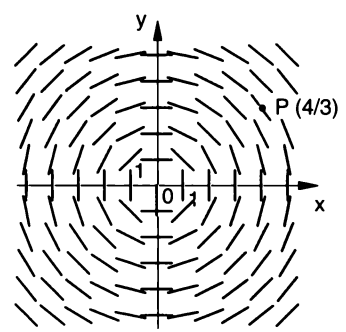


Abb. 4.8 Richtungsfeld von  $y' = -\frac{x}{y}$

Abb. 4.8 zeigt das Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y' = -\frac{x}{y}$ . Als Lösungskurven dieser Differentialgleichung werden Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt im Ursprung nahegelegt. Die Lösung dieser Differentialgleichung erfolgt im Beispiel 4.6 a), Seite 129.

## Im Überblick: Differentialgleichungen – Grundbegriffe

Wenn die **Änderung** einer gesuchten Größe (Weg, Geschwindigkeit, Stromstärke, Temperatur, ...) in einer Gleichung auftritt, wird man bei einer kontinuierlichen Betrachtung auf Differentialgleichungen geführt. Eine **Differentialgleichung** liegt vor, wenn die gesuchte Größe **in wenigstens einer Ableitung** vorkommt. Die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung heißt **Ordnung** der Differentialgleichung. Sie ist das Hauptmerkmal einer Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung besitzt im Allgemeinen unendlich viele Lösungen; dies kommt durch eine oder mehrere frei wählbare **Integrationskonstanten** zum Ausdruck. Die Gesamtheit dieser Lösungen heißt ihre **allgemeine Lösung**. Die **Ordnung** einer Differentialgleichung gibt die **Anzahl** der Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung an. Werden darin die Integrationskonstanten numerisch festgelegt, so spricht man von einer **partikulären** oder **speziellen Lösung** der Differentialgleichung. Geometrisch veranschaulicht ist die allgemeine Lösung eine **Kurvenschar**, die partikuläre Lösung *eine* Kurve aus dieser Schar.

Werden die Integrationskonstanten durch **Anfangsbedingungen** ( $y, y', \dots$  an einer festen Stelle  $x_0$ ) festgelegt, so spricht man von einer **Anfangswertaufgabe**. Eine **Randwertaufgabe** liegt vor, wenn die Integrationskonstanten durch Vorgabe von Funktionswerten (oder Ableitungen) an *verschiedenen* Stellen erfolgt.

Denkt man sich zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung  $y' = f(x, y)$  in jedem (möglichen) Punkt der Ebene ein kurze Strecke mit der dortigen Steigung gezeichnet, so erhält man das sogenannte **Richtungsfeld**. Aus diesem kann man oft einen guten optischen Eindruck vom Verlauf der Lösungskurven erhalten.

### Aufgaben

4.1 Ermittle die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung:

- |                   |                       |                           |
|-------------------|-----------------------|---------------------------|
| a) $y' - 3x = 1$  | b) $y' + x + 2 = 0$   | c) $y' - 4x + x^2 = 1$    |
| d) $y'' + 6x = 0$ | e) $y'' + 6x - 3 = 0$ | f) $y'' + 12x^2 - 4x = 1$ |

4.2 Löse die folgende Anfangswertaufgabe:

- |   |  |
|---|--|
| a) $y' - 2x = 3; y(3) = 1$                | b) $y' + x^2 = x + 1; y(6) = 0$              |
| c) $y'' - x + 1 = 0; y(1) = 0, y'(1) = 0$ | d) $y'' + 6x^2 = 1 - x; y(0) = 2, y'(0) = 5$ |

4.3 Löse die folgende Randwertaufgabe:

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| a) $y'' = 2x - 1; y(0) = 1, y(6) = 1$ | b) $y'' - x + 3 = 0; y(3) = 1, y(9) = 10$ |
|---------------------------------------|---|

4.4 Ermittle die Gleichung der Biegelinie für einen Träger der Länge  $L$  auf zwei Stützen, wenn eine Einzellast  $F$  in der Mitte wirkt:  $M_b(x) = \frac{F \cdot x}{2} (0 \leq x \leq \frac{L}{2})$ ,  
Randbedingungen:  $y(0) = 0, y'(\frac{L}{2}) = 0$ .

4.5 Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung im angegebenen Bereich der  $(x, y)$ -Ebene für die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten:

- |   |   |
|---|---|
| a) $y' = y; -2 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 5$ | b) $y' = x y; -3 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 3$ |
|---|---|

## 4.2 Differentialgleichung 1. Ordnung, Trennung der Variablen

Schon die Durchführung einer unbestimmten Integration kann sehr mühsam sein, wenn es überhaupt gelingt, eine geschlossene Form des Ergebnisses zu finden. Da eine unbestimmte Integration nur ein einfacher Fall einer Differentialgleichung 1. Ordnung ist, ist zu erwarten, dass hier die Lösungsprobleme größer sind. Hier sollen jedoch nur jene in den Anwendungen häufig auftretenden Differentialgleichungen 1. Ordnung behandelt werden, die durch die Methode der "Trennung der Variablen" gelöst werden können, sowie solche, die "linear" sind. In diesen beiden Fällen kann die Lösung verhältnismäßig leicht gelingen.

### Beispiel 4.6 : Methode der Trennung der Variablen

Löse folgende Anfangswertaufgabe:

**a)**  $x + y \cdot y' = 0$ ,  $y(4) = 3$ ;

**b)**  $y' + 2y = 1$ ,  $y(0) = 3$ .

#### Lösung

Zu **a)** Wir ersetzen zuerst  $y'$  durch den Differentialquotient  $\frac{dy}{dx}$ :  $x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ .

Multiplikation mit  $dx$  ergibt:  $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$ . Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$x \cdot dx = -y \cdot dy,$$

so enthält die linke Seite der Gleichung nur die Variable  $x$  und ihr Differential  $dx$ , die rechte nur die Variable  $y$  und ihr Differential  $dy$ . *Die Variablen konnten somit getrennt werden, was dieser Methode ihren Namen gab.* Beide Seiten können nun unbestimmt integriert werden:

$$\int x \, dx = - \int y \, dy.$$

$$\frac{x^2}{2} + C_1 = -\frac{y^2}{2} + C_2.$$

Die auf beiden Seiten anfallenden Integrationskonstanten können zu einer einzigen Integrationskonstante zusammengefasst werden. Aus diesem Grund wird die Integrationskonstante in der Regel auch nur auf einer der beiden Gleichungsseiten angeschrieben. Mit  $\bar{C} = C_2 - C_1$  erhält man

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \bar{C} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = C \quad \text{mit} \quad C = 2\bar{C}.$$

Die Integrationskonstante wurde zuerst mit  $\bar{C}$  bezeichnet. Bei der Lösung einer Differentialgleichung kommt es immer wieder vor, dass eine Integrationskonstante im Lauf der Rechnung umbezeichnet wird. Dies kann auch mehrmals geschehen. Die Bezeichnung "C" wird gerne in der Endfassung der Lösung verwendet.

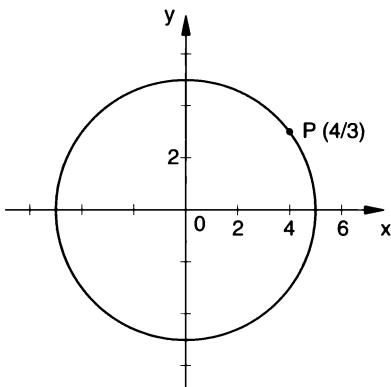
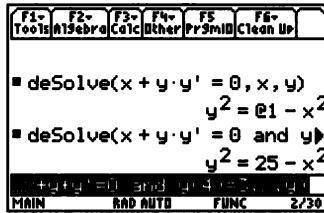
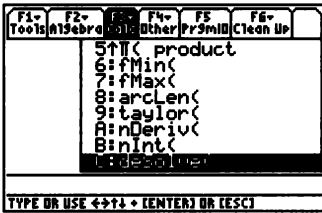


Abb. 4.9 Lösungskurven zu  $x + y \cdot y' = 0$

Dies ist die Gleichung eines Ursprungskreises mit dem Radius  $r = \sqrt{C}$ . Für  $C < 0$  gibt es keine Lösungen. Die graphische Darstellung der allgemeinen Lösung umfasst somit alle konzentrischen Kreise mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Abb. 4.8 zeigt das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

*Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $y(4) = 3$ :*  $4^2 + 3^2 = C \Rightarrow C = 25$ . Die Lösung der vorliegenden Anfangswertaufgabe, die gewünschte partikuläre Lösung, ist somit ein Ursprungskreis mit dem Radius  $r = \sqrt{C} = 5$ :  $x^2 + y^2 = 25$ . Abb. 4.9 zeigt einige Lösungskurven der allgemeinen Lösung sowie in Farbe die partikuläre Lösung für die gegebene Anfangsbedingung.



Mit **F3** **C** (C: deSolve) leitet man die Eingabe einer Differentialgleichung zu einer symbolischen Lösung ein. de steht für differential equation. Der Ableitungsstrich wird mit **2nd** **=** (**2nd** **B** beim Voyage 200) aufgerufen. Nach Eingabe der Differentialgleichung müssen die unabhängige Variable (hier x), danach die abhängige Variable (hier y) mitgeteilt werden. Eine Integrationskonstante wird mit @1, @2, usw. ausgegeben. Durch **F1** **8** (8: Clear Home) wird die Integrationskonstante auf @1 zurückgesetzt. Die Anfangsbedingung wird an die Differentialgleichung nach Schreiben des Wortes and angefügt.

Zu b)  $y' + 2y = 1$  wird wiederum umgeschrieben in  $\frac{dy}{dx} + 2y = 1$ .

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2y \quad | \cdot dx$$

$$dy = (1 - 2y) dx$$

$$\frac{dy}{1 - 2y} = dx \quad \text{Damit sind die Variablen getrennt!}$$

$$\int \frac{dy}{1 - 2y} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln |2y - 1| = x + \bar{C} \dots \text{ Statt } |1 - 2y| \text{ kann auch } |2y - 1| \text{ stehen.}$$

Bevor wir zur Auflösung der Gleichung nach y beide Seiten der Gleichung zur Potenz e erheben (entlogarithmieren), empfiehlt es sich, die Gleichung mit -2 zu multiplizieren:

$$\ln |2y - 1| = -2x - 2\bar{C} \quad | \text{ zur Basis e erheben:}$$

$$|2y - 1| = e^{-2x - 2\bar{C}} = e^{-2x} \cdot e^{-2\bar{C}}$$

$$2y - 1 = \pm e^{-2\bar{C}} \cdot e^{-2x}$$

$$y = \frac{1}{2} + \left( \pm \frac{1}{2} e^{-2\bar{C}} \right) \cdot e^{-2x}$$

Setzt man nun  $C = \pm \frac{1}{2} e^{-2\bar{C}}$ , so erhält man  $y = \frac{1}{2} + C \cdot e^{-2x}$ . Die Konstante kann, weil  $\bar{C}$  beliebig ist, jede Zahl  $\neq 0$  sein.

Durch Einsetzen erkennt man, dass auch  $y = 0$  eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Diese spezielle Lösung lässt sich in der Form  $y = \frac{1}{2} + C \cdot e^{-2x}$  einschließen, wenn  $C = 0$  ist.

Daher erhält man schließlich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = \frac{1}{2} + C \cdot e^{-2x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

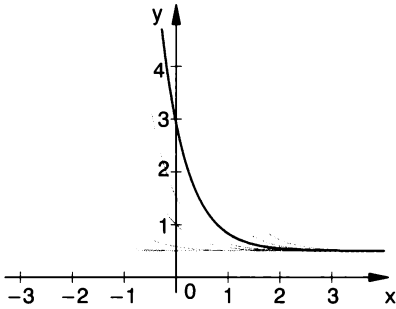


Abb. 4.10 Lösungskurven zu  $y' + 2y = 1$

Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$y(0) = \frac{1}{2} + C \cdot e^{-2 \cdot 0} = \frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{5}{2}.$$

Damit lautet die Lösung der gestellten Anfangswertaufgabe:

$$y = \frac{1}{2} (1 + 5 \cdot e^{-2x}).$$

Abb. 4.10 zeigt Lösungskurven der allgemeinen Lösung sowie in Farbe die gesuchte partikuläre Lösung.

### Methode der Trennung der Variablen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung der Art  $y' = f(x) \cdot g(y)$  lässt sich wie folgt lösen:

- (1) Man schreibt  $\frac{dy}{dx}$  statt  $y'$  (falls noch nicht der Fall) und trennt die Variablen;
- (2) Integration;
- (3) Auflösung der allgemeinen Lösung nach  $y$  (wenn möglich).

### Beispiel 4.7 : Exponentielles Abklingen einer Größe

a) Löse die Anfangswertaufgabe (Fortsetzung Beispiel 4.2, Seite 123):

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad u_C(0) = U_0 \text{ für } t \geq 0 \text{ s.}$$

b) Ein 1000 l fassender Behälter (Abb. 4.12) ist mit Wasser gefüllt, in dem 20 kg Salz gelöst sind. Ab  $t = 0$  min fließt in den Behälter reines Wasser mit einer Stärke von 5 l/min. Im gleichen Ausmaß fließt Salzlösung aus dem Behälter ab. Gib den zeitlichen Verlauf der Salzmasse  $m(t)$  im Behälter an, wenn die Salzlösung durch ein Rührwerk stets homogen verteilt gehalten wird. Wie viel Salz befindet sich nach 2 Stunden noch im Behälter?

### Lösung

Zu a) Die Lösung kann durch Trennung der Variablen erfolgen. Da der Buchstabe  $C$  die Kapazität des Kondensators bezeichnet, wird die Integrationskonstante mit  $\bar{K}$  bzw.  $K$  bezeichnet:

$$RC \, du_C + u_C \, dt = 0$$

$$\frac{du_C}{u_C} = -\frac{1}{RC} \cdot dt$$

$$\int \frac{du_C}{u_C} = \int -\frac{1}{RC} \cdot dt$$

$$\ln |u_C| = -\frac{1}{RC} \cdot t + \bar{K}$$

$$|u_C| = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t + \bar{K}} = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \cdot e^{\bar{K}}$$

$$u_C = \pm e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \cdot e^{\bar{K}}.$$

Setzt man  $K = \pm e^{\bar{K}}$ , erhält man als allgemeine Lösung  $u_C(t) = K e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$ . Wegen  $u_C(0) = U_0$

ist  $U_0 = K e^0 = K$ . Daher lautet die gewünschte partikuläre Lösung:  $u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$ .

Abb. 4.11 zeigt den Verlauf der Kondensatorspannung  $u_C$  zusammen mit der Tangente zur Zeit  $t = 0$ , welche die  $t$ -Achse zur Zeit  $\tau = R \cdot C$  ("Zeitkonstante") schneidet.

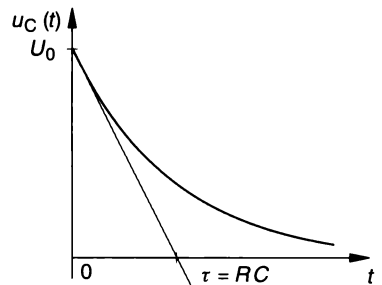


Abb. 4.11  $u_C$  klingt exponential ab



Zu **b)**  $m(t)$  ist die Salzmasse im 1000 l fassenden Behälter nach  $t$  Minuten. Wenn in 1 Minute 5 l Lösung abfließen, so fließt in der kleinen Zeitspanne  $dt$  Minuten die Menge  $5 \cdot dt$  Liter ab, welche die Salzmasse  $\frac{m(t)}{1000} \cdot 5 dt$  enthält.

Bezeichnet  $dm$  die Änderung der Salzmasse während  $dt$ , so gilt  $dm = -5 \cdot \frac{m(t)}{1000} \cdot dt$ . Das negative Vorzeichen trägt der Tatsache Rechnung, dass die Salzmasse während  $dt$  abnimmt. Formt man um, so erhält man:

$$\frac{dm}{dt} + \frac{5}{1000} m(t) = 0.$$

Dazu kommt die Anfangsbedingung:  $m(0) = 20 \text{ kg}$ . Diese Differentialgleichung für  $m(t)$  besitzt die gleiche Struktur wie die Entladung des Kondensators. Die Lösung erfolgt in gleicher Weise; es ergibt sich:  $m(t) = 20 \text{ kg} \cdot e^{-0,005 \text{ min}^{-1} t}$ .

Salzmasse nach 2 Stunden:  $m(t) = 20 \text{ kg} \cdot e^{-0,005 \text{ min}^{-1} 120 \text{ min}} \approx 11,0 \text{ kg}$ .

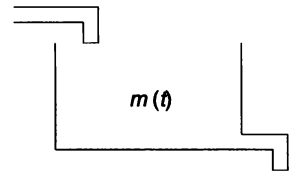


Abb. 4.12 "Entladen" des Salzgehaltes

### Differentialgleichung des exponentiellen Abklingens

In der Natur beobachtet man häufig ein exponentielles Abklingen einer Größe  $y$  in Abhängigkeit einer anderen Größe  $x$  (oft die Zeit  $t$ , aber auch ein Weg  $s$ , ...). Die zugehörige Differentialgleichung lautet:  $\frac{dy}{y} = -k \cdot dx$  (Konstante  $k > 0$ ). Die relative Abnahme von  $y$  hängt nicht von der Stelle  $x$  (Zeit, Weg, ...) ab, sondern ist nur proportional der Zunahme  $dx$  der unabhängigen Variablen.

*Beispiele:* Abkühlung eines Körpers, Entladen eines Kondensators, radioaktiver Zerfall, Dämpfung von Signalen oder Wellen, Abnahme des Luftdruckes ....

### Beispiel 4.8 : Freier Fall mit Luftwiderstand

Ein Fallschirmspringer, der mit Ausrüstung eine Masse  $m = 90 \text{ kg}$  besitzt, springt zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  aus dem Flugzeug. Der Fallschirm möge ab  $t = 0 \text{ s}$  voll wirksam sein. Es wird angenommen, dass der Luftwiderstand  $F_R$  von Fallschirm und Springer proportional zum Quadrat der momentanen Fallgeschwindigkeit  $v$  ist:  $F_R = k \cdot v^2$  mit  $k = c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A = 36 \text{ kg/m}$  ( $c_w$  Widerstandsbeiwert,  $\rho$  Dichte der Luft,  $A$  Stirnfläche quer zur Fallrichtung). Gib eine Formel für die Fallgeschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von der Fallzeit  $t$  an ( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ).

#### Lösung

Nach dem Grundgesetz der Mechanik gilt (Abb. 4.13):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_G - F_R = m \cdot g - k \cdot v^2.$$

$F_G = m \cdot g$  ist die Gewichtskraft des Körpers mit  $g$  als Fallbeschleunigung. Zum Unterschied zu Beispiel 4.1, Seite 122, wird nun der Weg  $s$  nach unten positiv genommen, wodurch die nach unten gerichtete Gewichtskraft beschleunigend und die nach oben gerichtete Reibungskraft verzögernd wirkt. Daher ist die Gewichtskraft positiv und die Reibungskraft negativ anzusetzen.

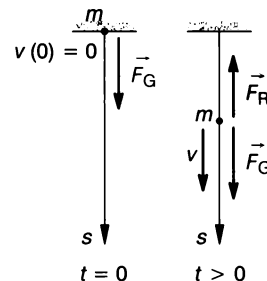


Abb. 4.13 Freier Fall mit Luftwiderstand

Daraus erhält man eine Differentialgleichung für die Fallgeschwindigkeit  $v$ :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2.$$

Man erkennt, dass die Beschleunigung  $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$  null wird, wenn  $v = v_S = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ . Dies ist der Grenzwert der Fallgeschwindigkeit, die sich für  $t \rightarrow \infty$  ergibt: der Körper *sinkt* nach hinreichend langer Zeit mit konstanter Geschwindigkeit  $v_S$ .

Einsetzen der vorgegebenen Werte ergibt bei Weglassung der Einheiten:

$$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{36}{90} \cdot v^2 = 10 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{25}\right).$$

Wir halten zuerst fest, dass die Fallgeschwindigkeit  $v$  nur zunehmen kann (wenn auch immer weniger); daher ist  $\frac{dv}{dt} > 0$ . Daraus folgt für die rechte Seite der Differentialgleichung, dass  $10 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{25}\right) > 0$  oder schließlich  $v < 5$ .

Die Differentialgleichung kann wieder durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\frac{dv}{1 - \frac{v^2}{25}} = 10 dt \text{ und weiters } \int \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{25}} = \int 10 dt.$$

Substituiert man im links vom Gleichheitszeichen stehenden Integral  $u = \frac{v}{5}$ , so erhält man

$$\text{mit } du = \frac{dv}{5}: \int \frac{5 du}{1 - u^2} = \int 10 dt \text{ sowie weiters nach Herausheben und Kürzen}$$

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = 2 \int dt. \text{ Integration (Integraltafel, auch durch Partialbruchzerlegung) ergibt:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| = 2t + \bar{C} \text{ oder } \ln \left| \frac{\frac{v}{5} + 1}{\frac{v}{5} - 1} \right| = 4t + 2\bar{C}.$$

Da  $\frac{v}{5} - 1 < 0$  (wegen  $v < 5$ ) muss vor dem Weglassen der Betragsstriche statt  $\frac{v}{5} - 1$  im Nenner  $1 - \frac{v}{5}$  geschrieben werden. Mit  $C = 2\bar{C}$  folgt daher als allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $\ln \frac{1 + \frac{v}{5}}{1 - \frac{v}{5}} = 4t + C$  oder  $\ln \frac{5+v}{5-v} = 4t + C$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingung:  $v(0) = 0$ :  $\ln \frac{5+0}{5-0} = 4 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$ .

Damit lautet die gewünschte partikuläre Lösung:  $\ln \frac{5+v}{5-v} = 4t$ . Diese Gleichung kann durch Entlogarithmieren nach  $v$  aufgelöst werden:  $\frac{5+v}{5-v} = e^{4t}$ . Daraus erhält man für die Fallgeschwindigkeit:  $v = 5 \cdot \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1} = 5 \cdot \frac{1 - e^{-4t}}{1 + e^{-4t}}$ .

Man erkennt, dass  $v(t) \rightarrow 5 \text{ m/s}$  als Grenzggeschwindigkeit  $v_S$  für  $t \rightarrow \infty$ . Formt man den Term für  $v$  durch Erweitern des Bruches mit  $e^{2t}$  in  $v = 5 \cdot \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}$  um und berücksichtigt, dass  $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ , so kann man auch schreiben:  $v(t) = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \tanh 2t, t \geq 0$ .

Abb. 4.14 zeigt den zeitlichen Verlauf der Fallgeschwindigkeit  $v(t)$ . Zum Vergleich ist der Verlauf ohne Luftwiderstand grün eingezeichnet.

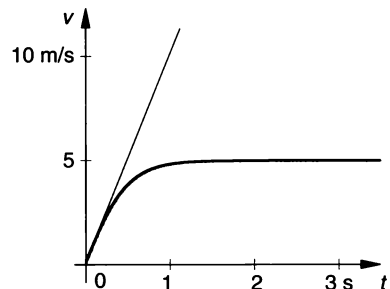


Abb. 4.14  $v(t)$  mit und ohne Luftwiderstand

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean	Up

$$\text{deSolve}\left\{v' = 10 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{25}\right) \text{ and } v(0) = 0, t, \right.$$

$$\frac{\ln(-(v-5))}{10} - \frac{\ln(v+5)}{10} = \frac{-2 \cdot t}{5}$$

$$\left. -v^2/25 \text{ and } v(0)=0, t, v \right| v < 5$$

MAIN      RND AUTO      FUNC 1/20

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean	Up

$$\text{deSolve}\left\{v' = 10 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{25}\right) \text{ and } v(0) = 0, t, \right.$$

$$\frac{\ln(-(v-5))}{10} - \frac{\ln(v+5)}{10} = \frac{-2 \cdot t}{5}$$

$$\text{solve}\left\{\frac{\ln(-(v-5))}{10} - \frac{\ln(v+5)}{10} = \frac{-2 \cdot t}{5}, v\right.$$

$$\left. v = 5 \cdot \tanh(2 \cdot t) \text{ and } \tanh(2 \cdot t) \geq -1 \right.$$

$$\left. -5 \right) / 10 - \ln(v+5) / 10 = -2 \cdot t / 5, v$$

MAIN      RAD AUTO      FUNC 2/20

Bei der Eingabe des Anfangswertproblems muss mitgeteilt werden, dass  $v < 5$  ist. Die Lösung wird in impliziter Form ausgegeben. Für eine explizite Angabe kann die solve-Anweisung benutzt werden. Bei der Lösung für  $v$  wird zusätzlich noch die Bedingung  $\tanh(2t) \geq -1$  angegeben, was für eine reelle Variable  $t$  jedoch stets erfüllt ist.

### Beispiel 4.9 : Logistisches Wachstum

Ausgehend von einem Schüler breitet sich eine Nachricht in einer Schule mit 1000 Schülern aus. Als Modellannahme der Ausbreitung soll gelten, dass die Zunahme der informierten Schüler pro Tag sowohl proportional zur Anzahl der bereits informierten Schüler als auch proportional zur Anzahl der noch nicht informierten Schüler ist. Der Proportionalitätsfaktor  $k$  wird mit 0,0008 angenommen.

#### Lösung

Obwohl die Anzahl der Schüler eine diskrete Größe ist, nähern wir diese Größe durch eine kontinuierliche Funktion  $N(t)$ . Dabei ist  $t$  die Zeit in Tagen nach Beginn ( $t = 0$ ) der Nachrichtenausbreitung. Somit:  $\frac{dN}{dt} = 0,0008 \cdot N(1000 - N)$ , wobei noch gilt:  $N(0) = 1$ .

Diese Anfangswertaufgabe ist durch Trennung der Variablen lösbar.

$$\frac{dN}{N(1000 - N)} = \frac{8 \cdot dt}{10000}$$

Durch Partialbruchzerlegung ergibt sich  $\frac{dN}{1000N} - \frac{dN}{1000 \cdot (N - 1000)} = \frac{8 \cdot dt}{10000}$ .

Daraus folgt durch Integration  $\ln N - \ln |N - 1000| = \frac{4}{5} t + \bar{C}$ .

Da  $N < 1000$ , ist  $\ln |N - 1000| = \ln(1000 - N)$ . Somit:  $\ln \frac{N}{1000 - N} = \frac{4}{5} t + \bar{C}$ .

$$\frac{N}{1000 - N} = C \cdot e^{4t/5} \text{ mit } C = e^{\bar{C}}$$

Auflösung nach  $N$  führt zu  $N(t) = \frac{C \cdot 1000}{C + e^{-4 \cdot t/5}}$ . Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$N(0) = 1$  ergibt  $C = \frac{1}{999}$  und damit schließlich:  $N(t) = \frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{-0,8 \cdot t}}$ .

Abb. 4.15 zeigt den Verlauf der Zunahme von  $N(t)$ . Man spricht hier von einem **logistischen Wachstum**. Es ist begrenzt, unterscheidet sich aber durch seinen charakteristischen s-förmigen Graphen deutlich vom begrenzten exponentiellen Wachstum (Beispiel: Laden eines Kondensators). Ein logistisches Wachstum gemäß  $\frac{dN}{dt} = k \cdot N(a - N)$  wird öfter als Modell für das Anwachsen der Bevölkerungszahl, das Ausbreiten einer Krankheit oder das Anwachsen der Anzahl eines Konsumartikels verwendet.

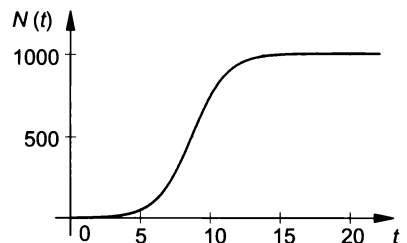


Abb. 4.15 Eine logistische Kurve

### Im Überblick: Differentialgleichungen 1. Ordnung – Trennbare Variable

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung lässt stets eine **Trennung der Variablen** zu, wenn sie vom Typ  $y' = f(x) \cdot g(y)$  ist. Dazu schreibt man (falls noch nicht der Fall)  $\frac{dy}{dx}$  statt  $y'$  und trennt die Variablen, sodass auf jeder Seite der Differentialgleichung nur eine der beiden Variablen auftritt. Danach wird auf beiden Seiten der Gleichung integriert. Schließlich kann eine Auflösung nach der Variablen  $y$  versucht werden.

Für eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (siehe nächster Abschnitt) gibt es besondere Lösungsverfahren. In vielen Fällen sind Differentialgleichungen **symbolisch nicht lösbar**, sodass man auf numerische Verfahren zurückgreifen muss.

#### Aufgaben

- 4.6** Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung im angegebenen Bereich der  $(x, y)$ -Ebene für die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, skizziere danach im Richtungsfeld jene Lösungskurve, die durch den Punkt  $P(0/1)$  verläuft und löse danach die Anfangswertaufgabe.
- a)  $y' = 4 - y, -1 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 5$       b)  $y' = -x \cdot y, -3 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2$   
 c)  $y' = 1 + y^2, -3 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 4$       d)  $y' = \frac{1}{3}y(3 - y), -1 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 4$   
 e)  $y' = x \cdot (1 - y), -3 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 4$       f)  $y' \cdot (x + 2) = y, -1 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 4$
- 4.7** Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Trennung der Variablen:
- a)  $1 + x^2 \cdot y' = 0$       b)  $y' \cdot \sqrt{x} = \frac{y}{2}$       c)  $y' \cdot \sqrt{x} - 2y = 1$   
 d)  $y' - x = 2xy$       e)  $2y' = \frac{y}{\sqrt{1-x}}$       f)  $y' + x \cdot y^2 = 0$   
 g)  $y' - y^2 \cdot \cos x = 0$       h)  $y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = 0$       i)  $y' \cdot \sin x + y = 0$
- 4.8** Löse die folgende Anfangswertaufgabe durch Trennung der Variablen:
- a)  $x \cdot y^2 + y' = 0; y(1) = 1$       b)  $y' + y = 1; y(0) = 3$   
 c)  $y' \cdot \sqrt{1 + 2x} = y; y(0) = 1$       d)  $y' = \sqrt{y}; y(1) = 0$   
 e)  $y' \cdot \sqrt{x} = 1 - y; y(0) = 2$       f)  $y' \cdot \sqrt{2x + y} = 2; y(0) = 1$   
 g)  $x \cdot y' + x \cdot y = y; y(1) = 1$       h)  $y' \cdot \sqrt{x} + 2y = 1; y(0) = 1$
- 4.9** *Radioaktiver Zerfall:*  $N(t)$  ist die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t$  noch nicht zerfallenen Atomkerne einer radioaktiven Substanz. Dann ist die Anzahl  $dN$  der Kerne, die in der auf  $t$  folgenden kleinen Zeitspanne  $dt$  zerfallen, proportional zu  $N(t)$  und zu  $dt$ :  $dN = -\lambda N dt$ . Der Proportionalitätsfaktor wurde mit  $\lambda$  ("Zerfallskonstante") bezeichnet; das negative Vorzeichen ist nötig, weil  $dN$  negativ ist. Daraus folgt die Differentialgleichung  $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ . Löse allgemein das Anfangswertproblem, wenn  $N_0$  die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t = 0$  s nicht zerfallenen Kerne ist.
- 4.10** *Radiocarbon Dating:* In the atmosphere, the ratio of *radioactive* carbon C14 (half-life 5730 years) and *ordinary* carbon C12 is nearly *constant*. When an organism dies ( $t = 0$ ), the absorption of C14 by breathing and eating terminates. What should therefore be the content of C14 in a fossilized bone with an age of 8000 years?  
*Hint:* The differential equation of radioactive decay is  $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$  with  $N(0) = N_0$ , the initial amount of C14. Compute the ratio  $\frac{N}{N_0}$  in percent.

- 4.11 Barometrische Höhenformel:** Der Luftdruck  $p$  nimmt mit zunehmender Meereshöhe  $h$  ab. Unter der Voraussetzung einer konstanten Temperatur gilt die Differentialgleichung  $\frac{dp}{dh} = -k p$  mit der Konstanten  $k = 1,252 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$  ("Normatmosphäre").
- Löse das Anfangswertproblem, wenn  $p(0) = p_0 = 1013 \text{ mbar}$ .
  - Bestimme die "Halbwertshöhe"  $h_{1/2}$ , das ist jene Höhenzunahme, nach der der Druck auf die Hälfte des jeweiligen Ausgangswertes sinkt.
  - Atemprobleme treten auf, wenn  $p$  nur noch etwa 40% von  $p_0$  ist. Ab welcher Höhe ist dies der Fall?
  - Die *Internationale Höhenformel*  $p = 1013 \text{ mbar} \cdot \left(1 - \frac{6,5}{288 \text{ km}} h\right)^{5,255}$  berücksichtigt die Temperaturabnahme mit zunehmender Höhe. Sie gilt bis zur Tropopause ( $h = 11 \text{ km}$ ). Vergleiche die barometrische und die internationale Höhenformel für  $h = 3 \text{ km}$  und  $h = 8 \text{ km}$ .

- 4.12** Bei einem Motorboot, das sich gleichförmig mit  $v_0 = 20 \text{ km/h}$  in einem stehenden Gewässer bewegt, wird zur Zeit  $t = 0 \text{ s}$  der Motor ausgeschaltet. Es wird angenommen, dass der Reibungswiderstand  $F_R$ , den das Boot im Wasser erfährt, proportional zur Geschwindigkeit  $v$  des Bootes ist, also  $F_R = b \cdot v$ .
- Die Differentialgleichung für die Bootsgeschwindigkeit  $v$  ergibt sich für  $t \geq 0 \text{ s}$  aus dem dynamischen Grundgesetz  $m \cdot \frac{dv}{dt} = -b \cdot v$  oder  $\frac{dv}{dt} = -k \cdot v$  mit  $k = \frac{b}{m}$ . Löse die Differentialgleichung unter Berücksichtigung der angegebenen Anfangsbedingung.
  - Bestimme die Konstante  $k$ , wenn das Boot 10 Sekunden nach dem Ausschalten des Bootsmotors nach geradliniger Fahrt noch eine Geschwindigkeit von  $12 \text{ km/h}$  besitzt.
  - Welchen Weg legt das Boot nach dem Abschalten des Motors in der ersten Minute, welchen in der zweiten Minute zurück?

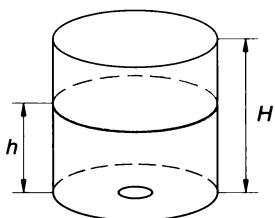


Abb. 4.16

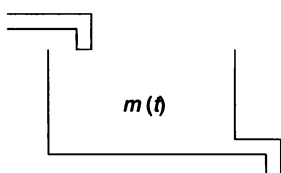


Abb. 4.17

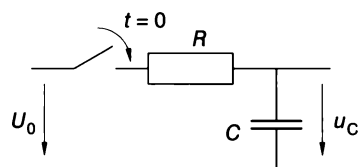


Abb. 4.18

- 4.13** Ein zylindrischer Tank (Abb. 4.16) mit dem Radius  $R = 1 \text{ m}$  und der Höhe  $H = 2 \text{ m}$  ist ganz mit Wasser gefüllt. Zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  wird ein kreisrundes Loch mit dem Radius  $r = 10 \text{ cm}$  im Boden geöffnet, aus dem nun das Wasser abfließt. Bei einem reibungsfreien Abfließen gilt für das Wasservolumen  $V(t)$  im Tank die Differentialgleichung  $\frac{dV}{dt} = -\mu A_0 \sqrt{2 g h}$ , wobei  $\mu$  die sogenannte Ausflusszahl,  $A_0 = \pi \cdot r^2$  der Flächeninhalt der Ausflussöffnung,  $g$  die Fallbeschleunigung und  $h$  Wasserhöhe sind.
- Löse die Differentialgleichung für  $h$ , wenn  $\mu = 0,6$  ist.
  - Zeichne die Funktion  $h(t)$ .
  - Nach welcher Zeit ist der Behälter leer?

- 4.14** Ein 1000 l fassender Behälter (Abb. 4.17) ist anfänglich ( $t = 0$  min) mit reinem Wasser gefüllt. In den Behälter fließt eine Salzlösung mit einer Stärke von 5 l/min, die pro Liter 20 g Salz enthält. Im gleichen Ausmaß fließt Lösung aus dem Behälter ab. Gib den zeitlichen Verlauf der Salzmasse  $m(t)$  im Behälter an, wenn die Salzlösung durch ein Rührwerk stets homogen verteilt gehalten wird.

*Hinweis:* Ist  $m(t)$  die Salzmasse in kg zur Zeit  $t$ , so tritt in der auf  $t$  folgenden kleinen Zeitspanne  $dt$  durch den Zu- und Abfluss folgende Änderung  $dm$  von  $m$  ein:

$$dm = 5 \cdot 0,02 \cdot dt - 5 \cdot \frac{m}{1000} dt, \quad m(0) = 0.$$

- 4.15** Ein Fallschirmspringer (Masse  $m = 90$  kg mit Ausrüstung) springt mit dem Fallschirm ab. Der Fallschirm öffnet sich, wenn der Fallschirmspringer eine Geschwindigkeit von 10 m/s besitzt. Dies soll zum Zeitpunkt  $t = 0$  s geschehen. Für den Luftwiderstand  $F_R$  gelte:  $F_R = k \cdot v^2$  mit  $k = 36$  kg/m. Setze  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>. Bestimme die Fallgeschwindigkeit  $v(t)$ .

*Hinweis:* Beispiel 4.8, Seite 132.

- 4.16** Ein Fallschirmspringer (Masse  $m = 90$  kg mit Ausrüstung) springt mit dem Fallschirm zur Zeit  $t = 0$  s ab. 5 Sekunden lang fällt er aus der Ruhe ohne Schirm bei einem Luftwiderstand von  $F_R = k \cdot v^2$  mit  $k = 0,045$  kg/m. Danach wird der Schirm sofort voll wirksam, der Reibungskoeffizient  $k$  ist 36 kg/m. Bestimme die Fallgeschwindigkeit  $v(t)$  ( $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>).

*Hinweis:* Beispiel 4.8, Seite 132.

- 4.17** Ein Ball der Masse  $m = 0,18$  kg wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  s mit einer Geschwindigkeit  $v_0 = 30$  m/s senkrecht nach oben geworfen. Er erfährt einen Luftwiderstand  $F_R = k \cdot v^2$  mit  $k = 0,002$  kg/m.

- Bestimme den zeitlichen Verlauf der Steiggeschwindigkeit  $v$ .
- Wann erreicht der Ball seinen höchsten Punkt?
- Berechne die maximale Höhe.

Führe die Rechnung mit  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup> aus.

*Hinweis:*  $m \frac{dv}{dt} = -m g - k v^2$  ist die Differentialgleichung für die Bewegung nach oben (Geschwindigkeit  $v$  und Weg  $s$  nach oben positiv).

- 4.18** An einem RC-Glied (Abb. 4.18) liegt eingangsseitig die konstante Spannung  $U_0$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  s wird der Schalter geschlossen, wodurch die Aufladung des Kondensators beginnt. Bestimme den zeitlichen Verlauf der Kondensatorsspannung  $u_C$  ("Sprungantwort"), wenn  $R = 1$  k $\Omega$ ,  $C = 50$   $\mu$ F und  $U_0 = 10$  V ist.

*Hinweis:*  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0; \quad u_C(0) = 0.$

- 4.19** Die Anzahl  $N$  der Filialen einer Handelskette, die ein neues Kassensystem verwenden, lässt sich durch die Anfangswertaufgabe  $\frac{dN}{dt} = 0,002 \cdot N(200 - N)$ ,  $N(0) = 1$  beschreiben.  $t$  wird in Monaten gerechnet. Wie groß ist  $N$  nach 12 Monaten?

- 4.20** Die folgende logistische Gleichung wird als Modell für die Bevölkerungsentwicklung in einer Stadt verwendet:  $\frac{dN}{dt} = 5 \cdot 10^{-7} N(10^5 - N)$  mit  $N(0) = 5000$ ,  $t$  in Jahren. Nach wie vielen Jahren hat die Bevölkerung um 25% zugenommen?

### 4.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heißt **linear**, wenn sie in der Form

$$y' + p \cdot y = s(x)$$

geschrieben werden kann. Der Faktor  $p$  heißt **Koeffizient** der linearen Differentialgleichung. Ist der Koeffizient eine Konstante, so spricht man von einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit **konstantem Koeffizienten**.

Die Funktion  $s(x)$  wird oft als **Störfunktion** bezeichnet. Ist die Störfunktion  $s(x)$  identisch gleich null, so heißt die lineare Differentialgleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.

Bei einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung treten also  $y$  und  $y'$  linear, d.h. in 1. Potenz auf, wobei aber das "gemischte Produkt"  $y' \cdot y$  nicht auftreten darf. Um zu erkennen, ob eine Differentialgleichung 1. Ordnung linear ist, muss man sie auf die Form  $y' + p \cdot y = s(x)$  bringen können!

(1) Beispiele für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' + x^2 \cdot y = 0 \quad \text{Koeffizient } p = x^2 \text{ nicht konstant, homogen, da } s(x) \text{ gleich null.}$$

$$y' + 2 \cdot y = 1 \quad \text{Koeffizient } p = 2 \text{ konstant; inhomogen, da } s(x) = 1 \neq 0.$$

$$y' + \frac{1}{x} y = \sin x \quad \text{Koeffizient } p = \frac{1}{x} \text{ nicht konstant; inhomogen, da } s(x) = \sin x \neq 0.$$

(2) Beispiele für nichtlineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' + y^2 = 0 \quad y \text{ tritt in 2. Potenz auf.}$$

$$y' + \frac{x}{y} = 0 \quad y \text{ tritt im Nenner auf, d.h. mit der Hochzahl } -1.$$

$$y \cdot y' + 1 = 0 \quad \text{Es tritt das gemischte Produkt } y' \cdot y \text{ auf.}$$

Ist die unabhängige Variable die Zeit  $t$ , so würde ein nicht konstanter Koeffizient  $p$  in der Differentialgleichung 1. Ordnung bedeuten, dass das damit beschriebene *System* nicht zeitinvariant ist. Beispiel: Ein elektrischer Widerstand nimmt durch Erwärmung zu, ein Körper verliert an Masse. Für die Praxis sind lineare und zeitinvariante Systeme ("LTI-Systeme", L = linear, TI = time-invariant) von großer Bedeutung. Differentialgleichungen, die solche Systeme beschreiben, sind linear und haben konstante Koeffizienten.

#### Beispiel 4.10 : Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Löse folgende Anfangswertaufgabe:  $y' + 2 \cdot y = 0$ ;  $y(1) = 3$ .

#### Lösung

1. *Lösungsvariante*: Bei homogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung kann stets die Methode der Trennung der Variablen angewendet werden.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-2 \cdot dx)$$

$$\ln |y| = -2x + \bar{C}$$

$$|y| = e^{-2x} \cdot e^{\bar{c}}$$

$y = \pm e^{\bar{c}} \cdot e^{-2x} = C \cdot e^{-2x}$  mit  $C = \pm e^{\bar{c}}$  als allgemeine Lösung.

Anfangsbedingung:  $y(1) = C \cdot e^{-2 \cdot 1} = 3 \Rightarrow C = 3 \cdot e^2$ .

Somit lautet die gewünschte partikuläre Lösung:  $y = 3 \cdot e^2 \cdot e^{-2x} = 3 \cdot e^{2 \cdot (1-x)}$ .

2. **Lösungsvariante:** Besitzt die homogene lineare Differentialgleichung einen **konstanten** Koeffizienten  $p$ , so kann für ihre allgemeine Lösung einfacher ein **Exponentialansatz** gemacht werden:

$$y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Man setzt nun in die Differentialgleichung ein und bestimmt die Konstante  $\lambda$ . Wegen

$$y' = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \text{ ergibt sich}$$

$$C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + 2 C \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0 \text{ oder } C \cdot e^{\lambda \cdot x} (\lambda + 2) = 0.$$

Da  $e^{\lambda \cdot x}$  für keinen Wert  $x$  null ist und eine Lösung mit  $C = 0$  in der Regel keine praktische Bedeutung hat, folgt nach dem Produkt-Null-Satz:  $\lambda + 2 = 0$ , woraus  $\lambda = -2$  folgt. Die allgemeine Lösung lautet damit:  $y = C \cdot e^{-2 \cdot x}$ .

*Anmerkung:*

Die Gleichung  $\lambda + 2 = 0$  wird auch als die **charakteristische Gleichung** der Differentialgleichung bezeichnet. Die Methode des Exponentialansatzes wird besonders bei linearen Differentialgleichungen 2. oder höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten angewendet.

**Beispiel 4.11 : Entladung eines Kondensators**  
(siehe Beispiel 4.7 a, Seite 131)

Löse die Anfangswertaufgabe  $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ ,  $u_C(0) = U_0$  für  $t \geq 0$  s (Abb. 4.19).

**Lösung**

Exponentialansatz:  $u_C = K \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ;  $\frac{du_C}{dt} = K \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}$ .

$$RC \cdot K \lambda e^{\lambda t} + K e^{\lambda t} = K e^{\lambda t} \cdot (\lambda \cdot RC + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Allgemeine Lösung:  $u_C = K \cdot e^{-t/RC}$ .

Anfangsbedingung  $u_C(0) = U_0 \Rightarrow u_C = U_0 \cdot e^{-t/RC}$ .

Eine homogene lineare Differentialgleichung beschreibt ein lineares System ohne äußere Anregung. Wirkt etwa wie in Abb. 4.20 eine äußere Spannung auf das System ein, so ist die beschreibende lineare Differentialgleichung *inhomogen*.

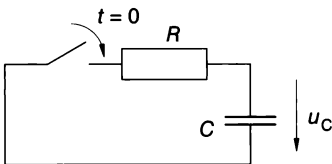


Abb. 4.19 Beschreibung durch eine homogene Differentialgleichung

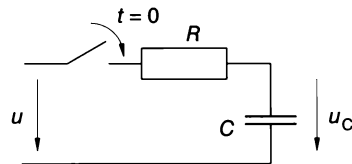


Abb. 4.20 Beschreibung durch eine inhomogene Differentialgleichung



### Beispiel 4.12 : Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung – Lösung durch Variation der Konstanten

Löse die Anfangswertaufgabe  $y' + 2y = 4x$ ;  $y(0) = 3$ .

#### Lösung

(1) Man löst zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung  $y' + 2y = 0$  (siehe Beispiel 4.10, Seite 138):  $y = C \cdot e^{-2x}$ .

Um in den folgenden Überlegungen leichter unterscheiden zu können, soll von nun an für die allgemeine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung die Bezeichnung  $y_h$  verwendet werden. Somit:  $y_h = C \cdot e^{-2x}$ .

(2) Für die allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung versucht man nun einen Ansatz, der "ähnlich" ist der allgemeinen Lösung  $y_h$  der homogenen Gleichung. Von LAGRANGE<sup>12</sup> stammt die Idee, dazu die Integrationskonstante  $C$  in  $y_h$  durch eine noch unbekannte Funktion  $K(x)$  zu ersetzen. Da dabei anstelle der Konstanten  $C$  eine veränderliche Funktion  $K(x)$  gesetzt wird, heißt dieses Verfahren **Variation der Konstanten**.

$$y = K(x) \cdot e^{-2x}; \quad y' = K'(x) \cdot e^{-2x} + K(x) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung:

$$K'(x) \cdot e^{-2x} + K(x) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} + 2 \cdot K(x) \cdot e^{-2x} = 4x$$

$$K'(x) \cdot e^{-2x} = 4x \quad \text{oder} \quad K'(x) = 4x \cdot e^{2x}.$$

Durch unbestimmte Integration, hier durch partielle Integration, folgt weiters:

$$K(x) = \int 4x e^{2x} dx = 4x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 4 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = 2x e^{2x} - e^{2x} + C = (2x - 1) \cdot e^{2x} + C.$$

Daraus folgt schließlich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = K(x) \cdot e^{-2x} = (2x - 1) \cdot e^{2x} \cdot e^{-2x} + C \cdot e^{-2x} = C \cdot e^{-2x} + 2x - 1.$$

Schließlich ist noch die gestellte Anfangsbedingung zu berücksichtigen:

$$y(0) = 3 = C \cdot e^{-2 \cdot 0} + 2 \cdot 0 - 1 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 4.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet daher:  $y = 4 \cdot e^{-2x} + 2x - 1$ .

Probe:  $(4 \cdot e^{-2x} + 2x - 1)' + 2 \cdot (4 \cdot e^{-2x} + 2x - 1) = 4x$ .

Bemerkenswert ist, dass die allgemeine Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung in Beispiel 4.12 als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung mit einer partikulären Lösung (nämlich jener mit  $C = 0$ ) der inhomogenen Lösung dargestellt werden kann! Der folgende grundlegende Satz drückt aus, dass diese Sumschreibweise der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung *allgemein gültig* für lineare Differentialgleichungen ist, was ohne Begründung angeführt wird.

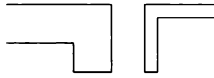
Die **allgemeine Lösung**  $y$  einer **inhomogenen** linearen Differentialgleichung 1. Ordnung (oder auch einer höheren Ordnung) ist als **Summe** der **allgemeinen Lösung**  $y_h$  der zugehörigen **homogenen** Differentialgleichung und einer **beliebigen partikulären Lösung**  $y_p$  der **inhomogenen** Differentialgleichung darstellbar (Abb. 4.21):

$y$	$=$	$y_h$	$+$	$y_p$
allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung		allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung		beliebige partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

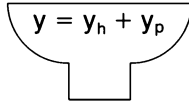
<sup>12</sup> Joseph Louis LAGRANGE (1736 – 1813), französischer Mathematiker

Dieser Satz gilt auch, wenn der Koeffizient  $p$  nicht konstant ist.

Allgemeine Lösung  $y_h$  der  
homogenen linearen  
Differentialgleichung



Irgend eine partikuläre  
Lösung  $y_p$  der inhomogenen  
linearen Differentialgleichung



Allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen  
linearen Differentialgleichung

Abb. 4.21 Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

Dieser Satz ist die Grundlage für ein weiteres praktisch wichtiges Lösungsverfahren zur Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung neben der Methode der Variation der Konstanten. Es besteht wesentlich im **Aufsuchen einer partikulären Lösung** der inhomogenen Differentialgleichung.

**Beispiel 4.13 : Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten – Lösung durch Aufsuchen einer partikulären Lösung**

Löse die Anfangswertaufgabe  $y' + 2y = 4x$ ;  $y(0) = 3$ .

**Lösung**

(1)  $y_h = C \cdot e^{-2 \cdot x}$ .

(2) Im zweiten Schritt suchen wir *irgend eine* partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Differentialgleichung, also eine Lösung der Gleichung  $y' + 2y = 4x$ . Die Vermutung liegt nahe, dass dies aufgrund der Störfunktion  $s(x) = 4x$  auch eine lineare Funktion sein könnte. Wir machen daher den Ansatz

$$y_p = a \cdot x + b,$$

setzen in die inhomogene Differentialgleichung ein und versuchen Zahlenwerte für  $a$  und  $b$  zu erhalten. Wegen  $y'_p = a$  erhält man:

$$a + 2 \cdot (a \cdot x + b) = 4x.$$

Wir ordnen nun die Glieder nach fallenden Potenzen:  $2a \cdot x + (a + 2b) = 4 \cdot x + 0$ .

Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus:

$$2a = 4$$

$$a + 2b = 0.$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhält man  $a = 2$  und  $b = -1$ . Damit war der Ansatz erfolgreich; die dadurch gefundene partikuläre Lösung lautet:  $y_p = 2x - 1$ .

(3) Die allgemeine Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet daher:

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{-2 \cdot x} + 2x - 1.$$

Die Berücksichtigung der Anfangsbedingung liefert wie im Beispiel 4.12 die gewünschte partikuläre Lösung, die Lösung der Anfangswertaufgabe:  $y = 4 \cdot e^{-2 \cdot x} + 2x - 1$ .

Die Ermittlung der **allgemeinen Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung**  $y' + p \cdot y = s(x)$  mit **konstantem** Koeffizienten  $p$  kann in drei Schritten erfolgen:

- (1) Bestimmen der allgemeinen Lösung  $y_h$  der homogenen Differentialgleichung:  

$$y_h = C \cdot e^{-p \cdot x}.$$
- (2) Aufsuchen irgend einer partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe eines **Lösungsansatzes** entsprechend der Störfunktion  $s(x)$ .
- (3) Addition von  $y_h$  und  $y_p$  zur allgemeinen Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung.

Liegt eine Anfangsbedingung (oder eine Randbedingung) vor, so ist schließlich noch die diese Bedingung erfüllende partikuläre Lösung zu ermitteln.

In der folgenden Tabelle finden sich Lösungsansätze  $y_p$  für einige in den Anwendungen häufig vorkommende Störfunktionen  $s(x)$  einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit *konstantem* Koeffizienten  $p$ :  $y' + p \cdot y = s(x)$ ,  $p \neq 0$ .

Störfunktion $s(x)$	Lösungsansatz für $y_p$
$s(x) = A$ (konstante Funktion)	$y_p = a$
$s(x) = A \cdot x + B$	$y_p = a \cdot x + b$
$s(x) = A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + A_1 x + A_0$	$y_p = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_1 x + a_0$
$s(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x)$	$y_p = a \cdot \sin(\omega \cdot x) + b \cdot \cos(\omega \cdot x)$ oder
$s(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x)$	
$s(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x) + B \cdot \cos(\omega \cdot x)$	$y_p = a \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$
$s(x) = A \cdot e^{b \cdot x}$	$y_p = \begin{cases} a \cdot e^{b \cdot x} & \text{für } b \neq -p \\ a \cdot x \cdot e^{b \cdot x} & \text{für } b = -p \end{cases}$

**Beispiel 4.14 : Weitere Aufgaben**

Löse die Anfangswertaufgabe:

- a)**  $\frac{1}{4} y' - \frac{1}{2} y = 3; y(0) = 1;$       **b)**  $y' + 2y = 52 \cdot \sin 3x; y(0) = 0.$

**Lösung**

Zu a)

- (1) Exponentialansatz:  $y_h = C \cdot e^{\lambda \cdot x}; \frac{1}{4} C \lambda e^{\lambda \cdot x} - \frac{1}{2} C e^{\lambda \cdot x} = \frac{1}{4} C e^{\lambda \cdot x} \cdot (\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 2.$   
 $y_h = C \cdot e^{2x}$
- (2) Die Störfunktion ist eine konstante Funktion. Lösungsansatz:  $y_p = a$ . Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt ( $y'_p = 0$ ):  $0 - \frac{1}{2} a = 3 \Rightarrow a = -6$   
 Somit:  $y_p = -6$ .
- (3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:  $y = y_h + y_p = C \cdot e^{2x} - 6$ .  
 Berücksichtigung der Anfangsbedingung:  $y(0) = C \cdot e^{2 \cdot 0} - 6 = 1 \Rightarrow C = 7$ . Daher lautet die gewünschte partikuläre Lösung:  $y = 7 \cdot e^{2x} - 6$ .

Probe:  $\frac{1}{4} (7 \cdot e^{2x} - 6)' - \frac{1}{2} (7 \cdot e^{2x} - 6) = 3.$

Anmerkung: Die inhomogene lineare Differentialgleichung  $\frac{1}{4} y' - \frac{1}{2} y = 3$  lässt sich auch direkt durch Trennung der Variablen lösen. Führe dies durch!

Zu b)

(1)  $y_h = C \cdot e^{-2 \cdot x}$  (siehe Beispiel 4.10, Seite 138)

(2) Die Störfunktion ist eine Sinusfunktion.

Lösungsansatz:  $y_p = a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x.$

Dies ist als Summe zweier Sinusfunktionen gleicher Periode wieder eine Sinusfunktion der gleichen Periode. Jedoch lässt der Lösungsansatz eine andere Amplitude zu als sie die Störfunktion besitzt sowie auch eine Phasenverschiebung zur Störfunktion. Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt mit  $y_p' = 3a \cdot \cos 3x - 3b \cdot \sin 3x$ :  
 $3a \cdot \cos 3x - 3b \cdot \sin 3x + 2 \cdot (a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x) = 52 \cdot \sin 3x.$

Ordnen der Terme:  $(-3b + 2a) \cdot \sin 3x + (3a + 2b) \cdot \cos 3x = 52 \cdot \sin 3x + 0 \cdot \cos 3x$   
 Ein Koeffizientenvergleich der Sinus- und Kosinusterme auf beiden Seiten führt zum linearen Gleichungssystem:

$$2a - 3b = 52$$

$$3a + 2b = 0,$$

woraus sich  $a = 8$  sowie  $b = -12$  ergibt. Daher haben wir eine partikuläre Lösung gefunden:  $y_p = 8 \cdot \sin 3x - 12 \cdot \cos 3x.$

Um in die Form  $y_p = A \cdot \sin(3x + \varphi)$  umzuschreiben, verwenden wir, dass allgemein gilt:

$$a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha = A \cdot \sin(\alpha + \varphi) \text{ mit } A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } \tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

$$A = \sqrt{8^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{13}, \tan \varphi = \frac{-12}{8} \Rightarrow \varphi = -0,983 = -56,3^\circ.$$

Somit:  $y_p = 4\sqrt{13} \cdot \sin(3x - 56,3^\circ).$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{-2x} + 8 \cdot \sin 3x - 12 \cdot \cos 3x = C \cdot e^{-2x} + 4\sqrt{13} \cdot \sin(3x - 56,3^\circ).$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$y(0) = C \cdot e^{-2 \cdot 0} + 8 \cdot \sin(3 \cdot 0) - 12 \cdot \cos(3 \cdot 0) = 0 \text{ oder } C - 12 = 0 \Rightarrow C = 12. \text{ Daher lautet die die Anfangsbedingungen erfüllende partikuläre Lösung:}$$

$$y = 12 \cdot e^{-2x} + 8 \cdot \sin 3x - 12 \cdot \cos 3x = 12 \cdot e^{-2x} + 4\sqrt{13} \cdot \sin(3x - 56,3^\circ).$$

Probe:

$$(12 \cdot e^{-2x} + 8 \cdot \sin 3x - 12 \cdot \cos 3x)' + 2 \cdot (12 \cdot e^{-2x} + 8 \cdot \sin 3x - 12 \cdot \cos 3x) = 52 \cdot \sin 3x.$$

**Beispiel 4.15 : NEWTON'sches Abkühlungs- bzw. Erwärmungsgesetz**

Besitzt ein Körper zur Zeit  $t$  die Temperatur  $\vartheta(t)$ , so ist die Änderungsrate  $\frac{d\vartheta}{dt}$  seiner Temperatur proportional zur momentanen Temperaturdifferenz zum umgebenden Medium (Luft, Flüssigkeit):  $\frac{d\vartheta}{dt} = k \cdot (\vartheta - \vartheta_M)$ . Dabei ist  $\vartheta_M$  die Temperatur des Mediums und die Konstante  $k$  der Proportionalitätsfaktor.

Ein Thermometer wird aus einem Raum mit der Temperatur  $22^\circ\text{C}$  ins Freie gebracht, wo eine Temperatur von  $-10^\circ\text{C}$  herrscht. Eine halbe Minute danach zeigt das Thermometer  $11^\circ\text{C}$ . Welche Temperatur zeigt es nach einer weiteren halben Minute? Wann zeigt es  $-9^\circ\text{C}$  an?

**Lösung**

$$\frac{d\vartheta}{dt} = k \cdot (\vartheta - \vartheta_M) \text{ oder } \frac{d\vartheta}{dt} - k \cdot \vartheta = -k \cdot (-10^\circ\text{C}).$$

Es handelt sich also um eine lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten ( $-k$ ) für die Temperatur  $\vartheta$ . Das Thermometer werde zur Zeit  $t = 0$  ins Freie gebracht.  $t$  soll in Minuten gerechnet werden. Dann folgt unter Weglassung der Einheiten:

(1) Exponentialansatz:  $\vartheta_h = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$ :

$$C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} - k \cdot C \cdot e^{\lambda \cdot t} = C \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot (\lambda - k) = 0 \Rightarrow \lambda = k.$$

$$\vartheta_h = C \cdot e^{k \cdot t}$$

(2) Die Störfunktion ist eine konstante Funktion. Lösungsansatz:  $\vartheta_p = a$ .

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt ( $\vartheta'_p = 0$ ):

$$0 - k \cdot a = -k \cdot (-10) \Rightarrow a = -10$$

Somit:  $\vartheta_p = -10$ .

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:  $\vartheta = \vartheta_h + \vartheta_p = C \cdot e^{k \cdot t} - 10$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingung:  $\vartheta(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} - 10 = 22 \Rightarrow C = 32$ . Daher lautet die die Anfangsbedingungen erfüllende partikuläre Lösung:  $\vartheta = 32^\circ\text{C} \cdot e^{k \cdot t} - 10^\circ\text{C}$ .

Bestimmung von  $k$ :  $\vartheta(0,5) = 32 \cdot e^{k \cdot 0,5} - 10 = 11$ ;  $e^{k \cdot 0,5} = \frac{21}{32} \Rightarrow k = -0,84$ .

Somit lautet das Abkühlungsgesetz des Thermometers:  $\vartheta = 32^\circ\text{C} \cdot e^{-0,84 \cdot t} - 10^\circ\text{C}$ .

Aus  $\vartheta = 32 \cdot e^{-0,84 \cdot t} - 10 = -9$  errechnet sich  $t = 4,1$  min.

**Beispiel 4.16 : Freier Fall in einer Flüssigkeit**

Eine Kugel der Masse  $m$  (Radius  $r$ , Dichte  $\rho$ ) wird in einer Flüssigkeit aus dem Ruhezustand frei fallen gelassen. Die Flüssigkeit besitzt die Dichte  $\rho_{\text{Fl}}$  und die Zähigkeit  $\eta$ . Bestimme den zeitlichen Verlauf der Fallgeschwindigkeit  $v$ , die Endgeschwindigkeit und den Zeitpunkt, zu dem 95% der Endgeschwindigkeit erreicht wird.

Konkrete Angaben: Eine Kugel aus Glas ( $r = 0,04$  m,  $\rho = 2600$  kg/m<sup>3</sup>) fällt in Glycerin ( $\rho_{\text{Fl}} = 1300$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta = 1,5$  Pa s).

**Lösung**

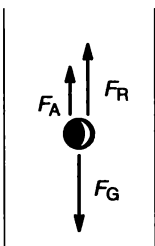


Abb. 4.22

Auf die Kugel wirken drei Kräfte:

- Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g$
- Reibungskraft  $F_R = b \cdot v$  mit  $b = 6 \pi \eta r$  (STOKE'sche Reibungskraft)
- Auftrieb  $F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot V \cdot g$  ( $V$  Kugelvolumen, der Auftrieb ist gleich dem Gewicht  $\rho_{\text{Fl}} \cdot V \cdot g$  der verdrängten Flüssigkeitsmenge)

Die Gewichtskraft wirkt in, die beiden anderen Kräfte wirken gegen die Bewegungsrichtung.

Daher gilt:  $m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = F_G - F_R - F_A = m \cdot g - b \cdot v - \rho_{\text{Fl}} \cdot V \cdot g$ .

Division durch  $m$  ergibt:  $\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} \cdot v - \frac{\rho_{\text{Fl}}}{\rho} \cdot g$  oder  $\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m} \cdot v = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{Fl}}}{\rho}\right)$

mit  $\frac{b}{m} = \frac{9 \eta}{2 r^2 \rho}$  ( $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4 \pi}{3} r^3$ ).

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten. Dazu kommt die Anfangsbedingung:  $v(0) = 0$ .

(1) Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:  $v_h = C \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{m}}$ .

(2) Partikuläre Lösung durch Ansatz:  $v_p = a$ .

$$0 + \frac{b}{m} \cdot a = g \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}\right) \Rightarrow a = \frac{m \cdot g}{b} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}\right)$$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$v = C \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{m}} + \frac{m \cdot g}{b} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}\right).$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$v(0) = 0 = C \cdot e^0 + \frac{m \cdot g}{b} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}\right) \Rightarrow C = -\frac{m \cdot g}{b} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}\right).$$

Damit lautet die gewünschte partikuläre Lösung:  $v(t) = \frac{m \cdot g}{b} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{b \cdot t}{m}}\right)$ .

Die Differentialgleichung kann hier auch mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden. Für große  $t$  (theoretisch für  $t \rightarrow \infty$ ) erreicht die Kugel die konstante Endgeschwindigkeit

$$v_E = \frac{m \cdot g}{b} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}\right).$$

Konkret ergibt sich mit  $\frac{b}{m} = \frac{9 \eta}{2 r^2 \rho} = \frac{9 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,04^2 \cdot 2600} \text{ s}^{-1} \approx 1,6 \text{ s}^{-1}$ :

$$v(t) = 6,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(1 - \frac{1300}{2600}\right) \cdot \left(1 - e^{-1,6 \text{ s}^{-1} t}\right) = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(1 - e^{-1,6 \text{ s}^{-1} t}\right).$$

Die Endgeschwindigkeit ist somit  $v_E = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Wann wird 95% dieser Geschwindigkeit erreicht?

$$3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(1 - e^{-1,6 \text{ s}^{-1} t}\right) = 0,95 \cdot 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow t = 1,8 \text{ s}.$$

Abb. 4.23 zeigt die Fallgeschwindigkeit für die angenommene Glaskugel in Glyzerin. Zum Vergleich ist auch die Fallgeschwindigkeit ohne Auftrieb eingezeichnet.

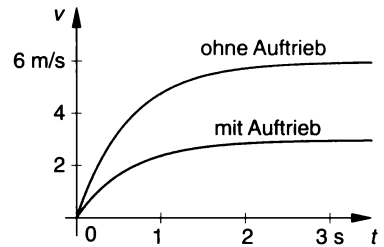


Abb. 4.23 Fallgeschwindigkeit in zäher Flüssigkeit

### Beispiel 4.17 : RC-Glied mit äußerer Spannung

An einem RC-Glied (Abb. 4.24) mit  $R = 10 \text{ k}\Omega$  und  $C = 50 \mu\text{F}$  liegt eingangsseitig die Spannung  $u(t)$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  wird der Schalter geschlossen. Der Kondensator ist anfänglich ungeladen, sodass die Anfangsbedingung  $u_C(0) = 0$  besteht. Stelle die Differentialgleichung für die Kondensatorsspannung  $u_C$  auf und bestimme daraus ihren zeitlichen Verlauf, wenn

- a)  $u(t) = 5 \text{ V}$  (Aufladen eines Kondensators durch eine Gleichspannung),
- b)  $u(t) = 4 \text{ Vs}^{-1} \cdot t$  für  $t \geq 0$ ,
- c)  $u(t) = 26 \text{ V} \cdot \sin(3 \text{ s}^{-1} t)$ .

#### Lösung

Nach der 2. KIRCHHOFF'schen Regel gilt für  $t \geq 0 \text{ s}$ :

$$u_R + u_C = u.$$

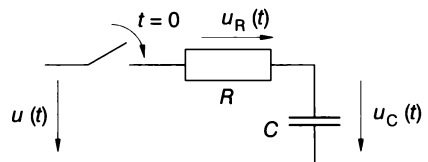


Abb. 4.24

Wegen  $u_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = RC \cdot \frac{du_C}{dt}$  folgt die Differentialgleichung für  $u_C$ :

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u.$$

Setzt man zur Abkürzung  $\tau = R \cdot C = \frac{1}{2}$  s ("Zeitkonstante") und dividiert durch  $\tau$ , so erhält man

(bei Weglassung der Einheiten):  $\frac{du_C}{dt} + 2 u_C = 2 u.$

Zu a) Es ist die Anfangswertaufgabe zu lösen:  $\frac{du_C}{dt} + 2 u_C = 10; u_C(0) = 0.$

(1) Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:  $u_{C,h} = K \cdot e^{-2t}.$

Die Integrationskonstante wird mit K bezeichnet, um eine Verwechslung mit der Kapazität C zu vermeiden.

(2) Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: Ansatz:  $u_{C,p} = a.$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$0 + 2 \cdot a = 10 \Rightarrow a = 5 \text{ und damit } u_{C,p} = 5.$$

(3)  $u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-2t} + 5.$

Berücksichtigung der Anfangsbedingung:  $0 = K \cdot e^0 + 5 \Rightarrow K = -5.$

Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems ( $\tau = \frac{1}{2}$  s):

$$u_C = 5 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Die Lösung besteht aus zwei Teilen:  $u_C = \underbrace{-5 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{flüchtiger Teil}} + \underbrace{5 \text{ V}}_{\text{stationärer Teil}}.$

Der Term  $-5 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$  der Lösung klingt exponentiell ab und wird nach kurzer Zeit bedeutungslos; er wird daher auch *flüchtiger* Teil der Lösung genannt. Der verbleibende Teil, der sich danach ergibt, wird auch als *stationäre* Lösung bezeichnet. Er ist gerade die partikuläre Lösung, die sich durch den Ansatz entsprechend der Störfunktion ergibt! Abb. 4.25 zeigt den Verlauf der Kondensatorspannung.

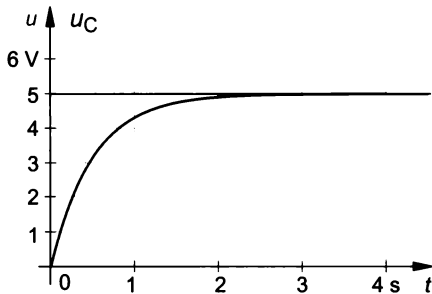


Abb. 4.25 Aufladen eines Kondensators bei Gleichspannung

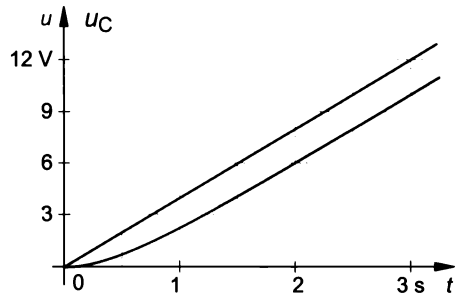


Abb. 4.26 Aufladen eines Kondensators bei linear ansteigender Spannung

Zu b)  $\frac{du_C}{dt} + 2 u_C = 2 \cdot u(t) = 8 t, u_C(0) = 0.$

(1)  $u_{C,h} = K \cdot e^{-2t}.$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung nach Tabelle auf Seite 142:  $u_{C,p} = a t + b$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt wegen  $\frac{du_{C,p}}{dt} = a$ :

$$a + 2 \cdot a t + 2 b = 8 t$$

Koeffizientenvergleich:  $2a = 8$  und  $a + 2b = 0$ ;  $a = 4$  und  $b = -2$ .

Damit  $u_{C,p} = 4t - 2$ .

$$(3) u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-2t} + 4t - 2$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingung:  $0 = K \cdot e^0 - 2 \Rightarrow K = 2$ .

Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems:

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = \underbrace{2 \cdot e^{-2t}}_{\text{flüchtiger Teil}} + \underbrace{4t - 2}_{\text{stationärer Teil}}.$$

Auch hier besteht die Lösung aus einem flüchtigen und einem stationären Teil. Abb. 4.26 zeigt den zeitlichen Verlauf von  $u_C$  sowie der äußeren angelegten Spannung  $u$ .

Zu c)  $\frac{du_C}{dt} + 2u_C = 52 \cdot \sin(3t)$ ,  $u_C(0) = 0$ .

Die Lösung kann sofort angegeben werden, da es sich um die Aufgabe des Beispiels 4.14 b, Seite 142, handelt:

$$u_C(t) = \underbrace{12 \text{ V} \cdot e^{-2t}}_{\text{flüchtiger Teil}} + \underbrace{4\sqrt{13} \text{ V} \cdot \sin(3 \text{ s}^{-1} \cdot t - 56,3^\circ)}_{\text{stationärer Teil}}.$$

Der Term  $12 \text{ V} \cdot e^{-t/\tau}$  der Lösung ist nach einer kurzen Einschwingzeit bedeutungslos; er ist der flüchtige Teil. Für hinreichend großes  $t$  gilt

$$u_C(t) \approx 4\sqrt{13} \text{ V} \cdot \sin(3 \text{ s}^{-1} \cdot t - 56,3^\circ).$$

Dieser verbleibende Teil der Lösung, die stationäre Lösung, heißt auch eine *Sinusantwort* des RC-Gliedes, da sie dessen Reaktion auf eine *sinusförmige* Eingangsspannung ist.

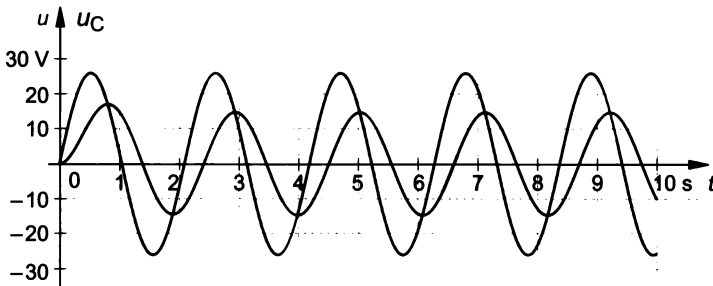


Abb. 4.27  $u_C$  mit Eingangsspannung  $u$

Abb. 4.27 zeigt den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung  $u_C$ . Man erkennt, dass wenige Sekunden nach dem Einschalten der stationäre Zustand erreicht wird. Zum Vergleich ist auch die angelegte Eingangsspannung  $u(t) = 26 \text{ V} \cdot \sin(3 \text{ s}^{-1} t)$  gezeichnet.

### Im Überblick: Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heißt **linear**, wenn sie in der Form  $y' + p \cdot y = s(x)$  geschrieben werden kann. Ist der Koeffizient  $p$  eine Konstante, so spricht man von einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit **konstantem Koeffizienten**.

Die Funktion  $s(x)$  wird oft als **Störfunktion** bezeichnet. Ist die Störfunktion  $s(x)$  identisch gleich null, so heißt die lineare Differentialgleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.



Eine **homogene** lineare Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen (sofern die Integration gelingt). Ist der **Koeffizient p konstant**, kann die Lösung einfacher mit einem **Exponentialansatz** gefunden werden.

Die **allgemeine Lösung y** einer **inhomogenen** linearen Differentialgleichung 1. Ordnung (oder auch einer höheren Ordnung) ist als **Summe** der **allgemeinen Lösung y<sub>h</sub>** der zugehörigen **homogenen** Differentialgleichung und einer *beliebigen* **partikulären Lösung y<sub>p</sub>** der **inhomogenen** Differentialgleichung darstellbar:  $y = y_h + y_p$ .

Um eine partikuläre Lösung y<sub>p</sub> der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, kann die Methode der **Variation der Konstanten** angewandt werden. Bei einer Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten kann einfacher eine partikuläre Lösung y<sub>p</sub> durch einen **Lösungsansatz entsprechend der Störfunktion s(x)** aufgesucht werden.

## Aufgaben

4.21 Welche der folgenden Differentialgleichungen sind linear?

a)  $y' + y^2 = 1$       b)  $y' - x \cdot y - x^2 = 0$       c)  $y' + y \cdot \tan x = 1$       d)  $(x + y) \cdot y' = 1$

4.22 Ermittle die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten:

a)  $y' = y + x$       b)  $y' + x \cdot y = 2x$       c)  $y' - \frac{y}{x} = 1$   
d)  $x \cdot y' + y - 2x = 0$       e)  $y' + \frac{1-y}{1-x} = 2$       f)  $2x \cdot y' + y = 10x^2$

4.23 Ermittle die Lösung der Anfangswertaufgabe durch Variation der Konstanten:

a)  $y' + x \cdot y = x$ ;  $y(2) = 2$       b)  $2x \cdot y' + y - 6x = 0$ ;  $y(2) = 5$   
c)  $y' + \frac{y}{x+1} = 2$ ;  $y(3) = 4$       d)  $y' + 2xy = 2x e^{-x^2}$ ;  $y(0) = 1$

4.24 Ermittle die allgemeine Lösung:

a)  $y' + 2y = 6$       b)  $y' + 3y = x$       c)  $y' + 2y + 1 = x$       d)  $y' - 4y = 8x^2 - 1$

4.25 Ermittle die allgemeine Lösung:

a)  $y' + y = \sin x$       b)  $y' + 3y = 10 \cdot \sin x$       c)  $y' + y = 10 \cdot \cos(3t)$   
d)  $y' + 2y = 13 \cdot \cos(3t)$       e)  $y' + 4y = 2 \cdot \sin(2t) + \cos(2t)$   
f)  $y' + 3y = 37 \cdot \sin \frac{t}{2} + 74 \cdot \cos \frac{t}{2}$       g)  $y' + 2y = 5\sqrt{2} \cdot \sin(t + 45^\circ)$

4.26 Ermittle die allgemeine Lösung:

a)  $y' + 2y = e^{-x}$       b)  $y' + 2y = e^{-2x}$       c)  $y' - 3y = 10 \cdot e^{-2x}$

4.27 Ermittle die Lösung der Anfangswertaufgabe:

a)  $y' + 5y = 20$ ;  $y(1) = 2$       b)  $y' - 3y = 9x + 18$ ;  $y(1) = 2$   
c)  $y' - 4y = 32x^2$ ;  $y(0) = 2$       d)  $y' + y = 2 \cdot e^x$ ;  $y(0) = 6$   
e)  $y' - y = 3 \cdot e^x$ ;  $y(1) = 1$       f)  $y' + 10y = 12 \cdot e^{2x}$ ;  $y(0) = 2$

4.28 Ermittle die Lösung der Anfangswertaufgabe:

a)  $y' + y = 2 \cdot \sin t$ ;  $y(0) = 1$

b)  $y' + 2y = 5 \cdot \cos t$ ;  $y(0) = 0$

c)  $y' + 3y = 12 \cdot \cos 3t$ ;  $y(0) = 0$

d)  $y' + 3y = 6 \cdot \sin 3t$ ;  $y(0) = 2$

e)  $y' + 10y = 52 \cdot \sin 2t$ ;  $y(0) = 1$

f)  $y' + 2y = 4 \cdot \cos 2t$ ;  $y(0) = 2$

g)  $y' + y = \sin t + 3 \cdot \cos t$ ;  $y(0) = 0$

h)  $y' + y = 8 \sin t + 6 \cos t$ ;  $y(0) = 0$

4.29 Ein Eisenwürfel wird auf 100 °C erhitzt. Anschließend wird er zum Zeitpunkt  $t = 0$  min in Wasser der Temperatur 30 °C gebracht. Nach 4 min ist die Temperatur des Würfels auf 80 °C gesunken. Wann ist die Temperatur des Würfels gleich 31 °C?

4.30 *Newton's Law of Cooling/Heating:* A thermometer, reading 4 °C, is brought into a room whose temperature is 20 °C. Two minutes later the thermometer reading is 15 °C. How long does it take until the reading is practically 20 °C, say, 19,9 °C?

4.31 Ein Motorboot mit einer Masse von  $m = 3000$  kg wird aus der Ruhe mit einer gleichbleibenden Kraft von  $F = 480$  N angetrieben. Dabei erfährt es einen geschwindigkeitsproportionalen Reibungswiderstand  $F_R = k \cdot v$  mit  $k = 60$  kg/s.

a) Bestimme die Bootsgeschwindigkeit  $v(t)$ .

b) Welche Geschwindigkeit kann das Boot maximal erreichen?

*Hinweis:*  $m \cdot \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v$ ;  $v(0) = 0$  km/h.

4.32 Ein Motorboot wird mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h abgeschleppt. Zur Zeit  $t = 0$  s wird das Schlepptau gelöst und der Bootsmotor mit einem Antrieb von 360 N wirksam. Wie groß ist die Bootsgeschwindigkeit nach einer Minute, wenn die Gesamtmasse des Bootes mit Besatzung  $m = 1200$  kg beträgt und der Reibungswiderstand proportional der Geschwindigkeit ist:  $F_R = k \cdot v$  mit  $k = 36$  kg/s.

*Hinweis:*  $m \cdot \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v$ ;  $v(0) = 5$  km/h.

4.33 Während einer Veranstaltung steigt der CO<sub>2</sub>-Gehalt der Luft in einem Raum von 1000 m<sup>3</sup> auf 0,1% (Volumsprozent). In einer Pause von 15 min wird Frischluft von 0,03% CO<sub>2</sub>-Gehalt zugeführt.

a) Auf wie viel sinkt der CO<sub>2</sub>-Gehalt, wenn pro Minute 100 m<sup>3</sup> Frischluft zugeführt werden?

b) Welche Frischluftmenge müsste pro Minute zugeführt werden, um am Ende der Pause einen CO<sub>2</sub>-Gehalt von 0,04% zu erreichen?

*Hinweis:*  $V(t)$  ist das CO<sub>2</sub>-Volumen (in m<sup>3</sup>) des Raumes  $t$  min nach Pausenbeginn; Veränderung von  $V$  während einer kurzen auf  $t$  folgenden Zeitspanne  $dt$ :

$$dV = 0,0003 \cdot 100 \cdot dt - \frac{V}{1000} \cdot 100 \cdot dt; \quad V(0) = 0,001 \cdot 1000.$$

4.34 Ein Behälter enthält anfänglich 1000 l Salzlösung mit einer Salzmenge von 30 kg. Ab  $t = 0$  min fließen pro Minute 10 l Salzwasser mit einem Salzgehalt von 0,05 kg pro Liter zu; gleichzeitig fließen 15 l der Salzlösung des Behälters pro Minute ab. Durch ein Rührwerk wird die Konzentration der Salzlösung im gesamten Behälter gleich gehalten.

a) Berechne die Salzmenge nach einer Stunde.

b) Wann erreicht die Salzmenge im Behälter ihren Höchstwert?

*Hinweis:*  $m(t)$  Salzmasse (in kg) im Behälter zur Zeit  $t$ ; während der nächsten kleinen Zeitspanne  $dt$  findet folgende Veränderung  $dm$  der Salzmasse statt:

$$dm = 0,05 \cdot 10 \cdot dt - \frac{m}{1000 - (15 - 10) \cdot t} \cdot 15 \cdot dt; \quad m(0) = 30 \text{ kg.}$$

**4.35** Ein Tonne (Abb. 4.28) mit einem Fassungsvermögen von 100 l enthält eine Lösung aus 5 kg gelöstem Salz. In diese Tonne fließt ab  $t = 0$  min reines Wasser mit einer Stärke von 2 l/min zu. In gleichem Ausmaß fließt Lösung aus der Tonne in eine zweite Tonne ab, die anfänglich 100 l reines Wasser enthielt. Auch aus der zweiten Tonne fließen 2 l Flüssigkeit pro Minute ab, sodass auch hier die Flüssigkeitsmenge gleich bleibt. In jeder Tonne wird durch ein Rührwerk für eine gleichmäßige Salzkonzentration gesorgt.

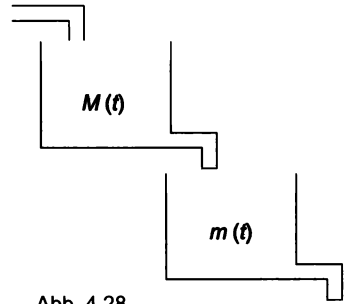


Abb. 4.28

- a) Wie groß ist die Salzmasse in der zweiten Tonne nach einer Stunde?
- b) Wann liegt die maximale Salzmasse in der zweiten Tonne vor und wie groß ist diese?

*Hinweis:* Zur Zeit  $t$  sei  $M(t)$  die Salzmasse in der ersten Tonne,  $m(t)$  jene der zweiten Tonne, jeweils in kg. Dann treten folgende Veränderungen dieser Massen in der auf  $t$  folgenden kleinen Zeitspanne  $dt$  ein:

$dM = -\frac{M}{100} \cdot 2 dt$ ;  $dm = \frac{M}{100} \cdot 2 dt - \frac{m}{100} \cdot 2 dt$ . Löse die beiden Differentialgleichungen hintereinander, wobei gilt:  $M(0) = 5$  kg und  $m(0) = 0$  kg.

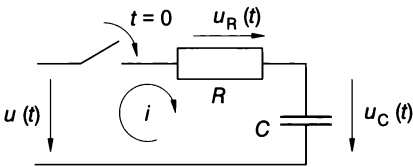


Abb. 4.29

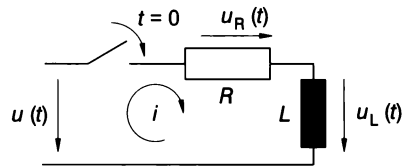


Abb. 4.30

*Hinweis zu den folgenden Aufgaben 4.36 bis 4.37:* Siehe Beispiel 4.17, Seite 145.

**4.36** An einem RC-Glied (Abb. 4.29) liegt eingangsseitig die Spannung  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ . Der Kondensator ist anfänglich ungeladen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  s wird der Schalter geschlossen. Bestimme den zeitlichen Verlauf der Kondensatorsspannung  $u_C$ , wenn

- a)  $R = 500 \Omega$  und  $C = 20 \mu\text{F}$ ,  $\hat{u} = 250$  V,  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ .
- b)  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 50 \mu\text{F}$ ,  $\hat{u} = 52$  V,  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ .
- c)  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $\hat{u} = 26$  V,  $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$ .

**4.37** Gegeben ist ein RC-Glied nach Abb. 4.29 mit  $R = 10 \text{ k}\Omega$  und  $C = 50 \mu\text{F}$ . Der Kondensator ist ungeladen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  s wird die Eingangsspannung  $u(t)$  wirksam. Bestimme den zeitlichen Verlauf der Kondensatorsspannung  $u_C$ , wenn  $u(t) = U_0 = 10$  V und berechne danach die Stromstärke  $i(t)$  aus der Beziehung  $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$  und die am OHM'schen Widerstand abfallende Spannung  $u_R$  aus  $u_R = R \cdot i$ .

**4.38** Gegeben ist ein RL-Glied nach Abb. 4.30 mit  $R = 10 \Omega$  und  $L = 0,5$  H. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  s wird die Eingangsspannung  $u(t)$  wirksam. Nach dem 2. KIRCHHOFF'schen Gesetz (Maschenregel) gilt  $u_R(t) + u_L(t) = u(t)$  für alle  $t \geq 0$  s. Schreibe diese Gleichung unter Benützung der Beziehungen  $u_R = R \cdot i$  und  $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$  als Differentialgleichung für die Stromstärke  $i(t)$  mit der Anfangsbedingung  $i(0) = 0$ . Löse diese Anfangswertaufgabe, wenn a)  $u(t) = 20$  V, b)  $u(t) = 85 \text{ V} \cdot \sin(5 t)$  und berechne sodann die Größen  $u_R$ ,  $u_L$  und  $i$  aus  $u_R = R \cdot i$  bzw.  $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$ .

## 4.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist die mathematische Beschreibung von mechanischen oder elektromagnetischen Schwingungsvorgängen.

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = s(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$$

heißt eine **lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**  $p$  und  $q$ .

Die Funktion  $s(x)$  wird wieder als *Störfunktion* bezeichnet. Ist die Störfunktion  $s(x)$  identisch gleich null, so heißt die lineare Differentialgleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.

Bei einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung treten also  $y$ ,  $y'$  und  $y''$  linear auf, d.h. in 1. Potenz; "gemischte Produkte" der Form  $y' \cdot y$ ,  $y'' \cdot y$  oder  $y' \cdot y''$  dürfen nicht auftreten. Wesentliche Eigenschaften des im Folgenden behandelten Lösungsverfahrens sind daran gebunden, dass die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung konstante Koeffizienten  $p$  und  $q$  besitzt!

(1) Beispiele für **lineare** Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$y'' + 4y' + 3y = 0$	homogen, konstante Koeffizienten
$y'' + 4y' + x \cdot y = 0$	homogen, aber nicht konstante Koeffizienten
$y'' + 4y' + 3y = 2x + 1$	inhomogen, konstante Koeffizienten
$y'' + 9y = \sin 2x$	inhomogen, konstante Koeffizienten
$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 1$	inhomogen, nicht konstante Koeffizienten

(2) Beispiele für **nichtlineare** Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$y'' + y'^2 = 0$	$y'$ tritt in 2. Potenz auf.
$y'' + \frac{x}{y} = 0$	$y$ tritt im Nenner auf, d.h. mit der Hochzahl $-1$ .
$y y'' + y + 1 = 0$	Das gemischte Produkt $y'' \cdot y$ tritt auf.

### Beispiel 4.18 : Homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Löse folgende Anfangswertaufgaben

**a)**  $y'' + 4y' + 3y = 0$       **b)**  $y'' + 4y' + 4y = 0$       **c)**  $y'' + 4y' + 13y = 0$

jeweils für  $y(0) = 3$  und  $y'(0) = 0$ .

#### Lösung

Alle drei Differentialgleichungen sind linear; weiters sind sie homogen und besitzen konstante Koeffizienten.

Zu **a)** Wie bei der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten wählen wir für die Lösung einen **Exponentialansatz**:  $y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ .

Einsetzen dieser Funktion samt ihren Ableitungen  $y' = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$  und  $y'' = C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$  in die Differentialgleichung  $y'' + 4y' + 3y = 0$  ergibt

$$C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + 4 C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + 3 C \cdot e^{\lambda \cdot x} = C \cdot e^{\lambda \cdot x} (\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$$

Da  $e^{\lambda \cdot x}$  für keinen Wert  $x$  null ist und eine Lösung mit  $C = 0$  in der Regel keine praktische Bedeutung hat, gilt nach dem Produkt-Null-Satz, dass

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

Diese quadratische Gleichung heißt **charakteristische Gleichung** der vorliegenden homogenen Differentialgleichung. Sie wird gelöst durch  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 3} = -2 \pm 1$ , also  $\lambda_1 = -3$  und  $\lambda_2 = -1$ .

Daraus folgen zwei Lösungen der Differentialgleichung:  $y_1 = C_1 \cdot e^{-3x}$  und  $y_2 = C_2 \cdot e^{-x}$ . Es lässt sich durch Einsetzen leicht zeigen, dass auch die Summe

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x} \text{ eine Lösung unserer Differentialgleichung ist.}$$

Diese Lösung besitzt zwei beliebig frei wählbare Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ . Daher liegt die Vermutung nahe, dass es sich dabei schon um die **allgemeine Lösung** der homogenen Differentialgleichung handelt, also um jene Funktion, mit der jede Anfangswertaufgabe eindeutig gelöst werden kann. Dies lässt sich tatsächlich zeigen. Wir schreiben daher:

$$y_h = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Wir bestimmen nun die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  so, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind:

$$y' = -3 C_1 \cdot e^{-3x} - C_2 \cdot e^{-x};$$

$$y(0) = C_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} + C_2 \cdot e^{-0} = C_1 + C_2 = 3$$

$$y'(0) = -3 C_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} - C_2 \cdot e^{-0} = -3 C_1 - C_2 = 0.$$

Daraus  $C_1 = -\frac{3}{2}$  und  $C_2 = \frac{9}{2}$ . Damit lautet die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y = -\frac{3}{2} \cdot e^{-3x} + \frac{9}{2} \cdot e^{-x}.$$

Zu b) Der **Exponentialansatz**  $y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$  führt auf die **charakteristische Gleichung**

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt zwei gleiche Lösungen:  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4} = -2$ , also  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ . Dadurch erhält man vorerst nur eine Lösungsfunktion  $y = C_1 \cdot e^{-2x}$ . Wie bei der Variation der Konstanten kann man jedoch auch hier statt des konstanten Faktors  $C$  eine Funktion  $K(x)$  ansetzen:  $y = K(x) \cdot e^{-2x}$ . Diese Funktion und ihre Ableitungen

$$y' = K' \cdot e^{-2x} - 2 K \cdot e^{-2x} = (K' - 2 K) \cdot e^{-2x},$$

$$y'' = (K'' - 2 K') \cdot e^{-2x} - 2 (K' - 2 K) \cdot e^{-2x} = (K'' - 4 K' + 4 K) \cdot e^{-2x}$$

setzt man in die homogene Differentialgleichung ein:

$$(K'' - 4 K' + 4 K) \cdot e^{-2x} + 4 \cdot (K' - 2 K) \cdot e^{-2x} + 4 K \cdot e^{-2x} = 0$$

Vereinfacht man, so bleibt nach Multiplikation mit  $e^{2x}$  die einfache Differentialgleichung

$$K'' = 0.$$

Sie wird durch zweifache Integration gelöst:

$$K(x) = C_1 + C_2 \cdot x.$$

$$\text{Damit ist } y = K(x) \cdot e^{-2x} = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-2x} = \underbrace{C_1 \cdot e^{-2x}}_{y_1} + \underbrace{C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}}_{y_2}$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung. Es kann wieder gezeigt werden, dass dies die **allgemeine Lösung** der homogenen Differentialgleichung ist:  $y_h = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}$ .

Wir bestimmen schließlich die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  der allgemeinen Lösung so, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind:

$$y' = -2 C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-2x} - 2 C_2 \cdot x \cdot e^{-2x} = (-2 C_1 + C_2 - 2 C_2 \cdot x) \cdot e^{-2x};$$

$$y(0) = C_1 \cdot e^{-2 \cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{-2 \cdot 0} = C_1 = 3$$

$$y'(0) = (-2 C_1 + C_2 - 2 C_2 \cdot 0) \cdot e^{-2 \cdot 0} = -2 C_1 + C_2 = 0$$

Daraus ergeben sich  $C_1 = 3$  und  $C_2 = 6$ . Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet daher:

$$y = 3 e^{-2x} + 6 x \cdot e^{-x} = 3 \cdot (2x + 1) \cdot e^{-2x}.$$

Zu c) Der **Exponentialansatz**  $y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$  führt auf die **charakteristische Gleichung**  $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ .

Diese Gleichung hat nun zwei konjugiert komplexe Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3j, \text{ also } \lambda_1 = -2 + 3j \text{ und } \lambda_2 = -2 - 3j.$$

Damit erhält man die beiden Lösungen  $y_1 = \bar{C}_1 \cdot e^{(-2+3j) \cdot x}$  und  $y_2 = \bar{C}_2 \cdot e^{(-2-3j) \cdot x}$ . Die frei wählbaren Konstanten werden vorerst mit  $\bar{C}_1$  und  $\bar{C}_2$  bezeichnet. Wir setzen wieder

$y = y_1 + y_2 = \bar{C}_1 \cdot e^{(-2+3j) \cdot x} + \bar{C}_2 \cdot e^{(-2-3j) \cdot x}$  und formen mit Hilfe der EULER'schen Formel

$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$  und in der Folge  $e^{-j \cdot \varphi} = \cos \varphi - j \cdot \sin \varphi$  um:

$$\begin{aligned} y &= \bar{C}_1 \cdot e^{-2x} \cdot e^{j \cdot 3x} + \bar{C}_2 \cdot e^{-2x} \cdot e^{-j \cdot 3x} = e^{-2x} \cdot [\bar{C}_1 \cdot e^{j \cdot 3x} + \bar{C}_2 \cdot e^{-j \cdot 3x}] = \\ &= e^{-2x} \cdot [\bar{C}_1 \cdot (\cos 3x + j \cdot \sin 3x) + \bar{C}_2 \cdot (\cos 3x - j \cdot \sin 3x)] = \\ &= e^{-2x} \cdot [(\bar{C}_1 + \bar{C}_2) \cdot \cos 3x + j \cdot (\bar{C}_1 - \bar{C}_2) \cdot \sin 3x]. \end{aligned}$$

Setzt man  $C_1 = \bar{C}_1 - \bar{C}_2$  und  $C_2 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$ , so lautet die Lösung der Differentialgleichung  $y = C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x + j \cdot C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x$ .

Durch Einsetzen bestätigt man, dass hier sowohl der Realteil  $v(x) = C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x$  wie auch der Imaginärteil  $u(x) = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x$  die homogene Differentialgleichung

$$y'' + 4y + 13y = 0 \text{ lösen.}$$

Damit ist auch ihre Summe  $y = u(x) + v(x) = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x$  Lösung. Wieder kann man zeigen, dass mit  $y = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x$  jede Anfangswertaufgabe eindeutig gelöst werden kann. Das heißt, diese Funktion ist die **allgemeine Lösung** der homogenen Differentialgleichung:  $y_h = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} y' &= -2 C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x + 3 C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x - 2 C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x - 3 C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x \\ &= (-2 C_1 \cdot \sin 3x + 3 C_1 \cdot \cos 3x - 2 C_2 \cdot \cos 3x - 3 C_2 \cdot \sin 3x) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot e^0 \cdot \cos 0 = C_2 = 3$$

$$y'(0) = (-2 C_1 \cdot \sin 0 + 3 C_1 \cdot \cos 0 - 2 C_2 \cdot \cos 0 - 3 C_2 \cdot \sin 0) \cdot e^0 = 3 C_1 - 2 C_2 = 0$$

Daraus ergeben sich  $C_1 = 2$  und  $C_2 = 3$ .

Damit ist  $y = 2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x + 3 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x$  die Lösung der gestellten Anfangswertaufgabe. Wegen  $a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha = A \cdot \sin(\alpha + \varphi)$  mit  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$  folgt, dass die Lösung auch in der Form

$$y = \sqrt{13} \cdot e^{-2x} \sin(2x + 56,3^\circ) \text{ geschrieben werden kann.}$$

Das im vorigen Beispiel angewandte Verfahren lässt sich verallgemeinern. Wir fassen zusammen:

**Allgemeine Lösung  $y_h$  einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ :**

Mit dem **Exponentialansatz**  $y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$  gewinnt man die **charakteristische Gleichung**  $\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$ . Je nach Art ihrer Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  sind 3 Fälle zu unterscheiden:

- |   |   |
|---|---|
| 1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)                             | $y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$                         |
| 2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ (reell)                    | $y_h = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda_0 \cdot x}$   |
| 3. Fall: $\lambda_{1,2} = \sigma + j \cdot \omega$ (konjugiert komplex) | $y_h = C_1 \cdot e^{\sigma \cdot x} \sin(\omega x) + C_2 \cdot e^{\sigma \cdot x} \cos(\omega x)$ |

**Beispiel 4.19: Weitere Aufgaben**

Bestimme die allgemeine Lösung:

- a)  $y'' - y' - 6y = 0$     b)  $y'' + 2y' = 0$     c)  $y'' - 2y' + y = 0$     d)  $y'' - 2y' + 17y = 0$

**Lösung**

Zu a) Charakt. Gleichung:  $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 3$  und

$$y_h = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

Zu b) Charakt. Gleichung.  $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -2$  und

$$y_h = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-2x} = C_1 + C_2 \cdot e^{-2x}$$

Zu c) Charakt. Gleichung:  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$  und

$$y_h = (C_1 + C_2 x) \cdot e^x$$

Zu d) Charakt. Gleichung:  $\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 4j$  und

$$y_h = C_1 \cdot e^x \cdot \sin 4x + C_2 \cdot e^x \cdot \cos 4x$$

**Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**

Die Vorgangsweise gleicht völlig dem bei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, was seinen Grund in der *Linearität* der Differentialgleichungen hat. Wieder kann man die allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung durch *Variation der Konstanten* gewinnen. Einfacher ist es jedoch wieder, wenn man zur allgemeinen Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen Gleichung irgendeine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung addiert:  $y = y_h + y_p$ .

Das Aufsuchen einer beliebigen partikulären Lösung  $y_p$  erfolgt wieder, wenn die Differentialgleichung konstante Koeffizienten besitzt, am einfachsten durch einen Lösungsansatz entsprechend der Störfunktion  $s(x)$ . Wegen einiger Besonderheiten im Zusammenhang mit der charakteristischen Gleichung bei Differentialgleichungen 2. Ordnung werden die Lösungsansätze wieder angeführt:

Störfunktion $s(x)$	Lösungsansatz für $y_p$
$s(x) = A$ (konstante Funktion)	$y_p = a$
$s(x) = A \cdot x + B$	$y_p = a \cdot x + b$
$s(x) = A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + A_1 x + A_0$	$y_p = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_1 x + a_0$
$s(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x)$	$y_p = a \cdot \sin(\omega \cdot x) + b \cdot \cos(\omega \cdot x)$ oder $y_p = a \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$ Wenn $j$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = x \cdot [a \cdot \sin(\omega \cdot x) + b \cdot \cos(\omega \cdot x)]$
$s(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x)$	
$s(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x) + B \cdot \cos(\omega \cdot x)$	
$s(x) = A \cdot e^{b \cdot x}$	$y_p = a \cdot e^{b \cdot x}$ (wenn $b$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist)

### Beispiel 4.20: Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Löse folgende Anfangswertaufgabe

- a)  $y'' + 8y' + 7y = 14$ ;  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 2$   
 b)  $y'' + 2y' + y = 2x + 1$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 3$   
 c)  $y'' + 4y' + 3y = 130 \cdot \sin 2x$ ;  $y(0) = 2$  und  $y'(0) = 0$   
 d)  $y'' + 9y = 6 \cdot \cos 3x$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

#### Lösung

Zu a)

- (1) Allgemeine Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = -7; y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-7x}$$

- (2) Aufsuchen einer beliebigen partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung:

$$\text{Lösungsansatz: } y_p = a; y_p' = y_p'' = 0$$

$$\text{Einsetzen: } 0 + 8 \cdot 0 + 7 \cdot a = 14 \Rightarrow a = 2; y_p = 2$$

- (3) Allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-7x} + 2$$

$$\text{Berücksichtigung der Anfangsbedingungen: } y' = -C_1 \cdot e^{-x} - 7 \cdot C_2 \cdot e^{-7x};$$

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + 2 = C_1 + C_2 + 2 = 6$$

$$y'(0) = -C_1 \cdot e^0 - 7 \cdot C_2 \cdot e^{-0} = -C_1 - 7C_2 = 2.$$

$$\text{Daraus: } C_1 = 5; C_2 = -1.$$

Die gesuchte partikuläre Lösung und damit die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet:

$$y = 5 \cdot e^{-x} - e^{-7x} + 2.$$

Zu b)

- (1) Allgemeine Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1; y_h = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-x}$$

- (2) Aufsuchen einer beliebigen partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung:

$$\text{Lösungsansatz: } y_p = a \cdot x + b; y_p' = a; y_p'' = 0$$

$$\text{Einsetzen: } 0 + 2 \cdot a + a \cdot x + b = 2x + 1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } a = 2, 2a + b = 1 \Rightarrow b = -3; y_p = 2x - 3$$



(3) Allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-x} + 2x - 3$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:  $y' = -C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-x} - C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + 2$ ;

$$y(1) = (C_1 + C_2 \cdot 1) \cdot e^{-1} + 2 \cdot 1 - 3 = (C_1 + C_2) \cdot e^{-1} - 1 = 0$$

$$y'(1) = -C_1 \cdot e^{-1} + C_2 \cdot e^{-1} - C_2 \cdot 1 \cdot e^{-1} + 2 = -C_1 \cdot e^{-1} + 2 = 3$$

Daraus:  $C_1 = -e$ ;  $C_2 = 2e$ .

Die gesuchte partikuläre Lösung und damit die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet:

$$y = (-e + 2e \cdot x) \cdot e^{-x} + 2x - 3 = (2x - 1) \cdot e^{-x+1} + 2x - 3.$$

Zu c)

(1) Allgemeine Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3; y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

(2) Aufsuchen einer beliebigen partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung:

Lösungsansatz:  $y_p = a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x$ ;

$$y_p' = 2a \cdot \cos 2x - 2b \cdot \sin 2x, y_p'' = -4a \cdot \sin 2x - 4b \cdot \cos 2x$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} -4a \cdot \sin 2x - 4b \cdot \cos 2x + 4 \cdot (2a \cdot \cos 2x - 2b \cdot \sin 2x) + 3 \cdot (a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x) &= \\ = 130 \cdot \sin 2x \end{aligned}$$

Ordnen:

$$(-a - 8b) \cdot \sin 2x + (-b + 8a) \cdot \cos 2x = 130 \cdot \sin 2x$$

Koeffizientenvergleich:

$$-a - 8b = 130$$

$$8a - b = 0$$

Daraus:  $a = -2$ ,  $b = -16$ ;  $y_p = -2 \cdot \sin 2x - 16 \cdot \cos 2x$ .

(3) Allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x} - 2 \cdot \sin 2x - 16 \cdot \cos 2x$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$y' = -C_1 \cdot e^{-x} - 3 \cdot C_2 \cdot e^{-3x} - 4 \cdot \cos 2x + 32 \cdot \sin 2x;$$

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 - 2 \cdot \sin 0 - 16 \cdot \cos 0 = C_1 + C_2 - 16 = 2$$

$$y'(0) = -C_1 \cdot e^0 - 3 \cdot C_2 \cdot e^0 - 4 \cdot \cos 0 + 32 \cdot \sin 0 = -C_1 - 3C_2 - 4 = 0$$

Daraus:  $C_1 = 29$ ;  $C_2 = -11$ .

Die gesuchte partikuläre Lösung lautet:

$$y = 29 \cdot e^{-x} - 11 \cdot e^{-3x} - 2 \cdot \sin 2x - 16 \cdot \cos 2x.$$

Zu d)

(1) Allgemeine Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3j; y_h = C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x$$

(2) Aufsuchen einer beliebigen partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung:

Da die Störfunktion  $s(x) = 6 \cdot \cos 3x$  die gleiche (Kreis-)Frequenz 3 wie die allgemeine Lösung  $y_h = C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x$  besitzt, genügt nicht der Ansatz

$y_p = a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x$ , sondern es muss nach der Tabelle auf Seite 155 f angesetzt werden:

$$y_p = x \cdot (a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x);$$

Die Störfunktion  $s(x) = 6 \cdot \cos 3x$  selbst ist Lösung der homogenen Differentialgleichung!

$$y_p' = a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x + x \cdot (3a \cdot \cos 3x - 3b \cdot \sin 3x),$$

$$y_p'' = 3a \cdot \cos 3x - 3b \cdot \sin 3x + 3a \cdot \cos 3x - 3b \cdot \sin 3x - 9a \cdot x \cdot \sin 3x - 9b \cdot x \cdot \cos 3x = 6a \cdot \cos 3x - 6b \cdot \sin 3x - 9a \cdot x \cdot \sin 3x - 9b \cdot x \cdot \cos 3x$$

Einsetzen ergibt schließlich:  $6a \cdot \cos 3x - 6b \cdot \sin 3x = 6 \cdot \cos 3x$

Koeffizientenvergleich:  $a = 1, b = 0$

Daher:  $y_p = x \cdot \sin 3x$

(3) Allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x + x \cdot \sin 3x$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$y' = 3C_1 \cdot \cos 3x - 3C_2 \cdot \sin 3x + \sin 3x + 3x \cdot \cos 3x;$$

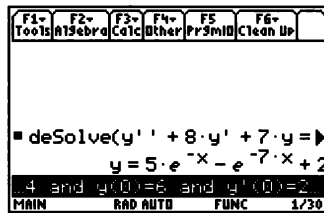
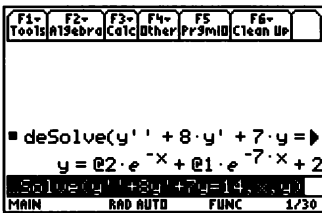
$$y(0) = C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 + 0 \cdot \sin 0 = C_2 = 1$$

$$y'(0) = 3C_1 \cdot \cos 0 - 3C_2 \cdot \sin 0 + \sin 0 + 0 \cdot \cos 0 = 3C_1 = 0.$$

Somit:  $C_1 = 0; C_2 = 1.$

Die gesuchte partikuläre Lösung lautet daher:  $y = \cos 3x + x \cdot \sin 3x.$

TI  
89



In Beispiel 4.20 c) oder d) wurde zur Bestimmung einer partikulären Lösung der reelle Lösungsansatz  $y_p = a \cdot \sin(\omega x) + b \cdot \cos(\omega x) = \hat{y} \cdot \sin(\omega x + \varphi)$  gewählt. Rechentechnisch bequemer ist es allerdings, stattdessen einen komplexen Lösungsansatz zu wählen.

**Beispiel 4.21 : Komplexer Lösungsansatz für  $y_p$  bei einer harmonischen Störfunktion**

Ermittle eine partikuläre Lösung von  $y'' + 4y' + 3y = 130 \cdot \sin 2x$  (siehe Beispiel 4.20 c).

**Lösung**

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\underline{y}'' + 4 \underline{y}' + 3 \underline{y} = 130 \cdot e^{i2x}$$

aus, die sich durch eine "verwandte" Störfunktion von der gegebenen Differentialgleichung unterscheidet (siehe unten). Diese Differentialgleichung hat komplexwertige Lösungen; um dies auszudrücken, wird die Variable  $y$  unterstrichen. Zum Aufsuchen einer partikulären Lösung dieser Gleichung kann jetzt der Ansatz nach Tabelle auf Seite 155 f:

$$\underline{y}_p = \underline{a} e^{i2x}$$

gemacht werden. Durch das Auftreten einer Exponentialfunktion ist dieser Ansatz in der Weiterverarbeitung deutlich einfacher als der Lösungsansatz  $y_p = a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x$ . Haben wir  $\underline{y}_p$  bestimmt, so ist einfach dessen Imaginärteil zu nehmen; dieser ist gerade die gesuchte partikuläre Lösung  $y_p$  von  $y'' + 4y' + 3y = 130 \cdot \sin 2x$ .

Warum geht das so einfach? Wegen  $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha$  ist die komplexwertige Funktion  $y_p$  Lösung von  $y'' + 4 y' + 3 y = 130 \cdot e^{j2x}$ . Während nun der *Realteil* von  $y_p$  die Gleichung  $y'' + 4 y' + 3 y = 130 \cdot \cos 2x$  löst (rechte Seite ist Realteil von  $130 \cdot e^{j2x}$ ), löst der *Imaginärteil* von  $y_p$  gerade unsere Differentialgleichung  $y'' + 4 y' + 3 y = 130 \cdot \sin 2x$  (rechte Seite ist Imaginärteil von  $130 \cdot e^{j2x}$ ). Tatsächlich sind wir aufgrund der Aufgabenstellung nur am Imaginärteil von  $y_p$  interessiert.

Wir beginnen nun das Lösungsverfahren zum Aufsuchen von  $y_p$ :

$$y_p = \underline{a} e^{j2x} = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} e^{j2x}.$$

Der komplexe Faktor  $\underline{a}$  wurde dabei im Exponentialformat geschrieben:  $\hat{y}$  ist der Betrag,  $\varphi$  der Winkel von  $\underline{a}$ . Einsetzen in die Differentialgleichung führt wegen  $y_p' = 2j \hat{y} \cdot e^{j\varphi} e^{j2x}$  und  $y_p'' = 2j \cdot 2j \cdot \hat{y} \cdot e^{j\varphi} e^{j2x} = -4 \hat{y} \cdot e^{j\varphi} e^{j2x}$  auf

$$-4 \hat{y} \cdot e^{j\varphi} e^{j2x} + 4 \cdot 2j \hat{y} \cdot e^{j\varphi} e^{j2x} + 3 \cdot \hat{y} \cdot e^{j\varphi} e^{j2x} = 130 \cdot e^{j2x}$$

$$\hat{y} e^{j\varphi} e^{j2x} (-1 + 8j) = 130 \cdot e^{j2x}$$

Division durch  $e^{j2x}$  und den geklammerten Term ergibt:  $\hat{y} e^{j\varphi} = \frac{130}{-1 + 8j}$

Hier steht aber gerade, dass  $\hat{y}$  der Betrag und  $\varphi$  der Winkel von  $\frac{130}{-1 + 8j}$  ist. Weil

$\frac{130}{-1 + 8j} = 2 \sqrt{65} \cdot e^{j(-97,1^\circ)}$ , ist  $\hat{y} = 2 \sqrt{65}$  und  $\varphi = -97,1^\circ$ . Somit lautet eine partikuläre Lösung für die komplexe Störfunktion  $s(x) = 130 \cdot e^{j2x}$ :

$$y_p = \hat{y} e^{j\varphi} e^{j2x} = 2 \sqrt{65} \cdot e^{j(-97,1^\circ)} \cdot e^{j2x} = 2 \sqrt{65} \cdot e^{j(2x - 97,1^\circ)} = 2 \sqrt{65} [\cos(2x - 97,1^\circ) + j \sin(2x - 97,1^\circ)].$$

Ihr Imaginärteil ist unsere gesuchte partikuläre Lösung:  $y_p = 2 \sqrt{65} \cdot \sin(2x - 97,1^\circ)$ .

Stelle die Gleichheit mit der partikulären Lösung aus Beispiel 4.20 c) fest!

**Im Überblick: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung heißt **linear**, wenn sie in der Form  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = s(x)$  geschrieben werden kann. Sind die Koeffizienten  $p$  und  $q$  Konstante, so spricht man von einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit **konstanten Koeffizienten**. Wie bei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung heißt die Funktion  $s(x)$  wieder **Störfunktion**. Ist die Störfunktion  $s(x)$  identisch gleich null, so heißt die lineare Differentialgleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.

Die grundsätzliche Vorgangsweise bei der Lösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung gleicht völlig jener bei einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Die **allgemeine Lösung**  $y_h$  einer **homogenen** linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann einfach mit einem **Exponentialansatz** gefunden werden, der zur so genannten **charakteristischen Gleichung** der Differentialgleichung führt. Aus ihr folgt die allgemeine Lösung  $y_h$  der homogenen Differentialgleichung.

Die **allgemeine Lösung**  $y$  einer **inhomogenen** linearen Differentialgleichung ist als **Summe** der **allgemeinen Lösung**  $y_h$  der zugehörigen **homogenen** Differentialgleichung und einer **beliebigen partikulären Lösung**  $y_p$  der **inhomogenen** Differentialgleichung darstellbar:  $y = y_h + y_p$ .

Eine **partikuläre Lösung**  $y_p$  der **inhomogenen** linearen Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten zu erhalten, kann durch einen **Lösungsansatz entsprechend dem Störterm  $s(x)$**  aufgesucht werden.

Liegt, wie in den Anwendungen in der Regel der Fall, eine **Anfangswert- oder Randwertaufgabe** vor, so sind in der allgemeinen Lösung  $y = y_h + y_p$  die Integrationskonstanten entsprechend zu bestimmen. Es ergibt sich eine die Anfangs- oder Randbedingungen erfüllende partikuläre Lösung, die im Allgemeinen nicht mit  $y_p$  übereinstimmt.

## Aufgaben

**4.39** Welche der Differentialgleichungen sind linear, welche davon haben konstante Koeffizienten?

a)  $y'' + 2y' + 3 = x^2$

b)  $y'' + 4y = 2y'$

c)  $y'' + x \cdot y' = 2$

d)  $y'' + y' \cdot y = x$

e)  $y'' - 2x^2 \cdot y = 5$

f)  $y'' + y'^2 = 0$

**4.40** Bestimme die allgemeine Lösung:

a)  $y'' + y' - 2y = 0$

b)  $3y'' + 4y' + y = 0$

c)  $y'' - 3y' = 0$

d)  $y'' - 4y = 0$

e)  $y'' = 0$

f)  $y'' + 6y' + 9y = 0$

g)  $y'' + 2y' = 0$

h)  $y'' + y = 0$

i)  $y'' + 4y' + 5y = 0$

j)  $y'' + 6y' + 25y = 0$

k)  $y'' + 10y' + 26y = 0$

l)  $y'' + 4y' + 8y = 0$

**4.41** Löse das Anfangswertproblem:

a)  $y'' + 6y' + 5y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 4$

b)  $y'' + 8y' + 12y = 0; y(0) = 10, y'(0) = 8$

c)  $y'' + 4y' + 8y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 0$

d)  $y'' + 10y' + 26y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 2$

e)  $y'' + 8y' + 20y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 0$

f)  $y'' + \omega^2 \cdot y = 0; y(0) = r, y'(0) = 0$

**4.42** Bestimme die allgemeine Lösung:

a)  $y'' + 4y' + 3y = 6$

b)  $y'' + 4y' + 3y = 3x + 1$

c)  $y'' + 4y' + 3y = 9x^2 + 6x$

d)  $y'' + 4y' + 3y = 12 \cdot e^{-2x}$

e)  $y'' + 4y' + 5y = 10 \cdot e^{-2x}$

f)  $y'' + 4y' + 8y = 16x$

g)  $y'' + 6y' + 9y = 169 \cdot \sin(2x)$

h)  $y'' + 2y' + 17y = 50 \cdot \cos(3x)$

i)  $y'' + 4y' + 20y = 68 \cdot \sin(4x)$

j)  $y'' + 9y = 18 \cdot \cos 3x$

## 4.5 Schwingungen

Schwingungen können sowohl bei mechanischen als auch bei elektromagnetischen Systemen auftreten. Dabei wird Energie periodisch zwischen Energiespeichern hin und her bewegt. Einfache Beispiele:

- (1) Feder-Masse-System (Abb. 4.31): Periodische Umwandlung der potentiellen Energie der Feder in kinetische Energie der Masse und umgekehrt.
- (2) Elektrischer Reihenschwingkreis (Abb. 4.32): Periodische Umwandlung der elektrischen Energie des Kondensators in magnetische Energie der Spule und umgekehrt.

Schwingungen werden in *freie* und *erzwungene* Schwingungen eingeteilt. Bei einer freien Schwingung wird das schwingungsfähige System einmalig angeregt und bleibt dann sich selbst überlassen. Bei einer erzwungenen Schwingung wirkt eine Erregergröße ständig von außen ein.

### 4.5.1 Freie Schwingungen

Das gedämpfte **Feder-Masse-System** in Abb. 4.31 ist ein physikalisches Modell für viele so genannte *lineare Oszillatoren*. Dabei ist ein Körper der Masse  $m$  mit einer Feder und einem Dämpfer verbunden. Feder und Kolben des Dämpfers werden als masselos angenommen. Von der Schwerkraft kann abgesehen werden, sie bedingt nur eine tieferliegende Ruhelage. Mit  $y(t)$  wird die Auslenkung der Masse  $m$  aus der Ruhelage (Gleichgewichtslage) zur Zeit  $t$  bezeichnet. Folgende Kräfte wirken auf die Körpermasse:

- (a) Die zur Auslenkung  $y$  entgegengesetzt gerichtete Rückstellkraft  $F_F$  der Feder. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit des HOOKE'schen Gesetzes ("elastische" Feder) gilt:  $F_F = -c \cdot y$  mit  $c$  als so genannter *Federkonstante*.
- (b) Die geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft  $F_R$ . Diese wird proportional der Geschwindigkeit  $v = \dot{y}$  angenommen (NEWTON'schen Reibungsgesetz der viskosen Reibung):  $F_R = -b \cdot v = -b \cdot \dot{y}$  mit  $b$  als so genannter *Dämpfungskonstante*. Sie wirkt der Bewegung stets entgegen.

Dann gilt nach dem dynamischen Grundgesetz:  $m \cdot a = F_F + F_R = -c \cdot y - b \cdot \dot{y}$ . Mit  $a = \ddot{y}$  ergibt sich nach Division durch  $m$  die Differentialgleichung der *freien* Schwingung eines Feder-Masse-Systems:  $\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = 0$ .

Wir wählen als Anfangsbedingungen:  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0$ . D.h. der Körper mit der Masse  $m$  wird zur Zeit  $t = 0$  aus der Ruhelage mit der Geschwindigkeit  $v_0$  angestoßen.

Anmerkung: Häufig wird in den Anwendungen die abhängige Variable statt mit  $y$  mit  $x$  bezeichnet.

Im **elektrischen Reihenschwingkreis** in Abb. 4.32 wird der Kondensator bei offenem Schalter auf die Spannung  $U_0$  aufgeladen. Wird der Schalter zur Zeit  $t = 0$  geschlossen, so beginnt sich der Kondensator zu entladen, es fließt ein Strom  $i(t)$ . An den drei Schaltelementen OHM'scher Widerstand, Spule und Kondensator

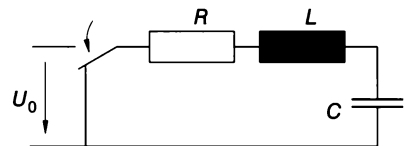


Abb. 4.32 Elektrischer Reihenschwingkreis

liegen für  $t \geq 0$  die Spannungen:  $u_R = R \cdot i$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  und  $u_C = \frac{q}{C}$  mit  $q$  als momentaner Kondensatorladung. Nach dem 2. KIRCHHOFF'schen Gesetz ist  $u_R + u_L + u_C = 0$ .

Ableiten dieser Gleichung nach der Zeit führt auf  $R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$ .

Da  $i = \frac{dq}{dt}$ , ergibt sich schließlich nach Division durch  $L$  die Differentialgleichung für die Stromstärke  $i$  des Reihenschwingkreises:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

Es gilt  $i(0) = 0$ . Aus  $Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = 0$  folgt für  $t = 0$ :  $0 + L \frac{di}{dt} + U_0 = 0$  und daraus  $\frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{L}$ .

Sieht man hier vom Vorzeichen ab (was durch eine Änderung der Stromrichtung erzielt werden kann), so lauten die Anfangsbedingungen:  $i(0) = 0$  und  $\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L}$  für  $t = 0$ .

*Anmerkung:* Gleiche Differentialgleichungen könnte man auch für  $u_C$ ,  $u_L$  und  $u_R$  sowie auch für die Kondensatorladung  $q$  ableiten!

Die Differentialgleichungen des Feder-Masse-Systems und des Reihenschwingkreises stimmen formal völlig überein. In beiden Fällen liegt eine **homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** vor. Dieser Typ einer Differentialgleichung lautet in einer "neutralen" Form:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

$\delta$  heißt *Abklingkoeffizient*,  $\omega_0$  *Kennkreisfrequenz*. Häufig wird eine dimensionslose Kennzahl zur Beschreibung der Dämpfung verwendet, der *Dämpfungsgrad*  $D$  (auch  $\vartheta$  mit bezeichnet). Dabei besteht der Zusammenhang  $\delta = D \cdot \omega_0$ .

Die folgende Tabelle zeigt den Zusammenhang dieser Größen mit den mechanischen Größen beim Feder-Masse-System bzw. den elektrischen Größen beim Reihenschwingkreis:

	Feder-Masse-System	Elektr. Reihenschwingkreis
Konstante	$m$	$L$
Konstante	$b$	$R$
Konstante	$c$	$\frac{1}{C}$
Kennkreisfrequenz $\omega_0$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Abklingkoeffizient $\delta = D \cdot \omega_0$	$\frac{b}{2m}$	$\frac{R}{2L}$
Dämpfungsgrad $D = \delta / \omega_0$	$\frac{b}{2\sqrt{cm}}$	$\frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}$
Differentialgleichung der freien Schwingung	$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = 0$	$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$ (auch für $u_C$ , $u_R$ oder $u_L$ )

**Beispiel 4.22 : Frei schwingendes Feder-Masse-System**

Löse die Differentialgleichung des frei schwingenden Feder-Masse-Systems mit  $m = 1$  kg und  $c = 16$  N/m, wenn die Dämpfungskonstante  $b$  den folgenden Wert hat:

- a)  $b = 0$  kg/s      b)  $b = 1$  kg/s      c)  $b = 10$  kg/s      d)  $b = 8$  kg/s

unter den Anfangsbedingungen:  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0 = 1,2 \frac{m}{s}$ .

**Lösung**

Zu a) Aus  $\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = 0$  folgt  $\ddot{y} + 16 y = 0$ . Die Schwingung ist ungedämpft. Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung lösen wir ihre charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 j$ ;  $\lambda_2 = -4 j$ . Somit lautet die allgemeine Lösung:  $y(t) = C_1 \cdot \sin(4 t) + C_2 \cdot \cos(4 t)$ .

Damit klärt sich auch der Name "Nennkreisfrequenz" für  $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_0$  ist die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung.

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\dot{y}(t) = 4 \cdot C_1 \cdot \cos(4 t) - 4 \cdot C_2 \cdot \sin(4 t)$$

$$y(0) = C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 = C_2 = 0.$$

$$\dot{y}(0) = 4 \cdot C_1 \cdot \cos 0 - 4 \cdot 0 \cdot \sin 0 = 4 \cdot C_1 = 1,2 \Rightarrow C_1 = 0,3.$$

Daher ergibt sich als die gesuchte Bewegungsgleichung:  $y(t) = 0,3 \text{ m} \cdot \sin(4 t)$ .

Abb. 4.33 zeigt den zeitlichen Verlauf der ungedämpften Schwingung.

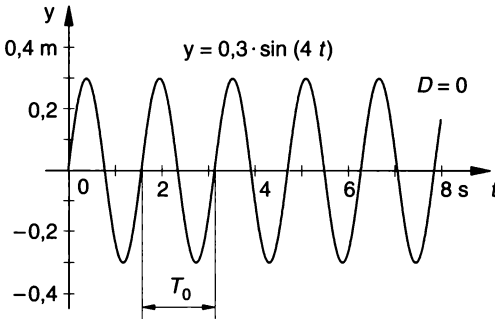


Abb. 4.33 Ungedämpfte Schwingung

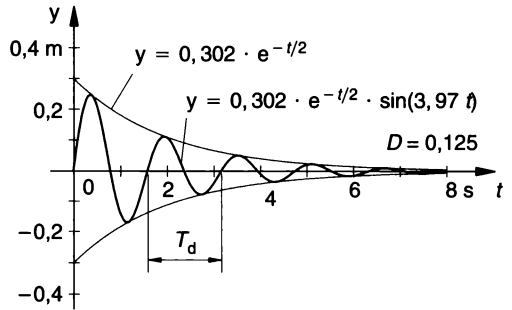


Abb. 4.34 Schwingfall: Geringe Dämpfung

Zu b)  $\ddot{y} + \dot{y} + 16 y = 0$ ; Dämpfungsgrad  $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{0,5}{4} = 0,125$ .

$$\lambda^2 + \lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{3}{2} \sqrt{7} = -0,5 + 3,97 j, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{3}{2} \sqrt{7} = -0,5 - 3,97 j$$

Somit lautet die allgemeine Lösung:  $y(t) = C_1 \cdot e^{-t/2} \cdot \sin(3,97 t) + C_2 \cdot e^{-t/2} \cdot \cos(3,97 t)$ .

$\omega_d = 3,97 \text{ s}^{-1}$  heißt *Eigenkreisfrequenz* der freien gedämpften Schwingung. Sie ist immer kleiner als die Nennkreisfrequenz  $\omega_0$ . Damit verbunden steigt die Schwingungsdauer

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 1,58 \text{ s}$$

gegenüber dem ungedämpften Fall an.

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-t/2} \cdot \sin(3,97 t) + C_2 \cdot e^{-t/2} \cdot \cos(3,97 t) =$$

$$= e^{-t/2} \cdot [C_1 \cdot \sin(3,97 t) + C_2 \cdot \cos(3,97 t)]$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{2} e^{-t/2} \cdot [C_1 \cdot \sin(3,97 t) + C_2 \cdot \cos(3,97 t)] +$$

$$+ e^{-t/2} \cdot [3,97 \cdot C_1 \cdot \cos(3,97 t) - 3,97 \cdot C_2 \cdot \sin(3,97 t)]$$

$$y(0) = e^0 \cdot [C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0] = C_2 = 0$$

$$\dot{y}(0) = -\frac{1}{2} e^0 \cdot [C_1 \cdot \sin 0 + 0 \cdot \cos 0] + e^0 \cdot [3,97 \cdot C_1 \cdot \cos 0 - 3,97 \cdot 0 \cdot \sin 0] = 3,97 \cdot C_1 = 1,2$$

$$\Rightarrow C_1 = 0,302.$$

Daher ergibt sich als die gesuchte Bewegungsgleichung:  $y(t) = 0,302 \text{ m} \cdot e^{-t/2} \cdot \sin(3,97 t)$ .

Abb. 4.34 zeigt den zeitlichen Verlauf der Schwingung. Sie verläuft "sinusförmig" zwischen den Kurven  $y(t) = \pm 0,302 \cdot e^{-t/2}$ . Man spricht von einem **Schwingfall**.

Zu c) Die Dämpfung wird weiter erhöht, der Dämpfungsgrad beträgt nun  $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{5}{4} = 1,25$ .

Die Differentialgleichung lautet:  $\ddot{y} + 10 \dot{y} + 16 y = 0$ .

$$\lambda^2 + 10 \lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -8.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung:  $y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-8t}$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\dot{y}(t) = -2 C_1 \cdot e^{-2t} - 8 C_2 \cdot e^{-8t}$$

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = C_1 + C_2 = 0$$

$$\dot{y}(0) = -2 C_1 \cdot e^0 - 8 C_2 \cdot e^0 = -2 C_1 - 8 C_2 = 1,2.$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems:  $C_1 = 0,2$ ;  $C_2 = -0,2$ .

Daher ergibt sich als die gesuchte Bewegungsgleichung:  $y(t) = 0,2 \text{ m} \cdot (e^{-2t} - e^{-8t})$ .

Der Bewegungsverlauf hat sich nun völlig geändert (Abb. 4.35). Es kommt zu keinem periodischen Hin- und Herschwingen mehr. Der Körper schwingt nur mehr einmal aus und "kriecht" dann in die Ruhelage zurück. Man spricht von einem **Kriechfall** oder einer **aperiodischen Bewegung**.

Je nach Anfangsbedingung sind auch andere Kriechfälle möglich. Jedenfalls hat der Graph der Lösungskurve für  $t > 0$  höchstens eine Nullstelle oder höchstens einen Extremwert.

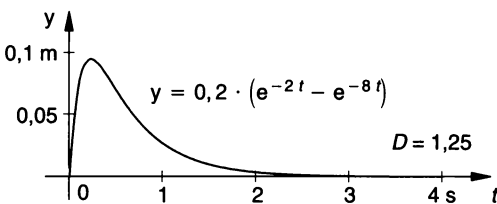


Abb. 4.35 Kriechfall: Große Dämpfung

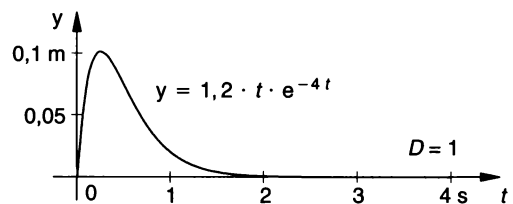


Abb. 4.36 Aperiodischer Grenzfall

Zu d) Für  $b = 8 \text{ kg/s}$  ist der Dämpfungsgrad  $D = \frac{\delta}{\omega_0} = 1$ . Die Differentialgleichung lautet:

$$\ddot{y} + 8 \dot{y} + 16 y = 0.$$

$$\lambda^2 + 8 \lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -4.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung:  $y(t) = C_1 \cdot e^{-4t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-4t} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-4t}$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\dot{y}(t) = C_2 \cdot e^{-4t} - 4 \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-4t}$$

$$y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot e^0 = C_1 = 0$$

$$\dot{y}(0) = C_2 \cdot e^0 - 4 \cdot (0 + C_2 \cdot 0) \cdot e^0 = C_2 = 1,2.$$

Daher ergibt sich als die gesuchte Bewegungsgleichung:  $y(t) = 1,2 \text{ m} \cdot t \cdot e^{-4t}$ .



Abb. 4.36 zeigt die Lösungskurve. Man spricht vom **aperiodischen Grenzfall**. Dieser Fall trennt die eigentlichen Schwingungen (Schwingfälle) von den aperiodischen Bewegungen (Kriechfällen). Er entsteht aus den Schwingfällen durch den Grenzübergang  $\omega_d \rightarrow 0$  oder  $T \rightarrow \infty$ .

Abb. 4.37 zeigt alle besprochenen Bewegungsformen nebeneinander zum Vergleich.

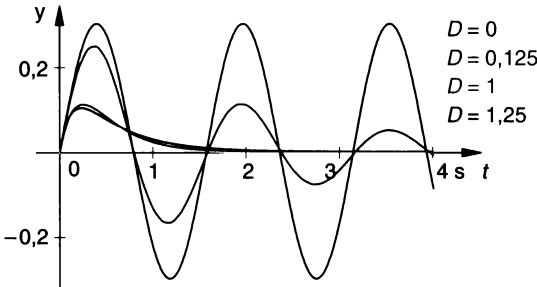


Abb. 4.37 Freie Schwingungen

Allgemein gilt:

**Bewegungsformen einer freien Schwingung** nach  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$ :

**1. Schwingfall:**  $\delta < \omega_0$  oder  $D < 1$ , d.h. geringe Dämpfung.

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei konjugiert komplexe Lösungen. Daraus folgt die allgemeine Lösung:  $y = C_1 \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega_d \cdot t) = A e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi)$ , wobei  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$  die *Eigenkreisfrequenz* der freien Schwingung des gedämpften Systems ist. Es kommt zu einer gedämpften Schwingung; durch Energieverluste nimmt die "Schwingungsamplitude" exponentiell gegen null ab.

Bei wachsender Dämpfung wird  $\omega_d$  kleiner bzw. die Periodendauer  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$  größer.

Wegen  $\omega_d < \omega_0$  ist  $T_d$  stets größer als die Periodendauer  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  des ungedämpften Systems. Im ungedämpften Zustand ( $\delta = 0, D = 0$ ) schwingt das System mit der Kennkreisfrequenz  $\omega_0$  (= Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems).

**2. Kriechfall** (auch *aperiodische Schwingung*):  $\delta > \omega_0$  oder  $D > 1$ , d.h. starke Dämpfung. Die charakteristische Gleichung besitzt zwei ungleiche reelle *negative* Lösungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Daraus folgt die allgemeine Lösung:  $y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$ .

Man kann zeigen, dass diese Funktion für  $t > 0$  höchstens eine Nullstelle oder ein Extremum hat.

**3. Aperiodischer Grenzfall:**  $\delta = \omega_0$  oder  $D = 1$ .

Dieser Fall entsteht aus den Schwingfällen durch den Grenzübergang  $\omega_d \rightarrow 0$  oder  $T_d \rightarrow \infty$ . Die charakteristische Gleichung besitzt nur eine reelle negative Lösung:

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ . Die allgemeine Lösung lautet dementsprechend:  $y = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\delta t}$ .

Auch hier kann man zeigen, dass diese Funktion für  $t > 0$  höchstens eine Nullstelle oder ein Extremum hat.

### Beispiel 4.23 : Mechanische Schwingung

Eine Maschine besitzt einen Schwingungsdämpfer mit der Masse  $m = 25 \text{ kg}$ , der Dämpfungskonstante  $b = 1000 \text{ kg/s}$  und der Federkonstante  $c = 6,40 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  erfährt der Dämpfer in seiner Ruhelage einen Stoß, der zu einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 4,00 \text{ m/s}$  führt. Untersuche den Ablauf der Bewegung!

#### Lösung

Die Differentialgleichung des Dämpfungssystem lautet:  $\ddot{y} + 2 \delta \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ . Einsetzen von  $\delta = \frac{b}{2m} = 20 \text{ s}^{-1}$  und  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 16 \text{ s}^{-1}$  ergibt (unter Weglassung der Einheiten):

$$\ddot{y} + 40 \dot{y} + 256 y = 0.$$

Dazu kommen die Anfangsbedingungen:  $y(0) = 0$  und  $\dot{y}(0) = 4,00 \text{ m/s}$ . Die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + 40 \lambda + 256 = 0$  besitzt die reellen Lösungen:  $\lambda_1 = -8$  und  $\lambda_2 = -32$ . Es liegt somit ein *Kriechfall* mit der allgemeinen Lösung  $y = C_1 \cdot e^{-8t} + C_2 \cdot e^{-32t}$  vor.

Mit  $\dot{y} = -8 C_1 \cdot e^{-8t} - 32 C_2 \cdot e^{-32t}$  ergibt sich aus den Anfangsbedingungen:

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = C_1 + C_2 = 0 \text{ und } \dot{y}(0) = -8 C_1 \cdot e^0 - 32 C_2 \cdot e^0 = -8 C_1 - 32 C_2 = 4.$$

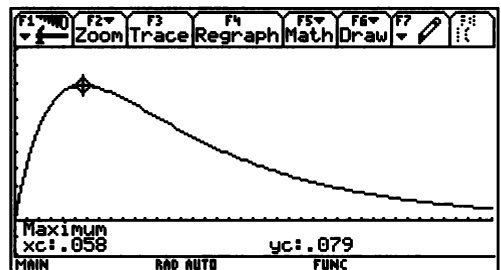
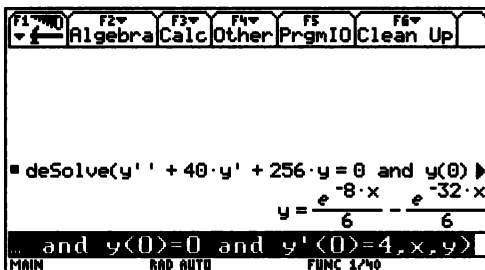
Daraus:  $C_1 = \frac{1}{6}$ ,  $C_2 = -\frac{1}{6}$ . Somit lautet die gewünschte partikuläre Lösung:

$$y = \frac{1}{6} (e^{-8t} - e^{-32t}).$$

Nullstellen:  $y = \frac{1}{6} (e^{-8t} - e^{-32t}) = 0$  nur für  $t = 0$ .

Verhalten im Unendlichen:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Extrema:  $\dot{y} = \frac{1}{6} (-8 \cdot e^{-8t} - 32 \cdot e^{-32t}) = 0$  für  $t = \frac{1}{24} \ln 4 \text{ s} = 0,058 \text{ s}$ . Dass dort tatsächlich ein Extremum, und zwar ein Maximum, vorliegt, erkennt man, weil für diesen Zeitwert  $\ddot{y} < 0$  ist. Für die maximale Auslenkung gilt:  $y_{\max} = 7,9 \text{ cm}$ .



### Beispiel 4.24 : Frei schwingender elektrischer Reihenschwingkreis

Gegeben ist ein elektrischer Reihenschwingkreis (Abb. 4.32, Seite 160) mit  $L = 1 \text{ H}$  und  $C = 100 \mu\text{F}$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  beginne sich der mit  $U_0 = 100 \text{ V}$  aufgeladene Kondensator zu entladen. Untersuche den Verlauf des Stromes  $i$ , wenn

- a)  $R = 50 \Omega$     b)  $R = 250 \Omega$     c)  $R = 200 \Omega$ .

#### Lösung

Zu lösen ist das Anfangswertproblem  $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$ ,  $i(0) = 0$  und  $\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L}$  für  $t = 0$ .

Beim Lösen der Differentialgleichung werden die Einheiten weggelassen.

Zu a)  $\frac{d^2i}{dt^2} + 50 \cdot \frac{di}{dt} + 10000 \cdot i = 0$ ,  $i(0) = 0$  und  $\frac{di}{dt} = 100$  für  $t = 0$ .

Charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + 50 \lambda + 10000 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -25 \pm j \cdot 96,8$ . Damit liegt ein *Schwingfall* vor.

Allgemeine Lösung:  $i(t) = C_1 \cdot e^{-25t} \cdot \sin(96,8 t) + C_2 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(96,8 t)$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen führt zu:  $i(t) = 1,03 \cdot e^{-25t} \cdot \sin(96,8 t)$  (in A).

Zu b)  $\frac{d^2i}{dt^2} + 250 \cdot \frac{di}{dt} + 10000 \cdot i = 0$ ,  $i(0) = 0$  und  $\frac{di}{dt} = 100$  für  $t = 0$ .

Charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + 250 \lambda + 10000 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -50, \lambda_2 = -200$ . Damit liegt ein *Kriechfall* vor.

Allgemeine Lösung:  $i(t) = C_1 \cdot e^{-50t} + C_2 \cdot e^{-200t}$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen führt zu:  $i(t) = 0,667 \cdot (e^{-50t} - e^{-200t})$  (in A).

Zu c)  $\frac{d^2i}{dt^2} + 200 \cdot \frac{di}{dt} + 10000 \cdot i = 0$ ,  $i(0) = 0$  und  $\frac{di}{dt} = 100$  für  $t = 0$ .

Charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + 200 \lambda + 10000 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -100$ . Damit liegt der *aperiodische Grenzfall* vor.

Allgemeine Lösung:  $i(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-100t}$ .

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen führt zu:  $i(t) = 100 \cdot t \cdot e^{-100t}$  (in A).

Abb. 4.38 zeigt die drei Stromverläufe.

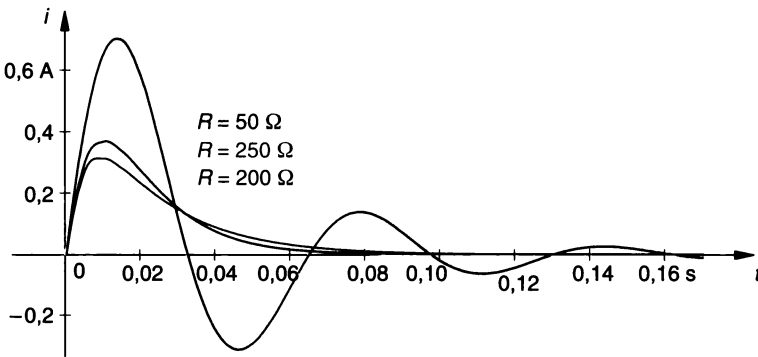


Abb. 4.38 Freie elektrische Schwingungen

### 4.5.2 Erzwungene Schwingungen

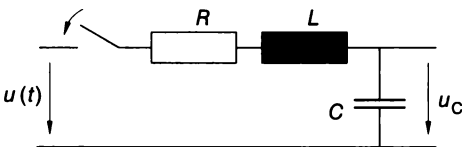


Abb. 4.39 Spannungsquelle  $u(t)$  im elektrischen Reihenschwingkreis

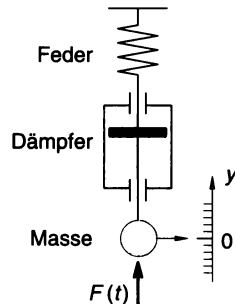


Abb. 4.40 Äußere Kraft  $F(t)$  beim Feder-Masse-System

Bei einer erzwungenen Schwingung wirkt von außen eine *Fremderregung*, wobei es von Bedeutung ist, wie und wo die Fremderregung an dem System angreift. In Abb. 4.40 wirkt eine Kraft  $F(t)$  auf die Masse des Feder-Masse-Systems. Eine andere Erregungsart würde vorliegen, wenn der Fußpunkt der Feder (das ist das obere Ende der Feder) hin- und herbewegt wird. In Abb. 4.39 ist in einem elektrischen Reihenschwingkreis eine Spannungsquelle  $u(t)$  geschaltet. Im Folgenden werden die Erregungen wie in den Abbildungen gezeichnet behandelt.

Wie die Erregungsart kann auch der Erregungsverlauf verschieden sein: Impulsförmig, sprungförmig, harmonisch, periodisch und auch nicht periodisch.

**Feder-Masse-System:**  $m \cdot a = F_F + F_R + F(t) = -c \cdot y - b \cdot v + F(t)$ . Daraus ergibt sich wieder mit  $a = \ddot{y}$  nach Division durch  $m$  die Differentialgleichung der *erzwungenen* Schwingung eines Feder-Masse-Systems:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = \frac{F(t)}{m}.$$

**Elektrischer Reihenschwingkreis:** Für die gleichzeitige Behandlung des Feder-Masse-Systems und des Schwingkreises ist es etwas einfacher, wenn nun die Differentialgleichung für die *Kondensatorspannung*  $u_C$  statt für die Stromstärke  $i$  betrachtet wird. Wegen

$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$  kann aus dem Verlauf von  $u_C$  leicht die Stromstärke  $i$  bestimmt werden. Mit

$u(t)$  als "Eingangsspannung" gilt nun  $u_R + u_L + u_C = u$  oder  $Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = u$ . Einsetzen

von  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$  und (nach Ableiten von  $i$ )  $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}$  führt nach Division durch  $LC$  auf die Differentialgleichung für die Kondensatorstromstärke  $u_C$ :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u.$$

Die beiden Differentialgleichungen stimmen wieder formal völlig überein. In beiden Fällen liegt eine **inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** vor. Ihre Lösung ergibt sich als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung mit einer beliebigen partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die **allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung** beschreibt die **Eigenschwingungen** des schwingungsfähigen Systems, die je nach Dämpfung in einer Schwingung (Schwingfall) oder in einem Kriechvorgang (Kriechfall, aperiodischer Grenzfall) bestehen können. Ihr Beitrag ist aufgrund der unvermeidlichen Dämpfung nur in der Einschwingzeit von Bedeutung.

### Beispiel 4.25 : Einschwingvorgang und stationärer Zustand

Ein Feder-Masse-System ist durch folgende Daten gekennzeichnet:

Masse  $m = 20,0$  kg; Dämpfungskonstante  $b = 600$  kg/s; Federkonstante  $c = 1,25 \cdot 10^4$  N/m. Ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  s wirkt eine konstante Kraft  $F = 5,00$  kN auf das bis zu diesem Zeitpunkt ruhende System ein. Bestimme den zeitlichen Ablauf der Auslenkung.

#### Lösung

Der Bewegungsverlauf wird durch die inhomogene Differentialgleichung

$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = \frac{F(t)}{m}$  beschrieben. Einsetzen der Zahlenwerte ergibt bei Weglassung der Einheiten:  $\ddot{y} + 30 \dot{y} + 625 y = 250$ ; dazu die Anfangsbedingungen:  $y(0) = 0$ ;  $\dot{y}(0) = 0$ .

(1) Allgemeine Lösung  $y_h$  der homogenen Differentialgleichung:

Da die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + 30 \lambda + 625 = 0$  die beiden konjugiert komplexen Lösungen  $\lambda_{1,2} = -15 \pm \sqrt{225 - 625} = -15 \pm 20 j$  besitzt, ist

$$y_h = C_1 \cdot e^{-15t} \cdot \sin(20 t) + C_2 \cdot e^{-15t} \cdot \cos(20 t).$$

(2) Aufsuchen einer partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen Differentialgleichung:

Lösungsansatz entsprechend der konstanten Störfunktion  $s(t) = 250$ :  $y_p = a$ . Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt wegen  $\dot{y}_p = 0$  und  $\ddot{y}_p = 0$ :

$$0 + 30 \cdot 0 + 625 a = 250, \text{ woraus } a = \frac{2}{5} \text{ folgt. Daher: } y_p = \frac{2}{5}.$$

(3) Allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_h + y_p = e^{-15t} [C_1 \cdot \sin(20 t) + C_2 \cdot \cos(20 t)] + \frac{2}{5}.$$

Die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$  und  $\dot{y}(0) = 0$  (System anfänglich im Ruhezustand) ergibt  $C_1 = -\frac{3}{10}$  und  $C_2 = -\frac{2}{5}$ .

$$\text{Somit: } y(t) = \underbrace{-e^{-15t} [0,3 \cdot \sin(20 t) + 0,4 \cdot \cos(20 t)]}_{\text{flüchtig}} + \underbrace{0,4}_{\text{stationär}}.$$

Die Lösung enthält einen *flüchtigen* Anteil, der von der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung herrührt und einen *stationären* Anteil (Abb. 4.41). Für hinreichend großes  $t$  ist  $y \approx 0,4$  m. Damit stellt sich dort ein neuer Gleichgewichtszustand ein. *Ist man nur an der stationären Lösung interessiert, so genügt die Ermittlung der partikulären Lösung nach (2), in die die Anfangsbedingungen nicht eingehen.*

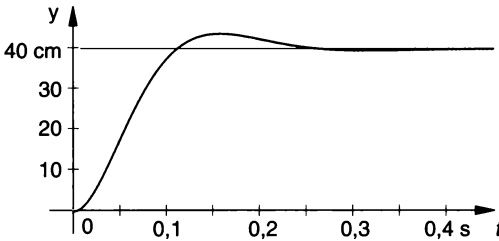


Abb. 4.41 Einschwingen auf den stationären Zustand

Von besonderer Bedeutung ist eine sinusförmig auf ein schwingungsfähiges System einwirkende Kraft  $F(t) = \hat{F} \cdot \sin(\omega t)$  bzw. Spannung  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ . Ist die Kraft  $F(t)$  (oder die Spannung  $u(t)$ ) periodisch, so kann  $F(t)$  als Fourierreihe dargestellt werden:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \cos(2 \omega t) + \dots + b_1 \cdot \sin(\omega t) + b_2 \cdot \sin(2 \omega t) + \dots$$

Man kann dann die Differentialgleichung für jedes Reihenglied lösen (soweit erforderlich) und dann sämtliche Lösungen addieren. Daher genügt es, sich auf eine harmonische Funktion  $F(t) = \hat{F} \cdot \sin(\omega t)$  mit  $\omega$  als *Erregerkreisfrequenz* zu beschränken.

Zur weiteren Behandlung werden wieder die Abklingkonstante  $\delta$  und die Kennkreisfrequenz  $\omega_0$  verwendet, um eine weitgehend gemeinsame Bezeichnung eines linearen mechanischen oder elektrischen schwingungsfähigen Systems zu haben. Die Störfunktion wird nun "mechanisch" eingekleidet.

### Beispiel 4.26 : Stationäre Lösung bei harmonischer Erregung ("Sinusantwort")

Bestimme die *stationäre* Lösung der Differentialgleichung  $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \sin(\omega t)$ .  
Im Falle des betrachteten elektrischen Schwingkreises ist die Auslenkung  $y$  durch die  
Kondensatorspannung  $u_C$  sowie  $\frac{\hat{F}}{m}$  durch  $\frac{\hat{u}}{L C}$  zu ersetzen.

#### Lösung

Man kann eine partikuläre Lösung  $y_p$  durch den Ansatz  $y_p = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$  finden.  
Wir gehen jedoch wie im Beispiel 4.21, Seite 157, vor, wobei nun aber allgemein gerechnet  
wird. Dies ist notwendig, um Abhängigkeiten zu erkennen. Ausgangspunkt ist die komplexwertige  
Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{\hat{F}}{m} \cdot e^{j\omega t} = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \cos(\omega t) + j \cdot \frac{\hat{F}}{m} \cdot \sin(\omega t).$$

Zur Gewinnung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann man  
den Ansatz (siehe Tabelle für Lösungsansätze auf Seite 154 f)  $y_p = \underline{a} \cdot e^{j\omega t} = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$   
machen. Dabei wurde der Faktor  $\underline{a}$  im Exponentialformat in der Form  $\underline{a} = \hat{y} \cdot e^{j\varphi}$  geschrieben.  
Wegen  $\dot{y}_p = \hat{y} \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$  und  $\ddot{y}_p = \hat{y} \cdot (-\omega^2) \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$  erhält man durch Einsetzen in  
die Differentialgleichung:

$$\hat{y} (-\omega^2) e^{j\varphi} e^{j\omega t} + 2\delta \hat{y} j \omega e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \omega_0^2 \hat{y} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\hat{F}}{m} e^{j\omega t}$$

$$\hat{y} e^{j\varphi} e^{j\omega t} (-\omega^2 + j 2\delta\omega + \omega_0^2) = \frac{\hat{F}}{m} e^{j\omega t}$$

Nach Division durch  $e^{j\omega t}$  und den geklammerten Term erhält man, wenn man noch zusätz-  
lich die beiden Seiten der Gleichung vertauscht:

$$\frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j(2\delta\omega)} = \hat{y} e^{j\varphi}. \quad (*)$$

Wir können diese Gleichung nun so sehen, dass die auf ihrer linken Seite stehende  
komplexe Größe auf die Exponentialform gebracht werden soll, wobei  $\hat{y}$  ihren Betrag und  $\varphi$   
ihren Winkel bezeichnet. An genau diesen beiden Größen sind wir interessiert.

$$\hat{y} = \left| \frac{\hat{F}}{m} \right| \cdot \frac{|1|}{|(\omega_0^2 - \omega^2) + j(2\delta\omega)|} \quad \text{oder} \quad \hat{y} = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Zur Bestimmung des Winkels  $\varphi$  der auf der linken Seite der Gleichung (\*) stehenden  
komplexen Größe ermitteln wir ihren Real- und Imaginärteil. Dazu wird die Zahl zuerst durch  
Erweitern mit der konjugiert komplexen des Nenners auf die Komponentenform gebracht:

$$\frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j(2\delta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\hat{F}}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} + j \cdot \frac{-(2\delta\omega) \frac{\hat{F}}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}$$

Der Imaginärteil ist negativ für alle  $\omega > 0$ .  $\varphi$  ist daher für alle Erregerfrequenzen  $\omega$  negativ,  
die Auslenkung  $y$  hinkt der erregenden Kraft stets nach. Ist  $\omega < \omega_0$ , dann ist der Realteil  
positiv, ist  $\omega > \omega_0$ , ist er negativ; daher gilt  $-\pi < \varphi < 0$ . Dividiert man den Imaginärteil durch  
den Realteil, so gilt:

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{oder} \quad \varphi = \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan \frac{2\delta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{für } \omega < \omega_0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } \omega = \omega_0 \\ -\arctan \frac{2\delta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} - \pi & \text{für } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Damit sind die Amplitude  $\hat{y} = \hat{y}(\omega)$  und die Phasenverschiebung  $\varphi = \varphi(\omega)$  der stationären Lösung gefunden. Der Imaginärteil von

$$\underline{y}_p = \hat{y} e^{i\varphi} e^{j\omega t} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \hat{y} \sin(\omega t + \varphi)$$

ist unsere gesuchte Beschreibung der stationären erzwungenen Schwingung:

$$y_p = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi).$$

Die erregende sinusförmige Kraft  $F$  (Spannung  $u$ ) zwingt also der Auslenkung  $y$  (Kondensatorspannung  $u_c$ ) ihre Frequenz auf. Die erzwungene Schwingung ist ungedämpft. Die Abhängigkeit von  $\omega$  wird als "Frequenzgang" der betreffenden Größe bezeichnet:

$\hat{y} = \hat{y}(\omega)$  **Frequenzgang der Amplitude**, auch Resonanzfunktion

$\varphi = \varphi(\omega)$  **Frequenzgang der Phase(nverschiebung)** zwischen erregender und erzwungener stationärer Schwingung

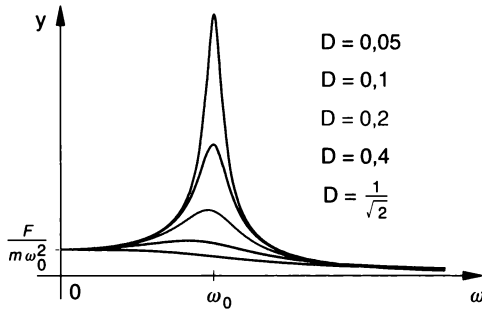


Abb. 4.42 Frequenzgang der Amplitude

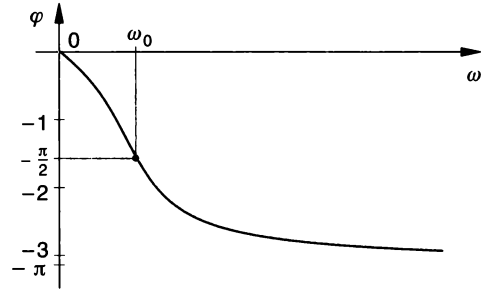


Abb. 4.43 Frequenzgang der Phasenverschiebung

Abb. 4.42 zeigt den Frequenzgang der Amplitude  $\hat{y}(\omega)$  bei verschiedenen starken Dämpfungsgraden  $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ .  $\hat{y}$  ist maximal, wenn der Radikand  $f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$  der Wurzel minimal ist. Dazu ist notwendig, dass  $f'(\omega) = 2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8\delta^2\omega = 0$ . Daraus folgt als positive Lösung:  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ .

Da  $\hat{y}$  stets positiv ist und im Unendlichen gegen null geht, kann es sich hier nur um ein Maximum handeln. Man spricht bei  $\omega = \omega_r$  von **Resonanz**,  $\omega_r$  heißt *Resonanzfrequenz*. Sie ist bei einer Dämpfung stets kleiner als die Nennkreisfrequenz  $\omega_0$  und die Eigenkreisfrequenz  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ :  $\omega_r < \omega_d < \omega_0$ . Die Phasenverschiebung  $\varphi$  liegt im Resonanzfall praktisch bei  $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ .

Die Berechnung der maximalen Amplitude ergibt  $\hat{y}_r = \hat{y}(\omega_r) = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ .

Wird bei Vorliegen des Resonanzfalls  $\delta$  kleiner, d.h. die Dämpfung geringer, so wird die Amplitude größer. Bei kleiner Dämpfung kann sie hohe Werte erreichen ("Resonanzkatastrophe").

Dies macht die Einsturzgefahr von Brücken verständlich, wenn die Belastung rhythmisch mit einer Frequenz erfolgt, die nahe der Eigenfrequenz der Brücke liegt.

Ist  $\delta = D \cdot \omega_0 = 0$  (keine Dämpfung), so wird die Amplitude unendlich groß. Bei höherer Dämpfung verschwindet die Resonanz (Aufgabe 4.65).

Abb. 4.43 zeigt den Frequenzgang der Phasenverschiebung. Die Auslenkung  $y$  hinkt der erregenden Kraft  $F$  bzw. die Kondensatorspannung  $u_c$  der angelegten Spannung  $u$  stets nach. Ist  $\omega$  sehr klein, so ist  $\varphi$  praktisch null; ist  $\omega$  sehr groß, so erfolgen die Schwingungen nahezu im Gegentakt ( $\varphi = \pi$ ). Auch der Verlauf von  $\varphi(\omega)$  hängt von der auftretenden Dämpfung ab.

**Beispiel 4.27 : Schwingung bei Resonanz mit und ohne Dämpfung**

Ein schwingungsfähiges System wird aus dem energielosen Zustand (Ruhezustand) mit der Resonanzkreisfrequenz  $\omega_r$  angeregt. Bestimme den Schwingungsverlauf bei einer sinusförmigen Anregung mit  $\frac{F(t)}{m} = 25 \text{ N/kg} \cdot \sin(\omega_r \cdot t)$ , wenn  $\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$  und keine Dämpfung vorliegt, d.h.  $\delta = 0$  ist.

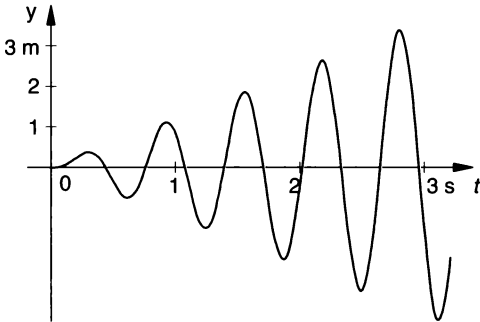
**Lösung**

Abb. 4.44 Resonanz im ungedämpften Fall

Die Differentialgleichung lautet bei Weglassung der Einheiten:  $\ddot{y} + 100 y = 25 \sin(\omega_r \cdot t)$ .

Die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  ist nun gleich  $\omega_0$ :  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot 0^2} = \omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$ .

(1) Aufsuchen der allgemeinen Lösung  $y_h$  der homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 + 100 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 10 j; \quad y_h = C_1 \cdot \sin(10 t) + C_2 \cdot \cos(10 t).$$

(2) Aufsuchen einer partikulären Lösung:

$$\text{Lösungsansatz laut Tabelle auf Seite 154 f: } y_p = t \cdot [a \cdot \sin(10 t) + b \cdot \cos(10 t)].$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt nach einem Koeffizientenvergleich der  $\sin(10 t)$ -Terme und  $\cos(10 t)$ -Terme  $a = 0$  und  $b = -\frac{5}{4}$ . Daher:

$$y_p = -\frac{5}{4} \cdot t \cdot \cos(10 t).$$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot \sin(10 t) + C_2 \cdot \cos(10 t) - \frac{5}{4} \cdot t \cdot \cos(10 t).$$

Die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt  $C_1 = \frac{1}{8}$  und  $C_2 = 0$ . Daher lautet die gewünschte Lösung:

$$y = \frac{1}{8} \cdot \sin(10 t) - \frac{5}{4} \cdot t \cdot \cos(10 t), \quad \text{Einheit: Meter.}$$

Die Amplituden nehmen, wenn man vom ersten Term mit fester Amplitude absieht, linear mit der Zeit zu und wachsen für  $t \rightarrow \infty$  über alle Schranken. Abb. 4.44 zeigt den Anfang der Schwingung.



### Beispiel 4.28 : Erzwungene stationäre Schwingung im elektrischen Reihenschwingkreis

In einem Reihenschwingkreis (Abb. 4.45) ist  $R = 20 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  und  $C = 100 \mu\text{F}$ . Die Erregerspannung ist  $u = 100 \text{ V} \cdot \sin(90 \text{ s}^{-1} \cdot t)$ .

Bestimme im stationären Zustand die Kondensatorspannung  $u_C$  und die Stromstärke  $i$ .

#### Lösung

$$\text{Es gilt } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2 \delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \frac{1}{LC} u$$

$$\text{mit } \delta = \frac{R}{2L} \text{ und } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Bei einer sinusförmigen äußeren Spannung

$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$  lautet die *stationäre* Lösung (Lösung nach der Einschwingzeit):

$$u_C = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi) \text{ mit } \hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{LC} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} \text{ (siehe Beispiel 4.26, Seite 169).}$$

$$\text{Setzt man } \delta = \frac{R}{2L} \text{ und } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ so erhält man schließlich: } \hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Für die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen  $u_C$  und  $u$  gilt, wenn man auch hier für  $\delta$  und  $\omega_0$

$$\text{einsetzt (siehe Seite 170): } \tan \varphi = -\frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

Da  $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$  und  $u_C(t) = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  folgt wegen  $[\sin(\omega t + \varphi)]' = \omega \cos(\omega t + \varphi)$ :

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \text{ mit } \hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Beachte, dass  $\varphi$  nicht die Phasenverschiebung zwischen Strom  $i$  und äußerer Spannung  $u$  ist. Wegen  $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$  folgt  $\cos(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \psi)$  mit  $\psi = \varphi + 90^\circ$ . Da  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\omega$  zwischen  $0$  und  $-180^\circ$  liegt, liegt die Phasenverschiebung  $\psi$  zwischen der Stromstärke  $i(t)$  und der äußeren Spannung  $u(t)$  zwischen  $90^\circ$  und  $-90^\circ$ .

Die Amplitude  $\hat{i}$  der Stromstärke besitzt ihr Maximum, wenn der Nenner  $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

minimal ist. Das ist bei einem gegebenen Widerstand  $R$  der Fall, wenn  $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 0$ .

Daraus folgt für die "Stromresonanz" unabhängig von  $R$ :  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ .

Mit den angegebenen Werten ergibt sich nun:

$$u_C = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} \text{ s}^{-1} = 100 \text{ s}^{-1}$$

$$\hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{100 \text{ V}}{90 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{20^2 + \left(90 \cdot 1 - \frac{1}{90 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 382,1 \text{ V}$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = -0,947 \Rightarrow \varphi = -43,5^\circ.$$

Daher:  $u_C = 225,6 \text{ V} \cdot \sin(90 \text{ s}^{-1} \cdot t - 43,5^\circ)$ .

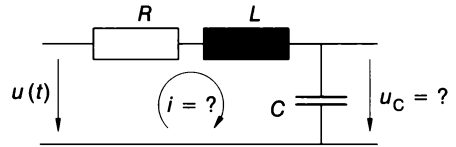


Abb. 4.45

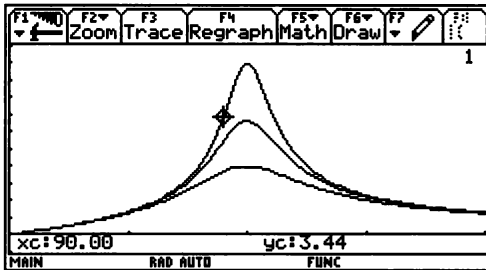
Ähnlich ergibt sich:  $i = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 3,44 \text{ A} \cdot \cos(90 \text{ s}^{-1} \cdot t - 43,5^\circ)$ .

Wegen  $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$  erhalten wir schließlich:  $i = 3,44 \text{ A} \cdot \sin(90 \text{ s}^{-1} \cdot t + 46,5^\circ)$ .

*Bestätige diese Ergebnisse mit der üblichen komplexen Rechnung in einem Wechselstromkreis.*

*Anmerkung:* In der Elektrotechnik wird statt mit Amplituden (Scheitelwerten) einer sinusförmigen Spannung oder Stromstärke bevorzugt mit deren Effektivwerten gerechnet:

$U_C = \frac{\hat{u}_C}{\sqrt{2}}$  bzw.  $I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$ . Weiters wird der Nenner  $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  als Scheinwiderstand  $Z$  des vorliegenden Stromkreises bezeichnet.



Nebenstehend sind drei Frequenzgänge der Stromamplituden für  $R = 20 \Omega$  (oberste Kurve),  $R = 30 \Omega$  und  $R = 50 \Omega$  gezeichnet.

In weiterer Folge könnten noch  $u_R = R \cdot i(t)$  sowie  $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$  berechnet werden.

## Im Überblick: Schwingungen

**Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung** werden vielfach als mathematisches Modell für einfache **Schwingungsvorgänge** verwendet. Bei einer **freien** Schwingung bleibt das schwingungsfähige System von außen unbeeinflusst; bei einer **erzwungenen** Schwingung wirkt von außen ständig eine *Erregung* auf das System ein.

Die allgemeine Lösung der **homogenen** Differentialgleichung beschreibt die **freien** Schwingungsvorgänge eines schwingungsfähigen Systems. Je nach *Dämpfung* können diese sein: eine Schwingung (**Schwingfall**) oder ein Kriechvorgang (**Kriechfall** oder **aperiodischer Grenzfall**).

**Erzwungene** Schwingungen werden durch **inhomogene** Differentialgleichungen beschrieben, wobei die Störfunktion  $s(t)$  durch die Erregung zustandekommt. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist bei Vorliegen einer Dämpfung die Summe aus einem **flüchtigen** Anteil und einem **stationären** Anteil. Der stationäre Anteil ist die bleibende Reaktion des Systems auf die Erregung von außen.

Von besonderer Bedeutung ist eine **harmonische** Erregung. Die stationäre Reaktion des Systems, sie heißt auch *Sinusantwort*, ist eine ungedämpfte harmonische Schwingung mit der Frequenz der Erregung. Der **Frequenzgang** der Sinusantwort gibt die Abhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung zwischen Erregung und Reaktion an. Ist die Erregerkreisfrequenz  $\omega$  nahe der Kennkreisfrequenz  $\omega_0$ , so erreicht die Amplitude hohe Werte, sofern die Dämpfung nicht zu groß ist. Man spricht von **Resonanz**.

## Aufgaben

## Freie Schwingungen

**4.43** Die folgenden Differentialgleichungen beschreiben Schwingungen. Gib an, um welche Art es sich handelt (frei, erzwungen, gedämpft, ungedämpft) und bestimme dann die allgemeine Lösung:

a)  $\ddot{y} + 9y = 0$

b)  $\ddot{y} + 9y = 3$

c)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 40y = 0$

d)  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 25y = 625 \cdot t$

e)  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 85 \sin t$

f)  $\ddot{y} + 16y = 14 \sin(3t)$

**4.44** Die folgenden Differentialgleichungen beschreiben gedämpfte freie Schwingungen. Bestimme die Abklingkonstante  $\delta$ , die Kennkreisfrequenz  $\omega_0$  und den Dämpfungsgrad  $D = \frac{\delta}{\omega_0}$  und gib danach den Bewegungsverlauf an (Schwingfall, Kriechfall oder aperiodischer Grenzfall).

a)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 64y = 0$

b)  $\ddot{y} + 14\dot{y} + 36y = 0$

c)  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 0$

**4.45** Gegeben ist die Differentialgleichung einer freien gedämpften Schwingung:  $\ddot{y} + p\dot{y} + 4y = 0$ . Welchen Wert müsste  $p$  haben, damit der aperiodische Grenzfall eintritt? Untersuche sodann jene partikuläre Lösung, die der folgenden Anfangsbedingung genügt:

a)  $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$

b)  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$

c)  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = -4$

**4.46** Ein schwingungsfähiges mechanisches System besitzt die Masse  $m = 0,1$  kg und die Federkonstante  $c = 10$  N/m. Für welche Werte der Dämpfungskonstante  $b$  kommt es zu Schwingungen?

**4.47** Löse folgende Schwingungsprobleme:

a)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 85y = 0; y(0) = 0, \dot{y}(0) = 9$

b)  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 7y = 0; y(0) = 6, \dot{y}(0) = 0$

c)  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 160y = 0; y(0) = 3, \dot{y}(0) = 0$

d)  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0; y(0) = 1, \dot{y}(0) = -4$

**4.48** Eine freie Schwingung erfolge nach der Differentialgleichung  $\ddot{y} + b\dot{y} + y = 0$ . Zeichne mit Rechnerunterstützung die Lösungskurven für  $b = 2$  und  $b = \sqrt{5}$  bei folgender Anfangsbedingung:

a)  $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$

b)  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$

c)  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = -2$

**4.49** Ein Kondensator mit  $C = 50$   $\mu$ F wird zuerst auf 200 V aufgeladen und danach über eine Spule mit  $L = 2$  H und einen OHM'schen Widerstand mit  $R = 240$   $\Omega$  entladen.

a) Wie ist der Stromverlauf?

b) Bis zu welchem Wert von  $R$  kommt es zur Ausbildung von Schwingungen?

**4.50** Eine Masse  $m = 1$  kg hängt an einer vertikalen Feder mit der Federkonstante  $c = 104$  N/m. Hängt man eine zweite, gleich große Masse dazu, so verlängert sich die Feder. Bestimme die Bewegung der ersten Masse, wenn die zweite Masse plötzlich herunterfällt (Fallbeschleunigung  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>)

a) in Luft (Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt),

b) in einem zähen Medium mit der Dämpfungskonstante  $b = 4$  kg/s.

c) Bis zu welchem Wert kann  $b$  steigen, sodass es noch zu Schwingungen kommt?

Hinweis:  $m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = 0$  mit  $y(0) = -\frac{mg}{c}$  und  $\dot{y}(0) = 0$ .

- 4.51** Eine Dämpfungsvorrichtung mit der Masse 2 kg besitzt die Federkonstante  $c = 600 \text{ N/m}$  und die Dämpfungskonstante  $b = 80 \text{ kg/s}$ . Wie groß darf bei einem Anfangsausschlag  $y(0) = 0,5 \text{ m}$  die negative Anfangsgeschwindigkeit betragsmäßig höchstens sein, sodass es zu keinem Nulldurchgang kommt.

*Hinweis:* Setze  $\dot{y}(0) = -v_0$  und löse die Differentialgleichung.

- 4.52** Ein mathematische Pendel (Abb. 4.46) besteht aus einem masselosen Faden der Länge  $l$  an dem eine Masse  $m$  hängt. Wird der Luftwiderstand vernachlässigt, so wirkt nur die Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g$  auf die Masse. Ihre Komponente  $F$  auf der Bahnlinie der Masse ist  $F = m \cdot g \cdot \sin \varphi$ . Nach dem dynamischen Grundgesetz gilt:  $m \cdot \ddot{s} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$ . Das Minuszeichen ist zu setzen, da  $F$  entgegen der nach rechts positiv gezählten  $s$ -Richtung wirkt. Dividiert man durch  $m$  und setzt  $s = l \cdot \varphi$  ( $\varphi$  im Bogenmaß), so erhält man

$l \cdot \ddot{\varphi} = -g \cdot \sin \varphi$  oder  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0$ . Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung für den Winkel  $\varphi$ . Für kleine Winkel  $\varphi$  gilt jedoch:  $\sin \varphi \approx \varphi$ , sodass in diesem Fall *linearisiert* werden kann:  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0$ . Löse diese Differentialgleichung, wenn  $\varphi(0) = 0,1$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  und bestimme die Schwingungsdauer.

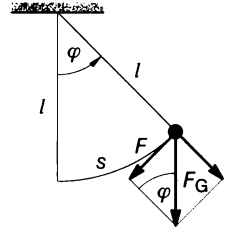


Abb. 4.46

- 4.53** A cylindrical buoy 80 cm in diameter  $d$  is standing in water with its axis vertical (Abb. 4.47). After depressed slightly and released, its period  $T$  of vibration is 3 s. Find the mass  $m$  of the buoy.

*Hint:* The buoyancy force  $F_A$  equals the weight of the water displaced by the body (ARCHIMEDES' Principle);  $m \cdot \ddot{y} = -F_A$ ,  $F_A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot y \cdot \rho \cdot g$ ,  $y$  quantity of diving in out of equilibrium,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ;  $T = \frac{2}{\omega_0}$ .

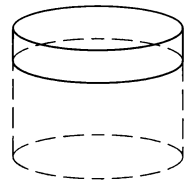


Abb. 4.47

- 4.54** In a tube with U-shape (Abb. 4.48) one liter water is vibrating up and down (friction neglected). The diameter  $d$  of the tube is 3 cm. Find the period of vibration!

*Hint:*  $m \cdot \ddot{y} = -\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot 2 y \cdot \rho \cdot g$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

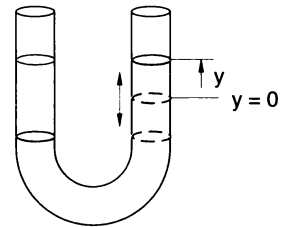


Abb. 4.48

### Erzwungene Schwingungen

- 4.55** Bestimme für  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ , die Lösung von:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $\ddot{y} + 10 \dot{y} + 16 y = 48$               | b) $\ddot{y} + 10 \dot{y} + 24 y = 24$                  | c) $\ddot{y} + 10 \dot{y} + 25 y = 25$ |
| d) $\ddot{y} + 4 \dot{y} + 13 y = 507 \cdot (1 + t)$ | e) $\ddot{y} + 14 \dot{y} + 49 y = 686 \cdot (1 + 2 t)$ |  |
| f) $\ddot{y} + 8 \dot{y} + 16 y = 32 t$              | g) $\ddot{y} + 16 y = 28 \cdot \sin 3 t$                |  |
| h) $\ddot{y} + 16 y = 32 \cdot \sin 4 t$             | i) $\ddot{y} + 8 \dot{y} + 16 y = 32 \cdot \sin 4 t$    |  |

- 4.56** Bestimme die stationäre Lösung von

- |  |   |
|--|---|
| a) $\ddot{y} + 4 \dot{y} + 13 y = 145 \cdot \cos 2 t$        | b) $\ddot{y} + 4 \dot{y} + 13 y = 40 \cdot \cos 3 t$            |
| c) $\ddot{y} + 2 \dot{y} + y = 2 \cdot (\sin t + \cos t)$    | d) $\ddot{y} + 4 \dot{y} + 13 y = 40 \cdot (\sin t + \cos 3 t)$ |
| e) $\ddot{y} + 8 \dot{y} + 16 y = 289 \sin t + 100 \sin 2 t$ | f) $\ddot{y} + 8 \dot{y} + 16 y = 289 \cos t + 100 \sin 2 t$    |

- 4.57** Ein gedämpftes Feder-Masse-System der Masse  $m = 2 \text{ kg}$  besitzt eine Kennkreisfrequenz  $\omega_0 = 25 \text{ s}^{-1}$ . Ab  $t = 0 \text{ s}$  wird er durch die konstante Kraft  $F(t) = 400 \text{ N}$  aus dem Ruhezustand zum Schwingen angeregt. Bestimme den Bewegungsverlauf, wenn der Dämpfungsgrad a)  $D = \frac{3}{5}$ , b)  $D = \frac{4}{5}$ , c)  $D = 1$ .
- 4.58** Ein Feder-Masse-System ( $m = 1 \text{ kg}$ ,  $b = 4 \text{ kg/s}$ ,  $c = 229 \text{ N/m}$ ) wird durch eine sinusförmige Kraft  $F(t) = 113 \text{ N} \cdot \sin(\omega t)$  zum Schwingen angeregt.
- Bestimme die Kennkreisfrequenz  $\omega_0$ , die Abklingkonstante  $\delta$  sowie den Dämpfungsgrad  $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ .
  - Wie lautet die stationäre Lösung bei einer Erregerfrequenz  $\omega = 15 \text{ s}^{-1}$ ?
  - Wie lautet die stationäre Lösung bei einer Erregerfrequenz  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ?
  - Wie groß ist die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  und die Resonanzamplitude?
- 4.59** Ein Feder-Masse-System besitzt die Kenndaten:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $b = 12 \text{ kg/s}$  und  $c = 180 \text{ N/m}$ . Es unterliegt einer sinusförmigen Anregung  $F(t) = \sin(\omega t)$ . Untersuche den Frequenzgang der Amplitude.
- 4.60** In einem elektrischen Reihenschwingkreis mit  $R = 200 \Omega$ ;  $C = 100 \mu\text{F}$  und  $L = 1 \text{ H}$  befindet sich eine Gleichspannungsquelle  $U_0 = 10 \text{ V}$ , die zur Zeit  $t = 0 \text{ s}$  durch Schließen eines Schalters wirksam wird. Berechne den Spannungsverlauf  $u_C$  am Kondensator sowie den Stromverlauf  $i$ , wenn der Reihenschwingkreis anfänglich energielos war.
- 4.61** Ein elektrischer Reihenschwingkreis mit  $R = 1250 \Omega$ ,  $C = 2 \mu\text{F}$  und  $L = 0,5 \text{ H}$  enthält eine außen angelegte Spannung  $u(t) = 170 \text{ V} \cdot \sin(500 t)$ .
- Bestimme den stationären Verlauf der Spannung  $u_C(t)$  am Kondensator.
  - Wie lautet der stationäre Verlauf der Stromstärke  $i(t)$ ?
  - Ermittle beide stationäre Größen mit Hilfe der üblichen komplexen Rechnung.
- 4.62** An einen energielosen elektrischen Reihenschwingkreis mit  $R = 200 \Omega$ ,  $C = 50 \mu\text{F}$  und  $L = 1 \text{ H}$  wird zur Zeit  $t = 0$  eine äußere Spannung  $u(t)$  angelegt. Bestimme
- den zeitlichen Verlauf des Stromes  $i(t)$ , wenn  $u(t) = U_0 = 10 \text{ V}$  ist;
  - den stationären Verlauf des Stromes  $i(t)$ , wenn  $u(t) = 290 \text{ V} \cdot \sin(150 t)$  ist.
- 4.63** An einen energielosen elektrischen Reihenschwingkreis mit  $R = 2500 \Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  und  $L = 1 \text{ H}$  wird zur Zeit  $t = 0$  eine Gleichspannung  $U_0 = 30 \text{ V}$  angelegt. Der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung  $u_C(t)$  sowie der Stromstärke  $i(t)$  ist zu bestimmen.
- 4.64** Das Verhältnis der Resonanzamplitude  $\hat{y}(\omega_r)$  zur "statischen Auslenkung"  $\hat{y}_{\text{st}} = \hat{y}(\omega = 0)$  wird *Resonanzüberhöhung* genannt. Damit wird die Güte eines Schwingkreises beschrieben. Zeige, dass
- $\frac{\hat{y}(\omega_r)}{\hat{y}_{\text{st}}} = \frac{1}{2D \cdot \sqrt{1 - D^2}}$ , wenn  $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ ;
  - $\frac{\hat{y}(\omega_r)}{\hat{y}_{\text{st}}} \approx \frac{1}{2D}$  für kleine Werte von  $D$ .
- 4.65** Mit steigendem Dämpfungsgrad  $D$  werden die Resonanzfrequenzen immer kleiner. Ab welchem Dämpfungsgrad  $D_{\text{Gr}}$  ("Grenzdämpfung") gibt es keine Resonanz mehr? Zeige, dass bei einer solchen "überkritischen Dämpfung" der Frequenzgang der Amplitude eine streng monoton fallende Funktion ist.

## 4.6 Numerische Lösung von Differentialgleichungen

In Anwendungen auftretende Differentialgleichungen sind oft nicht "symbolisch", d. h. mit den üblichen elementaren Funktionen lösbar. Dies betrifft besonders nichtlineare Differentialgleichungen. In solchen Fällen ist man oft auf numerische Näherungsverfahren angewiesen.

Im Folgenden soll exemplarisch ein einfaches numerisches Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  besprochen werden, das so genannte **Streckenzugverfahren von EULER**<sup>13</sup>: Dabei werden von  $x_0$  ausgehend gleichabständige Stützstellen  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h$ , usw. mit  $h > 0$  als *Schrittweite* gebildet. Man spricht von einer *Diskretisierung* der Anfangswertaufgabe.

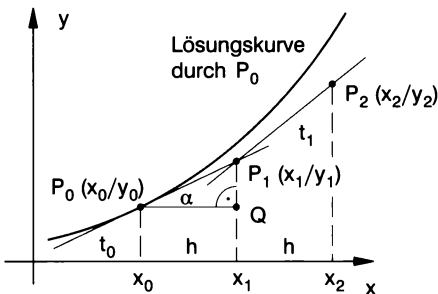


Abb. 4.49 EULER'sches Streckenzugverfahren

Geometrisch veranschaulicht (Abb. 4.49) bedeutet die Lösung des Anfangswertproblems das Bestimmen der Gleichung der Lösungskurve durch  $P_0$ . Das Streckenzugverfahren von EULER beginnt, indem die gesuchte Lösungskurve von  $x_0$  bis  $x_1$  näherungsweise durch ihre Tangente  $t_0$  im Punkt  $P_0(x_0/y_0)$  ersetzt wird. Die Tangentensteigung  $k$  erhält man unmittelbar aus der Differentialgleichung:  $k = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ . Aus dem rechtwinkligen Dreieck  $P_0QP_1$  entnimmt man  $\overline{P_1Q} = h \cdot \tan \alpha = h \cdot k$ . Die  $y$ -Koordinate

$y_1$  des Tangentenpunktes  $P_1$  an der Stützstelle  $x_1$  ist dort ein Näherungswert für den exakten Wert  $y(x_1)$  der Lösungsfunktion:

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + h \cdot k \quad \text{mit } k = f(x_0, y_0).$$

Den Näherungswert  $y_2$  der exakten Lösungsfunktion  $y = y(x)$  an der Stelle  $x_2$  errechnet man entsprechend. Nun tritt  $P_1(x_1/y_1)$  an die Stelle des Punktes  $P_0(x_0/y_0)$  und man ersetzt von  $P_1$  ausgehend den Graphen der Lösungsfunktion durch eine Gerade. Diese ist aber im allgemeinen die Tangente  $t_1$  an eine andere als die gewünschte Lösungskurve, nämlich an die Lösungskurve durch  $P_1$ . Die  $y$ -Koordinate  $y_2$  des Punktes  $P_2$  auf der Tangente  $t_1$  an der Stelle  $x_2$  ist dort ein Näherungswert für den exakten Wert  $y(x_2)$  der Lösungsfunktion.

Auf diese Weise fährt man fort. Bei diesem Verfahren ersetzt man also die gewünschte Lösungskurve durch den Streckenzug durch die Punkte  $P_0, P_1, P_2, \dots$  bis zum Endpunkt  $P_n$ .

Wir fassen zusammen:

### Algorithmus zum Streckenzugverfahren von EULER

Wähle  $h > 0$ .

Setze  $x_n = x_0 + n \cdot h$  und berechne  $y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Dieses Verfahren fand bereits in "Ingenieur-Mathematik 3", in den Beispielen 2.10 und 2.11, Seite 67 ff, Anwendung.

<sup>13</sup> Leonhard EULER (1707 – 1783), schweizer Mathematiker

Für die praktische Rechnung ist das folgende Rechenschema empfehlenswert:

n	x	y	$h \cdot f(x, y)$
0	$x_0$	$y_0$	$h \cdot f(x_0, y_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)$	$h \cdot f(x_1, y_1)$
2	$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)$	$h \cdot f(x_2, y_2)$
3	$x_3 = x_2 + h$	$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)$	$h \cdot f(x_3, y_3)$
⋮	⋮	⋮	⋮

**Beispiel 4.29 : EULER'sches Streckenzugverfahren**

Löse das Anfangswertproblem  $y' = y + x, y(0) = 1$ , an der Stelle  $x = 0,4$  bei einer Schrittweite  $h = 0,1$ .

**Lösung**

Das Anfangswertproblem ist auch exakt lösbar:  $y = 2 \cdot e^x - x - 1$ . Dadurch ist ein Vergleich mit dem exakten Ergebnis möglich.

Die Berechnungen werden mit einer Tabellenkalkulation, mit Microsoft Excel, durchgeführt. Die zweite Tabelle zeigt die Formeln bis zur vierten Zeile. Diese Zeile kann nach unten kopiert werden. Die Schrittweite kann nach Wunsch geändert werden.

D3		= \$C\$1*(C3+B3)			
Schrittweite:		0,1			
n	x	y	$f(x,y) \cdot h$	y exakt	
0	0,0	1,0000	0,1000	1,0000	
1	0,1	1,1000	0,1200	1,1103	
2	0,2	1,2200	0,1420	1,2428	
3	0,3	1,3620	0,1662	1,3997	
4	0,4	1,5282	0,1928	1,5836	
5	0,5	1,7210	0,2221	1,7974	

D3		= \$C\$1*(C3+B3)			
Schrittweite:		0,1			
n	x	y	$f(x,y) \cdot h$	y exakt	
0	0	1	= \$C\$1*(C3+B3)	= 2*EXP(B3)-B3-1	
=A3+1		=B3+\$C\$1	=C3+D3	= \$C\$1*(C4+B4)	= 2*EXP(B4)-B4-1

Das EULER'sche Streckenzugverfahren besitzt nur für hinreichend kleine Schrittweiten eine ausreichende Genauigkeit, was allerdings einen hohen Rechenaufwand bedeutet. Ein Lösungsverfahren für Differentialgleichungen, das in der Praxis sehr oft angewendet wird, ist dagegen das RUNGE-KUTTA-Verfahren<sup>14</sup>, worauf aber nicht mehr eingegangen wird.

<sup>14</sup> C. D. RUNGE (1856 – 1927), W. M. KUTTA (1867 – 1944), deutsche Mathematiker

MC

Lösung des Anfangswertproblems  $y' = y + x$ ,  $y(0) = 1$ :

Anfangswert (0 ist Index):  $y_0 := 1$

Rechte Seite der Differentialgleichung:  $f(x, y) := y_0 + x$

Berechnung an 4 Stützstellen von 0 bis 0,4:  $z := \text{rkfest}(y, 0, 0.4, 4, f)$

Das Ergebnis wird in einer Matrix ausgegeben:  $z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 1.1103 \\ 0.2 & 1.2428 \\ 0.3 & 1.3997 \\ 0.4 & 1.5836 \end{bmatrix}$

### Im Überblick: Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind häufig nicht symbolisch lösbar. In diesen Fällen wird die zu lösende Anfangswertaufgabe **diskretisiert**, die Lösung erfolgt **numerisch**. Es gibt eine große Anzahl von numerischen Lösungsverfahren, die oft speziell an die zu lösenden Probleme angepasst sind.

Das sehr einfache **Streckenzugverfahren von EULER** ersetzt die gesuchte Lösungskurve schrittweise durch Tangentenstücke. Es besitzt nur für hinreichend kleine Schrittweiten eine ausreichende Genauigkeit, was allerdings einen hohen Rechenaufwand bedeutet.

### Aufgaben

- 4.66** Löse das Anfangswertproblem  $y' = y + x$ ,  $y(0) = 1$  für  $x = 0,4$  mit dem EULER'schen Streckenzugverfahren (Beispiel 4.29, Seite 178) bei  $h = 0,05$  als Schrittweite.
- 4.67** Die Differentialgleichung des freien Falls mit einem Luftwiderstand proportional dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit lautet:  $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2$ . Für einen Fallschirmspringer samt Ausrüstung gelten folgende Daten:  $m = 90$  kg und  $k = 36$  Ns<sup>2</sup>/m<sup>2</sup>. Bestimme mit dem Streckenzugverfahren bei einer Schrittweite  $h = 0,05$  s die Fallgeschwindigkeit  $v$  zur Zeit  $t = 0,3$  s, wenn  $v(0) = 0$ . Führe die Rechnung mit  $g = 10$  ms<sup>-2</sup> durch.
- 4.68** Ermittle näherungsweise  $y(0,5)$  der durch das Anfangswertproblem  $y' = 1 + y^2$ ,  $y(0) = 0$  gegebenen Funktion mit dem Streckenzugverfahren für  $h = 0,1$  und vergleiche mit der exakten Lösung.
- 4.69** Um  $y = e^x$  für  $x = 0,3$  zu berechnen, geht man vom Anfangswertproblem  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$  aus. Seine Lösung ist  $y = e^x$ . Bestimme daher, ausgehend von diesem Anfangswertproblem,  $y(0,3)$  mit dem Streckenzugverfahren für  $h = 0,1$ .
- 4.70** Ein Wachstumsverhalten kann oft gut durch die *logistische Differentialgleichung*  $\dot{y} = a y (b - y)$  mit  $a > 0$  und  $b > 0$  beschrieben werden. Bestimme näherungsweise  $y(3)$ , wenn  $y(0) = 1$ ,  $a = 0,01$  und  $b = 10$  mit dem Streckenzugverfahren bei einer Schrittweite  $h = 0,05$ .



## 5 Transformationen und Signale

### 5.1 Die komplexe Rechnung in der Elektrotechnik

In den Anwendungen wird öfter statt mit echten physikalischen Größen mit *transformierten Größen* gearbeitet. Der Grund dafür ist, dass sich dadurch Aufgaben einfacher lösen lassen. Ein bekanntes Beispiel ist die **komplexe Rechnung in der Elektrotechnik**, auch **Symbolische Methode** genannt. Sie ist eine Transformation von elektrischen Größen in die komplexe Ebene. Die transformierten Größen besitzen allerdings in der Regel nur mathematische Bedeutung, obwohl sie durch die gleichen Bestimmungsstücke wie die ursprünglichen physikalischen Größen festgelegt sind.

#### Beispiel 5.1 : Netzwerkberechnung im "Zeitbereich"

Im Wechselstromkreis der Abb. 5.1 ist eingangsseitig die Spannung  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$  mit  $\hat{u} = 25 \text{ V}$  und  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$  gegeben. Bestimme den zeitlichen Verlauf der Stromstärke  $i$  im *stationären* Zustand, wenn  $R = 10 \Omega$  und  $L = 1 \text{ H}$ .

#### Lösung

$$u_R + u_L = u, \quad u_R = R \cdot i, \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = \hat{u} \cdot \sin(\omega t).$$

Setzt man die vorgegebenen Werte für  $L$  und  $R$  ein, so erhält man (Einheiten weggelassen):

$$\frac{di}{dt} + 10 i = 25 \cdot \sin(5 t).$$

Wir sind an der *stationären* Lösung interessiert oder, wie man auch sagt, an der Lösung im eingeschwungenen Zustand. Dies ist die Lösung, die sich theoretisch für  $t \rightarrow \infty$ , praktisch aber meist schon nach verhältnismäßig kurzer Zeit nach dem Einschalten einstellt. Es wird sich zeigen, dass die *stationäre Lösung nicht von einer Anfangsbedingung abhängt*. Daher ist die Angabe einer Anfangsbedingung nicht nötig. Der Lösungsvorgang wird nur verkürzt angegeben.

- (1) Ermittlung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\frac{di}{dt} + 10 i = 0.$$

Exponentialansatz:  $i_h = K \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  (mit  $K$  als Integrationskonstante).

Nach Einsetzen in die homogene Differentialgleichung folgt  $i_h = K \cdot e^{-10 \cdot t}$ .

- (2) Aufsuchen einer partikulären Lösung:

$$\text{Lösungsansatz: } i_p = a \cdot \sin(5 t) + b \cdot \cos(5 t).$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung mit nachfolgendem Koeffizientenvergleich für  $a$  und  $b$  ergibt  $a = 2$ ,  $b = -1$ . Daher lautet eine partikuläre Lösung:

$$i_p = 2 \sin(5 t) - \cos(5 t).$$

- (3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$i = i_h + i_p = K \cdot e^{-10 \cdot t} + 2 \sin(5 t) - \cos(5 t).$$

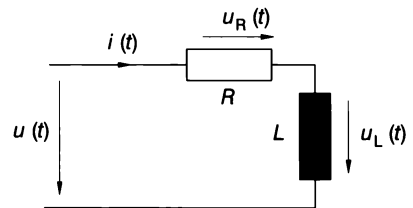


Abb. 5.1 RL-Netzwerk

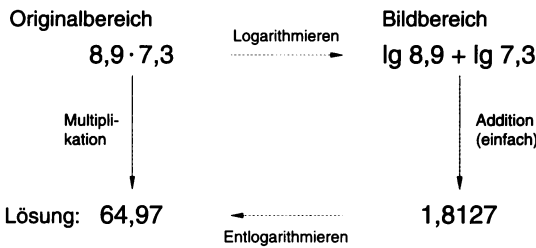
Der Term  $K \cdot e^{-10 \cdot t}$  in der allgemeinen Lösung klingt exponentiell für  $t \rightarrow \infty$  ab und ist nach kurzer Zeit bedeutungslos. Es bleibt als stationäre Lösung, die einfachheitshalber auch mit  $i(t)$  bezeichnet werden soll:  $i(t) = i_p(t) = 2 \sin(5t) - \cos(5t)$ .

Wegen  $a \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  mit  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$  folgt weiters:  $i(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(5t - 26,6^\circ)$

Der Scheitelwert  $\hat{i}$  ist  $\sqrt{5} A = 2,24 A$ , der Effektivwert  $I$  ist wegen  $I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$  gleich  $1,58 A$ .

Man kann die Stromstärke  $i$  von Beispiel 5.1 auch durch komplexe Rechnung ermitteln. Statt eine Differentialgleichung zu lösen, transformiert man die Aufgabe in die komplexe Ebene, löst dort und transformiert dann wieder zurück. Dies bedeutet oft eine bedeutende Vereinfachung der Aufgabe.

Ein einfaches Beispiel soll die **Grundidee von Transformationen** verständlich machen. Will man zwei Zahlen multiplizieren, so kann man wie folgt vorgehen (Abb. 5.2):



Logarithmieren transformiert eine Zahl  $a > 0$  in eine andere, nämlich in die Zahl  $\lg a$  (wenn man den dekadischen Logarithmus nimmt). Dies kann durch Nachschlagen in einem Logarithmenbuch geschehen. Macht man dies bei zwei Zahlen, die zu multiplizieren sind, so vereinfacht sich die Multiplikation im "Originalbereich" der Zahlen zu einer Addition im "Bildbereich" ihrer Logarithmen.

Abb. 5.2 Multiplizieren durch logarithmische Transformation

Eine ähnliche Vereinfachung kann bei der Beschreibung des stationären Verhaltens von (linearen) elektrischen Netzwerken bei sinusförmiger Anregung erreicht werden. Dabei werden Sinusschwingungen (Ströme, Spannungen, Leistungen) in mit der Kreisfrequenz  $\omega$  rotierende Zeiger in der komplexen Ebene transformiert.

Beispielsweise wird die physikalische Sinusspannung  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$  in den mit der Kreisfrequenz  $\omega$  rotierenden Zeiger  $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$  transformiert. Man sagt auch hier, dass man dadurch vom Originalbereich in den Bildbereich, das ist die komplexe Ebene, übergeht. Der Originalbereich wird auch als *Zeitbereich* bezeichnet.

Die Rücktransformation erfolgt durch Bilden des Imaginärteiles des Zeigers, was geometrisch gesehen die Projektion des Zeigers auf die imaginäre Achse bedeutet:

$$\text{Im } \underline{u}(t) = \text{Im } \hat{u} \cdot [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)] = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Der rotierende Spannungszeiger  $\underline{u}(t)$  kann als das Produkt eines ruhenden Zeigers  $\underline{u}$  mit dem Winkelfaktor  $e^{j\omega t}$  als rotierendem Einheitszeiger geschrieben werden:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{u}} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{mit } \underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$$

$\underline{\hat{u}}$  heißt "komplexe Amplitude". Üblich ist auch das Arbeiten mit dem komplexen Effektivwert  $\underline{U} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\sqrt{2}}$  bzw. seinem Betrag  $U = |\underline{U}|$ , dem Effektivwert der Spannung.

Analog wird die sinusförmige Stromstärke  $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$  in den ebenfalls mit der Kreisfrequenz  $\omega$  rotierenden Zeiger  $\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$  der komplexen Ebene transformiert.

**Differentiation einer Sinusschwingung**  $y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ :

Zeitbereich:  $\dot{y} = \omega \hat{y} \cos(\omega t + \varphi)$

Bildbereich:  $\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi)}$ ,  $\dot{\underline{y}} = j \omega \cdot \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi)}$

$$\begin{aligned} \underline{\dot{y}} &= j \omega \cdot \underline{y} = j \omega \cdot [\hat{y} \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \hat{y} \sin(\omega t + \varphi)] = \\ &= -\omega \hat{y} \sin(\omega t + \varphi) + j \omega \hat{y} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\text{Im } \underline{\dot{y}} = \omega \hat{y} \cos(\omega t + \varphi) = \dot{y}.$$

Die Differentiation im Bildbereich liefert also nach Rücktransformation das gleiche Ergebnis wie die Differentiation im Zeitbereich! Dazu kommt noch: **Die zeitliche Differentiation eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Zeigers wird in der komplexen Ebene einfach zu einer Multiplikation des Zeigers mit  $j \omega$ .**

*Anmerkung:* Die Multiplikation oder Division von Sinusschwingungen über die komplexe Ebene ist nicht zulässig, da die Rechnung im Zeitbereich bzw. über die komplexe Ebene geführt nicht dasselbe Ergebnis liefert!

Wegen dieser Eigenschaft der zeitlichen Differentiation geht eine Differentialgleichung für eine Spannung oder Stromstärke  $y(t)$  nach ihrer Transformation in den Bildbereich (komplexe Ebene) in eine algebraische Gleichung für  $\underline{y}(t)$  über. Eine algebraische Gleichung ist jedoch verglichen mit der ursprünglichen Differentialgleichung eine einfache Gleichung, da sie zu ihrer Auflösung nur die Grundrechnungsarten erfordert. Abb. 5.3 zeigt die Vorgangsweise zur Gewinnung der stationären Lösung im Beispiel 5.1.

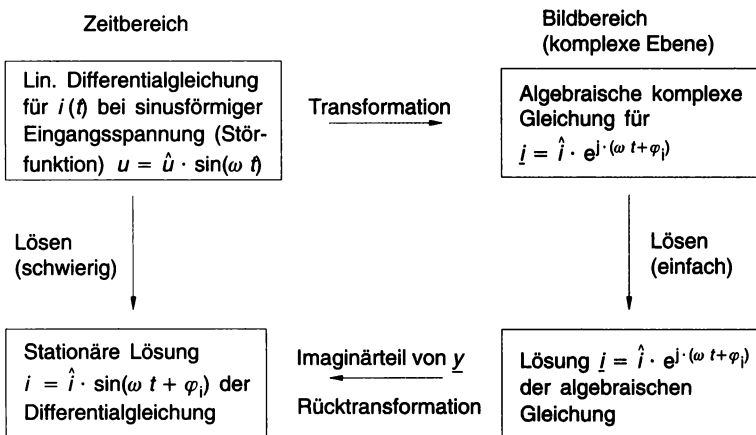


Abb. 5.3 Transformation in die komplexe Ebene

**Beispiel 5.2 :    Netzwerkberechnung im Bildbereich (vgl. Beispiel 5.1, Seite 180)**

Im Wechselstromkreis der Abb. 5.1 ist einseitig die Spannung  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$  mit  $\hat{u} = 25 \text{ V}$  und  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$  gegeben. Bestimme den zeitlichen Verlauf der stationären Stromstärke  $i(t)$ , wenn  $R = 10 \Omega$  und  $L = 1 \text{ H}$ .

**Lösung**

Wir transformieren die Differentialgleichung  $L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = u(t)$  in die komplexe Ebene:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \rightarrow \underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j\omega t}, \quad i(t) \rightarrow \underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}, \quad \frac{di}{dt} \rightarrow j\omega \cdot \underline{i}$$

Man erhält eine einfache algebraische Gleichung für die komplexe Stromstärke  $\underline{i}$ , die sofort gelöst werden kann:

$$L \cdot j\omega \cdot \underline{i} + R \underline{i} = \underline{u}$$

$$(R + j\omega L) \cdot \underline{i} = \underline{u}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + j\omega L}. \quad (*)$$

Einsetzen der angegebenen Werte ergibt (Einheiten werden weggelassen):

$$\underline{i} = \frac{25 \cdot e^{j\omega t}}{10 + j \cdot 5 \cdot 1} = \frac{5}{2 + j} \cdot e^{j\omega t}.$$

Schreibt man  $\frac{5}{2 + j} = \sqrt{5} \cdot e^{-j \cdot 26,6^\circ}$ , so erhält man

$$\underline{i} = \sqrt{5} \cdot e^{-j \cdot 26,6^\circ} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{5} \cdot e^{j(\omega t - 26,6^\circ)} = \sqrt{5} \cos(\omega t - 26,6^\circ) + j \cdot \sqrt{5} \sin(\omega t - 26,6^\circ).$$

Die Rücktransformation durch Verwenden des Imaginärteils von  $\underline{i}$  liefert die gesuchte Lösung im Zeitbereich:  $i(t) = \text{Im } \underline{i} = \sqrt{5} \sin(\omega t - 26,6^\circ)$ .

Bei der Lösung des Beispiels 5.2 fällt auf:

- (1) Die interessierenden Bestimmungsstücke des Stromes, nämlich Amplitude  $\hat{i} = \sqrt{5}$  und Nullphasenwinkel  $\varphi_i = -26,6^\circ$  (hier auch wegen  $\varphi_u = 0$  die Phasenverschiebung zwischen Spannung  $u$  und Stromstärke  $i$ ) erhält man bereits im Bildbereich. Wegen

$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$  gilt dies auch für den Effektivwert  $I$  des Stromes. Daher ist eine Rücktransformation in den Zeitbereich nicht mehr erforderlich.

- (2) Bedeutsam ist ferner, dass man gleich einen Ansatz für die zu berechnenden Größen im *Bildbereich* finden kann, *ohne dass man die Differentialgleichung vorher aufstellen muss*. Setzt man nämlich vorerst nur abkürzend  $\underline{Z}_R = R$  und  $\underline{Z}_L = j \cdot \omega L$ , so kann man die Gleichung (\*) in der Lösung von Beispiel 5.2 auch schreiben:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \quad \text{mit } \underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L.$$

Diese Gleichung erinnert der Form nach an das OHM'sche Gesetz  $I = \frac{U}{R}$  für den Gleichstromkreis. Die Größen  $\underline{Z}_R$  und  $\underline{Z}_L$  haben beide die Einheit "Ohm" und heißen **komplexe Widerstandsoperatoren** oder **Impedanzen** des OHM'schen Widerstandes bzw. der Spule. Die Größe  $\underline{Z}$  ergibt sich einfach durch Addition der Widerstandsoperatoren  $\underline{Z}_R$  und  $\underline{Z}_L$ , genauso wie im Gleichstromkreis die Addition von OHM'schen Widerständen einer Serienschaltung.  $\underline{Z}$  heißt entsprechend Impedanz des Stromkreises. Die Impedanzen  $\underline{Z}_R$  und  $\underline{Z}_L$  sind reine Rechengrößen im Bildbereich und bilden eine formale Erweiterung des elektrischen Widerstandes. Damit erreicht man, dass bereits *im Bildbereich* ein Ansatz zur Berechnung der Stromstärke durch die formale Anwendung der vom Gleichstromkreis bekannten Regeln gemacht werden kann:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \quad \text{oder wegen } \underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{bzw.}$$

$\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}$  (im Beispiel 5.2 war  $\varphi_u = 0$ ) nach Herauslösen von  $\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}$  mit den komplexen Effektivwerten

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j \cdot \omega L}.$$

Abb. 5.4 zeigt das  $RL$ -Netzwerk von Beispiel 5.1 in der komplexen Ebene, wo es wie ein Gleichstromkreis behandelt werden kann. Da in der Elektrotechnik bevorzugt mit Effektivwerten gerechnet wird, wurde  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  statt  $\underline{u}(t)$  bzw.  $\underline{i}(t)$  geschrieben. Damit wird die Kreisfrequenz  $\omega$  in der komplexen Ebene zur bestimmenden Größe, weshalb man den Bildbereich nun auch als Frequenzbereich bezeichnet.

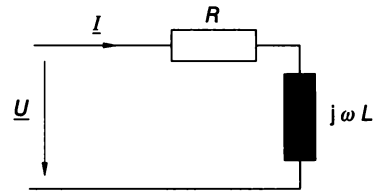


Abb. 5.4 Netzwerk in der komplexen Ebene (Bildbereich)

Abb. 5.5 zeigt zusammenfassend die Impedanzen der Grundschaltelemente, auch des Kondensators. Sie ergeben sich wie im Beispiel 5.2 für den OHM'schen Widerstand und die Spule durch Transformation der Beziehungen  $u_R = R \cdot i$ ,  $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$  und  $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$  in die komplexe Ebene.

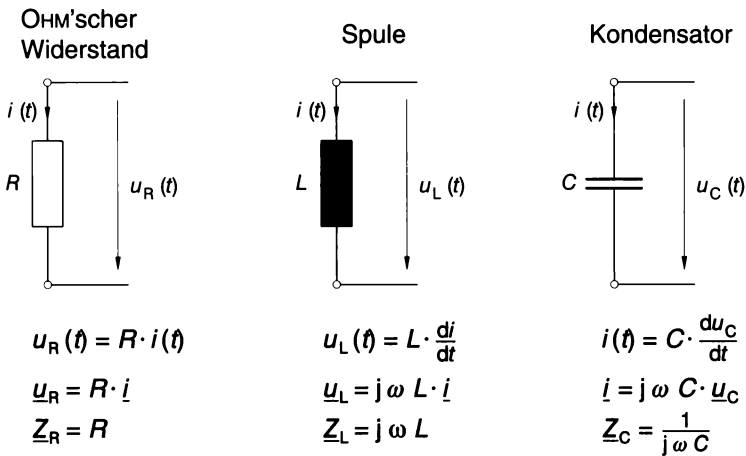


Abb. 5.5 Impedanzen der Grundschaltelemente  $R$ ,  $L$  und  $C$

**Beispiel 5.3 : Netzwerkberechnung im Bildbereich**

An einem  $RC$ -Glied (Abb. 5.6) mit  $R = 10 \text{ k}\Omega$  und  $C = 50 \text{ }\mu\text{F}$  liegt eingangsseitig die Spannung  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$  mit  $\hat{u} = 26 \text{ V}$  und  $\omega = 3 \text{ s}^{-1}$ . Bestimme den zeitlichen Verlauf der Spannung  $u_C$  am Kondensator im eingeschwungenen Zustand (stationäre Lösung).

**Lösung** (siehe auch Beispiel 4.17 c), Seite 145)

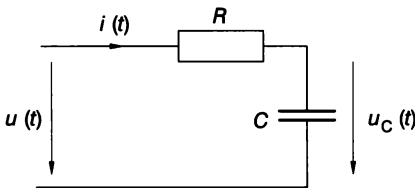


Abb. 5.6  $RC$ -Netzwerk im Zeitbereich

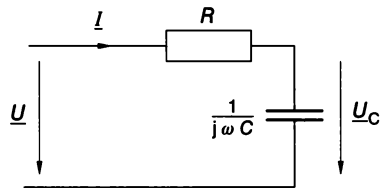


Abb. 5.7  $RC$ -Netzwerk im Bildbereich

Das Aufstellen der Differentialgleichung für das Netzwerk kann entfallen, wenn man gleich vom Netzwerk in der komplexen Ebene (Abb. 5.7) ausgeht und dort nach den Regeln des Gleichstromkreises vorgeht:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \text{ mit } \underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}. \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{\underline{U}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow \underline{U}_C = \frac{\underline{U}}{1 + j\omega RC}.$$

Mit  $\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$  (der Winkel  $\varphi_u$  von  $\underline{U}$  kann null gesetzt werden), erhält man durch Einsetzen der

$$\text{vorgegebenen Werte: } \underline{U}_C = \frac{\frac{26}{\sqrt{2}}}{1 + j\frac{3}{2}} \text{ V} = 2\sqrt{26} \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 56,3^\circ}.$$

Daraus entnimmt man als Effektivwert  $U_C = 2\sqrt{26} \text{ V}$  bzw.  $\hat{u}_C = U_C \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{13} \text{ V}$ . Die Phasenverschiebung  $\varphi$  zur Eingangsspannung ist  $-56,3^\circ$ . Somit lautet die stationäre Lösung:  $u_C(t) = 4\sqrt{13} \text{ V} \cdot \sin(3 \text{ s}^{-1} \cdot t - 56,3^\circ)$ .

Besteht das Netzwerk aus mehreren Maschen, so sind mehrere zusammengehörige Differentialgleichungen zu lösen (ein Differentialgleichungssystem). In diesem Fall ist die Netzwerkberechnung in der komplexen Ebene besonders vorteilhaft.

In der Wechselstromtechnik wird der *stationäre* Zustand, also der Zustand lange Zeit nach dem Einschalten, bei *sinusförmiger* Anregung betrachtet. Wichtige Fragestellungen gehen aber darüber hinaus, wie etwa das Übertragen von nicht periodischen Signalen oder das Behandeln von Einschaltvorgängen. Hier finden zwei weitere Transformationen Anwendung: die *Fourier-* und die *Laplace-Transformation*.

### Im Überblick: Die komplexe Rechnung in der Elektrotechnik

Statt mit echten physikalischen Größen wird öfter allgemein in den Anwendungen mit **transformierten Größen** gearbeitet, wenn sich dadurch **Aufgaben einfacher lösen** lassen.

Bei der **komplexen Rechnung in der Elektrotechnik**, auch **Symbolische Methode** genannt, werden *Sinusschwingungen* (Ströme, Spannungen, Leistungen) in rotierende Zeiger der komplexen Ebene transformiert. Dies führt zu einer beträchtlichen Vereinfachung bei der Beschreibung des *stationären* Verhaltens (Verhalten lange Zeit nach dem Einschalten) von linearen elektrischen Netzwerken. So wird aus der Differentialgleichung des Netzwerks eine einfache algebraische Gleichung.

Nach einer formalen Erweiterung des elektrischen Widerstandes auf Spule und Kondensator durch Einführung komplexer **Widerstandsoperatoren (Impedanzen)** kann die Berechnung interessierender Größen ganz im Bildbereich, also in der komplexen Ebene, geführt werden. Man kann dann mit den Strom- und Spannungszeigern nach den Regeln des Gleichstromkreises verfahren.

### Aufgaben

- 5.1 Multipliziere die beiden in römischen Ziffern geschriebenen Zahlen XLII und XXVIII nach Transformation in Zahlen mit arabischen Ziffern.

**5.2** Im  $RL$ -Stromkreis des Beispiels 5.1, Seite 180, ist eingangsseitig die Spannung  $u(t) = 250 \text{ V} \cdot \sin(100 \text{ s}^{-1} \cdot t)$  gegeben, wobei  $L = 0,5 \text{ H}$  und  $R = 100 \Omega$  ist. Berechne im stationären Zustand die Stromstärke  $i(t)$  und die Spannung  $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$  an der Spule

- a) durch Lösen der zugehörigen Differentialgleichung für  $i$ ,
- b) mit Hilfe der komplexen Rechnung.

**5.3** In einem  $RC$ -Stromkreis wie in Beispiels 5.3, Seite 184, ist eingangsseitig die Spannung  $u(t) = 250 \text{ V} \cdot \sin(100 \text{ s}^{-1} \cdot t)$  gegeben, wobei  $R = 500 \Omega$  und  $C = 20 \mu\text{F}$  ist. Berechne im stationären Zustand die Spannung  $u_C(t)$  am Kondensator

- a) durch Lösung der zugehörigen Differentialgleichung,
- b) mit Hilfe der komplexen Rechnung.

**5.4** Berechne die (stationäre) Stromstärke  $i(t)$  im  $RC$ -Kreis der Aufgabe 5.3,

- a) durch Lösung der zugehörigen Differentialgleichung für  $i(t)$ ,
- b) mit Hilfe der komplexen Rechnung.

*Hinweis zu a):* Differenzieren von  $u_C + u_R = u$  führt auf  $\frac{1}{C} \cdot i + R \frac{di}{dt} = \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ ;

dabei wurde verwendet:  $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i$  und  $u_R = R \cdot i$ .

**5.5** Gegeben ist ein  $RC$ -Stromkreis nach Abb. 5.8 mit  $R = 1 \text{ k}\Omega$  und  $C = 100 \mu\text{F}$ . Eingangsseitig liegt die Spannung  $u(t) = 100 \text{ V} \cdot \sin(5 \text{ s}^{-1} \cdot t)$ . Berechne die (stationäre) Stromstärke  $i(t)$  sowie die Spannung  $u_R(t)$  am OHM'schen Widerstand

- a) durch Lösung der zugehörigen Differentialgleichung für  $i(t)$ ,
- b) mit Hilfe der komplexen Rechnung.

*Hinweis zu a):* Siehe Aufgabe 5.4.

**5.6** Berechne im stationären Zustand die Stromstärke  $i(t)$  und die Spannung  $u_L(t)$  an der Spule im Stromkreis der Abb. 5.9 bei  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ , wenn  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $\hat{u} = 25 \text{ V}$  und  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$

- a) durch Lösung der zugehörigen Differentialgleichung für  $i(t)$ ,
- b) mit Hilfe der komplexen Rechnung.

*Hinweis zu a)*  $u_L + u_R = u$  mit  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $u_R = R i$ .

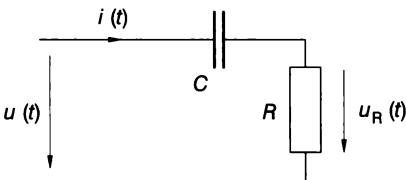


Abb. 5.8

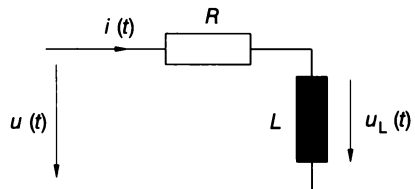


Abb. 5.9

## 5.2 Signale

Vielfach hängt die mathematische Beschreibung eines Vorganges nicht von seiner speziellen technischen Realisierung ab. Aus diesem Grund hat sich eine allgemeine *Systemtheorie* entwickelt. Aus dem gleichen Grund spricht man allgemeiner nicht mehr von Spannungen, Auslenkungen oder dgl., sondern nur noch von **Signalen**. Ein Signal ist eine zeitabhängige Funktion, etwa  $f(t)$ . Ein **zeitkontinuierliches Signal** liegt vor, wenn  $f(t)$  zu jedem Zeitpunkt eines Intervalls, das im Allgemeinen die gesamte Zeitachse ist, definiert ist. Im Folgenden werden zwei elementare zeitkontinuierliche Signale behandelt.

**Die (Einheits-)Sprungfunktion  $\sigma(t)$**  (Abb. 5.10)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Diese an der Stelle  $t=0$  unstetige Funktion heißt auch HEAVISIDE-Funktion und wird auch mit  $H(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  oder  $u(t)$  bezeichnet. Sie wird zur Beschreibung von Einschaltvorgängen verwendet. Sie ist die wichtigste "Testfunktion" für Systeme.

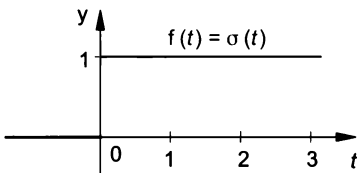


Abb. 5.10 Sprungfunktion  $y = \sigma(t)$

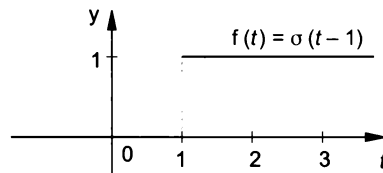


Abb. 5.11 Die Funktion  $y = \sigma(t-1)$

Der Sprung lässt sich beispielsweise nach  $t=1$  "verschieben" (Abb. 5.11). Um zu erkennen, wo diese Funktion den Wert 1 hat, überlegt man, dass dafür  $t-1 \geq 0$  oder  $t \geq 1$  sein muss.

### Beispiel 5.4 : Definition von Funktionen mithilfe der Sprungfunktion

Stelle folgende für  $t \in \mathbb{R}$  definierte Funktionen graphisch dar:

- a)  $f(t) = \sigma(-t)$       b)  $f(t) = \sigma(t-1) - \sigma(t-2)$       c)  $f(t) = \sin(t) \cdot \sigma(t)$   
 d)  $f(t) = t \cdot \sigma(t-2)$       e)  $f(t) = (t-2) \cdot \sigma(t-2)$

**Lösung**

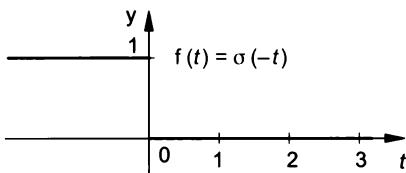


Abb. 5.12

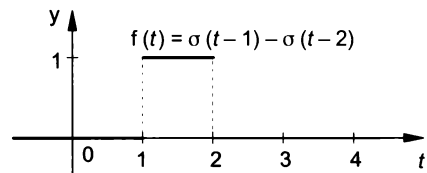


Abb. 5.13

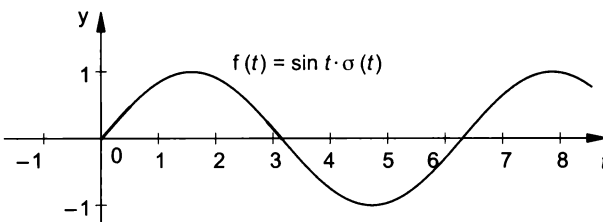


Abb. 5.14



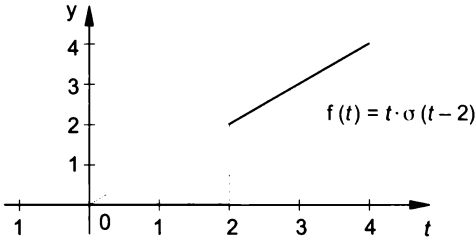


Abb. 5.15

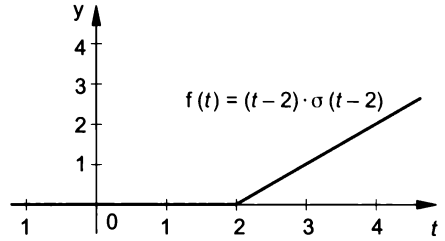


Abb. 5.16

- Zu a) Die Sprungfunktion hat den Wert 1, wenn  $-t \geq 0$ , d.h.  $t \leq 0$  ist (Abb. 5.12).
- Zu b) Die Differenz ergibt eine Rechteckfunktion (Abb. 5.13). Dies erkennt man, wenn man die beiden Funktionen  $y_1 = \sigma(t-1)$  und  $y_2 = -\sigma(t-2)$  zeichnet und anschließend addiert. Zur Kontrolle kann man auch einen beliebigen Zeitpunkt einsetzen, etwa  $t = 3$ :  $y(3) = \sigma(3-1) - \sigma(3-2) = \sigma(2) - \sigma(1) = 1 - 1 = 0$ .
- Zu c) Durch die Multiplikation mit der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  wird die Sinusfunktion  $y = \sin t$  erst zum Zeitpunkt  $t = 0$  "eingeschaltet" (Abb. 5.14).
- Zu d) Hier wird die Funktion  $y = t$  durch die Multiplikation mit  $\sigma(t-2)$  erst zum Zeitpunkt  $t = 2$  "eingeschaltet" (Abb. 5.15).
- Zu e) Die Funktion  $f(t) = (t-2) \cdot \sigma(t-2)$  wird um 2 Zeiteinheiten gegenüber der Funktion  $y = t \cdot \sigma(t)$  nach rechts verschoben (Abb. 5.16).

### Der Delta-Impuls $\delta(t)$

Der Delta-Impuls dient zur idealisierten, aber bequemen mathematischen Beschreibung eines sehr kurzen Impulses, durch den etwa ein mechanisches oder elektrisches schwingungsfähiges System aus dem Ruhezustand angeregt wird (Hammerschlag, Spannungstoß). Zu seiner Einführung kann man von einem kurzen Rechtecksimpuls  $y = r(t)$ , siehe Abb. 5.17, ausgehen ( $h > 0$ ):

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{für } 0 \leq t < h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \frac{1}{h} \cdot [\sigma(t) - \sigma(t-h)]$$

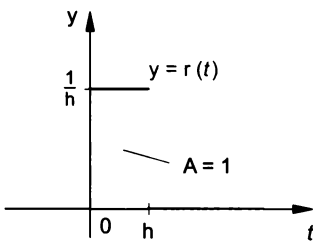


Abb. 5.17 Kurzer Rechtecksimpuls

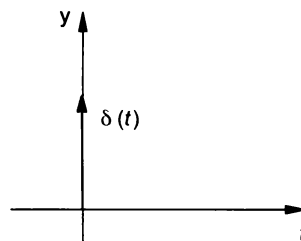


Abb. 5.18 Symbolische Darstellung der Deltafunktion

Zur Normierung der *Wirkung* einer solchen Impulsfunktion wurde gewählt, dass die "Impulsfläche" 1 ist:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt = \int_0^h r(t) dt = 1.$$

Wird  $h$  kleiner, so wird  $r(t)$  wegen der konstanten "Impulsfläche" 1 während der Impulsdauer  $h$  größer. Man möchte nun den gesamten Impuls "auf einen Zeitpunkt konzentrieren". Dazu geht man zum Grenzfall  $h \rightarrow 0$  über und erhält so die folgende "Funktion":

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} r(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$\delta(t)$  ist jedoch im eigentlichen Sinn keine Funktion mehr, da  $\infty$  kein Funktionswert sein kann;

ebenfalls ist das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  im üblichen Sinn nicht mehr möglich. Ähnlich wie man

jedoch Zahlbereichserweiterungen (etwa von den natürlichen Zahlen auf die ganzen Zahlen) durchführen kann, so kann man auch den Funktionsbegriff auf so genannte "verallgemeinerte Funktionen" oder "Distributionen" erweitern.  $\delta(t)$  ist eine solche verallgemeinerte Funktion, die **Delta-Impuls**  $\delta(t)$  genannt wird. Andere Namen sind *DIRAC-Impuls*<sup>15</sup>, *DIRAC-Funktion* oder *Nadelimpuls*. Den Delta-Impuls kann man natürlich nicht zeichnen; symbolisch wird er wie in Abb. 5.19 durch einen Pfeil dargestellt. Er lässt sich durch einen äußerst kurzen Rechteckimpuls von sehr großer Stärke veranschaulichen.

Wir kommen nun zur *Wirkung* des  $\delta$ -Impulses auf eine Zeitfunktion  $f(t)$ . Mit  $r(t)$  als kurzem Rechteckimpuls gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) r(t) dt = \int_0^h f(t) \frac{1}{h} dt = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h f(t) dt = \frac{1}{h} \cdot F(t) \Big|_0^h = \frac{1}{h} \cdot [F(h) - F(0)],$$

wobei  $F(t)$  eine Stammfunktion von  $f(t)$  ist. Für  $h \rightarrow 0$  erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) r(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0) = f(0).$$

Diese wichtige Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

heißt **Ausblendeigenschaft** des Delta-Impulses. Bei der Integration über das Produkt einer Funktion an der Stelle  $t = 0$  stetigen Funktion  $f(t)$  mit dem Delta-Impuls  $\delta(t)$  wird nur der Funktionswert  $f(0)$  an der Stelle  $t = 0$  "ausgeblendet" (Abb. 5.20).

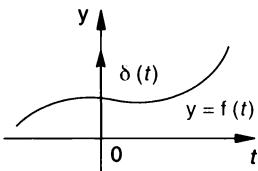


Abb. 5.19 Ausblenden von  $f(0)$

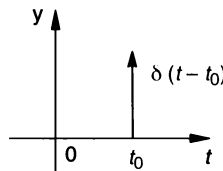


Abb. 5.20 Zeitlich verschobener Delta-Impuls

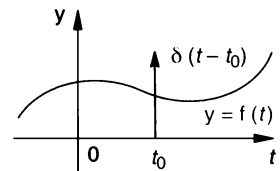


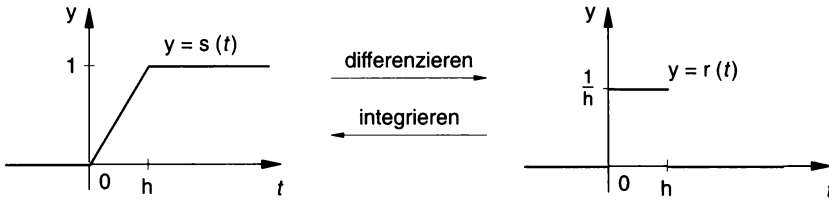
Abb. 5.21 Ausblenden von  $f(t_0)$

Ebenso wie die Sprungfunktion  $y = \sigma(t)$  kann auch der Delta-Impuls "verschoben" werden. Abb. 5.20 zeigt den an die Stelle  $t_0$  verschobenen Delta-Impuls  $\delta(t - t_0)$ . Allgemeiner lautet

die Ausblendeigenschaft des Delta-Impulses (Abb. 5.21):  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$ .

<sup>15</sup> Paul DIRAC (1902 – 1984), englischer Physiker

### Zusammenhang zwischen Delta-Impuls $\delta(t)$ und Sprungfunktion $\sigma(t)$

Abb. 5.22 Differenzieren von  $s(t)$  und Integrieren von  $r(t)$ 

*Differenziert* man die in Abb. 5.22 dargestellte Funktion  $s(t)$  an einer beliebigen Stelle  $t \neq 0$  sowie  $t \neq h$ , so erhält man die rechts dargestellte Rechtecksimpulsfunktion  $r(t)$ . *Integration* der Funktion  $r(t)$  von  $-\infty$  bis  $t$ , d.h. die Ermittlung des Inhaltes der Fläche unter der Funktion  $r(t)$ , ergibt umgekehrt  $s(t)$ . Lässt man nun  $h$  gegen null streben, so geht  $r(t)$  in den Delta-Impuls  $\delta(t)$  und  $s(t)$  in die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  über.

### Beispiel 5.5 : Schlag auf einen kleinen Körper

Durch einen kurzen Schlag (Golfschläger, Eishockey-Schläger) wird ein kleiner Körper der Masse  $m$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  s aus dem Ruhezustand auf eine Geschwindigkeit  $v_0$  beschleunigt (Abb. 5.23). Gib den zeitlichen Verlauf des vom Körper zurückgelegten Weges und seiner Geschwindigkeit an, wenn die Bewegung nach dem Stoß reibungsfrei erfolgt. Wie könnte die auf den Körper wirkende Kraft angegeben werden?

#### Lösung

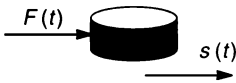


Abb. 5.23 Kurzzeitiger Stoß

Da sich der Körper nach dem Stoß kräftefrei mit der Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt, gilt  $v(t) = v_0 \cdot \sigma(t)$  sowie  $s(t) = v_0 \cdot t \cdot \sigma(t)$ . Da die Beschleunigung  $a(t)$  die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist, erhält man  $a(t) = v_0 \cdot \delta(t)$ . Dabei wurde berücksichtigt, dass in einem verallgemeinerten Sinn der

Ableitung gilt:  $\sigma'(t) = \delta(t)$ , wie nach Abb. 5.22 nahegelegt wird. Wegen  $F = m \cdot a$ , ist weiterhin  $F(t) = m \cdot v_0 \cdot \delta(t)$ , der "Kraftverlauf" in idealisierter Form.

### Im Überblick: Signale

Ein **Signal** ist eine zeitabhängige Funktion, von deren verschiedenen Realisierungsmöglichkeiten abgesehen wird. Ein **zeitkontinuierliches** Signal liegt vor, wenn  $f(t)$  zu jedem Zeitpunkt eines Intervalls, im Allgemeinen auf der gesamten Zeitachse, definiert ist.

Zwei wichtige elementare zeitkontinuierliche Signale sind:

- die **(Einheits-)Sprungfunktion  $\sigma(t)$**
- der **Delta-Impuls  $\delta(t)$**  als Idealisierung eines sehr kurzen Impulses extremer Stärke.

Der Delta-Impuls  $\delta(t)$  ist keine Funktion im üblichen Sinn. Er ist nur unter einem Integral erklärt. Seine Eigenschaften kommen durch die **Ausblendeigenschaft** zum Ausdruck, die die Wirkung auf andere "wirkliche" Funktionen beschreibt. Die Verwendung der Ausblendeigenschaft erspart das Arbeiten mit Rechteckimpulsen mit nach null strebender Breite.

## Aufgaben

5.7 Stelle folgende Rechteckfunktionen über die gesamte Zeitachse einheitlich mit Hilfe der Sprungfunktion dar:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{d) } f(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } t \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{e) } f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{f) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5.8 Gib mit Hilfe der Sprungfunktion einheitlich über die gesamte Zeitachse die Funktion mit dem Graphen an in

a) Abb. 5.24

b) Abb. 5.25

c) Abb. 5.26

d) Abb. 5.27

e) Abb. 5.28

f) Abb. 5.29

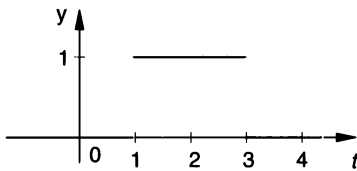


Abb. 5.24

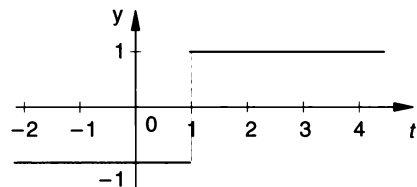


Abb. 5.25

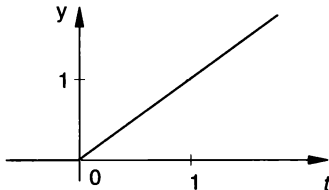


Abb. 5.26

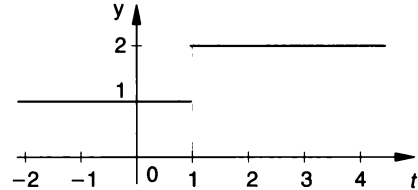


Abb. 5.27

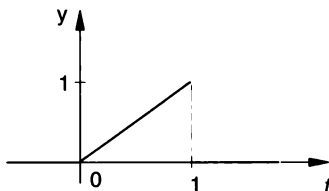


Abb. 5.28

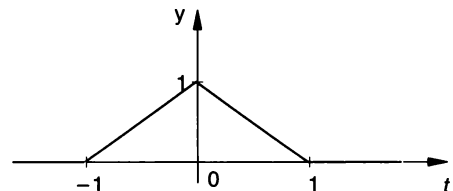


Abb. 5.29

5.9 Bestimme:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} (t+2) \delta(t) dt$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2t) \delta(t) dt$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta(t) dt$$

$$\text{d) } \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta(t-2) dt$$

$$\text{e) } \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi t) \delta(t-0,5) dt$$

$$\text{f) } \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi t) \delta(t-1) dt$$

### 5.3 Die Fourier-Transformation

Eine *periodische* Funktion  $f(t)$  lässt sich in Form der Fourier-Reihe als Summe unendlich vieler Sinusschwingungen darstellen. Die nun zu besprechende *Fourier-Transformation* löst (auch) bei *nichtperiodischen* Funktionen die Aufgabe, diese als Überlagerung von harmonischen Schwingungen darzustellen.

#### Komplexe Form einer Fourier-Reihe

Ähnlich wie die komplexe Rechnung eine rechentechnische Vereinfachung bei der Behandlung von reellen sinusförmigen Größen bringt, ist es auch empfehlenswert, sich bei der Fourier-Transformation der komplexen Rechnung zu bedienen. Dazu vorbereitend soll zuerst die komplexe Form einer Fourier-Reihe aufgestellt werden.

Ist  $f(t)$  eine (reelle) periodische Funktion mit der Periode  $T$  bzw. der Grundkreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , so gilt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots \quad (*)$$

$$\text{mit } a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

Die Reihe kann leicht in komplexer Form geschrieben werden, wenn man von der **EULER'schen Formel**  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$  ausgeht und schreibt:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$$

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j \cdot \sin(-\varphi) = \cos \varphi - j \cdot \sin \varphi$$

Addiert man beide Gleichungen, so erhält man  $2 \cdot \cos \varphi = e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}$  oder weiters  $\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$ . Subtrahiert man sie, so erhält man  $\sin \varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$ . Damit kann der Kosinus und der Sinus einer Zahl  $\varphi$  mit Hilfe der Exponentialfunktion geschrieben werden! Wir halten diesen Zusammenhang fest:

$$\sin \varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}); \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$$

#### Beispiel 5.6 : Komplexe Form einer Fourier-Reihe

Ermittle die komplexe Form der in Abb. 5.30 gegebenen Rechteckimpulsfolge  $f_4(t)$  mit der Periode  $T = 4$ .

#### Lösung

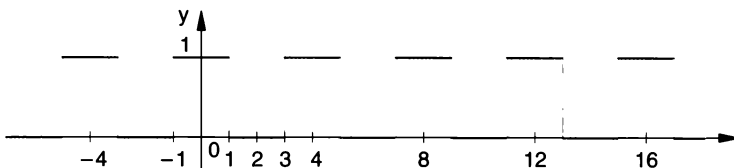


Abb. 5.30 Rechteckimpulsfolge

Die Grundfrequenz ist  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ . Da  $f_4(t)$  eine gerade Funktion ist, besitzt die Reihe nur Kosinusterme sowie einen möglichen Gleichanteil  $\frac{a_0}{2}$ .

$$f_4(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + a_2 \cdot \cos(2 \omega_0 t) + a_3 \cdot \cos(3 \omega_0 t) + \dots;$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f_4(t) dt = \int_0^1 1 dt = 1;$$

$$a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f_4(t) \cos(n \omega_0 t) dt = \int_0^1 \cos\left(n \frac{\pi}{2} t\right) dt = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}; n \geq 1.$$

Daraus:  $a_1 = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$ ,  $a_2 = \frac{2}{2\pi} \sin \pi = 0$ ,  $a_3 = \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{2}{3\pi}$ ,  $a_4 = \frac{2}{4\pi} \sin \pi = 0$ , usw.

Wir erkennen:  $a_n$  ist null, wenn  $n > 0$  und gerade ist. Ist  $n$  ungerade, so wechseln die Vorzeichen, beginnend mit dem positiven Vorzeichen:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}, a_3 = -\frac{2}{3\pi}, a_5 = \frac{2}{5\pi}, a_7 = -\frac{2}{7\pi}, a_9 = \frac{2}{9\pi}, \text{ usw.}$$

Damit lautet die Reihe:

$$f_4(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5 \omega_0 t) - \frac{2}{7\pi} \cos(7 \omega_0 t) \pm \dots$$

Setzt man  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j \cdot \omega_0 t} + e^{-j \cdot \omega_0 t})$ ,  $\cos(3 \omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j \cdot 3 \omega_0 t} + e^{-j \cdot 3 \omega_0 t})$ , ... , so erhält man:

$$\begin{aligned} f_4(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} (e^{j \cdot \omega_0 t} + e^{-j \cdot \omega_0 t}) - \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{1}{2} (e^{j \cdot 3 \omega_0 t} + e^{-j \cdot 3 \omega_0 t}) + \frac{2}{5\pi} \cdot \frac{1}{2} (e^{j \cdot 5 \omega_0 t} + e^{-j \cdot 5 \omega_0 t}) \mp \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot e^{j \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{\pi} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} \cdot e^{j \cdot 3 \omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} \cdot e^{-j \cdot 3 \omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} \cdot e^{j \cdot 5 \omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} \cdot e^{-j \cdot 5 \omega_0 t} - \dots = \\ &= \dots + \frac{1}{5\pi} \cdot e^{-j \cdot 5 \omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} \cdot e^{-j \cdot 3 \omega_0 t} + \frac{1}{\pi} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot e^{j \cdot \omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} \cdot e^{j \cdot 3 \omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} \cdot e^{j \cdot 5 \omega_0 t} - \dots \end{aligned}$$

Dies ist die komplexe Form der Fourier-Reihe von  $f_4(t)$ . Man schreibt auch:

$$f_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j n \omega_0 t} \text{ mit}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = c_{-1} = \frac{1}{\pi}, c_2 = c_{-2} = 0, c_3 = c_{-3} = -\frac{1}{3\pi}, c_4 = c_{-4} = 0, c_5 = c_{-5} = \frac{1}{5\pi}, \text{ usw.}$$

Wir erhalten:

Die Beträge der Koeffizienten  $c_n$  stellen das Amplitudenspektrum der komplexen Form der Fourier-Reihe dar.  $c_0$  ist der Gleichanteil (arithmetische Mittelwert) des "Signals"  $f_4(t)$ . Abb. 5.31 zeigt das Amplitudenspektrum  $A_n$ , Abb. 5.32 das Amplitudenspektrum  $|c_n|$  der Funktion  $f_4(t)$ .  $A_n$  und  $|c_n|$  sind über  $\omega = n \cdot \omega_0 = n \cdot \frac{\pi}{2}$  aufgetragen; beim Amplitudenspektrum  $|c_n|$  ist  $n$  auch ganzzahlig negativ.

Man erkennt: Das Amplitudenspektrum  $A_n$  entsteht durch Dazuklappen der  $|c_n|$ -Werte für negative  $n$  zu jenen mit positiven  $n$ . Die y-Achse ist das "Scharnier".

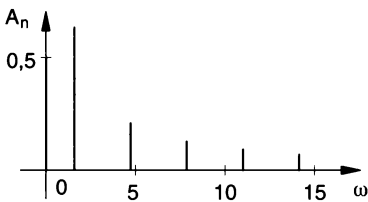


Abb. 5.31 Amplitudenspektrum  $A_n$  von  $f_4(t)$

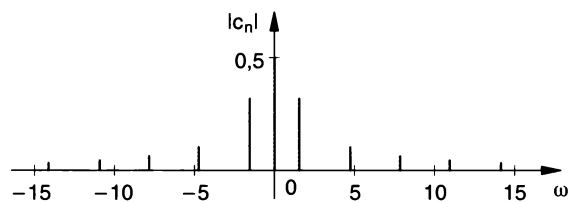


Abb. 5.32 Amplitudenspektrum  $|c_n|$  von  $f_4(t)$  in der komplexen Form

Allgemein lässt sich zeigen, dass man aus der Sinus-Kosinus-Form der Fourier-Reihe (\*) auf Seite 192 die folgende komplexe Form der Fourier-Reihe herleiten kann:

**Komplexe Form der Fourier-Reihe**

Ist  $f(t)$  eine (reelle) periodische Funktion mit der Periode  $T$  bzw. der Grundkreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , so gilt:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt .$$

Dabei besteht folgende Umrechnung zwischen den Fourier-Koeffizienten der Sinus-Kosinus-Form und der komplexen Form:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Anmerkungen**

- (1) Die (komplexen) Fourier-Koeffizienten  $c_n$  sind nun für  $n = 0$  und  $n \neq 0$  durch eine einheitliche Formel zu berechnen.
- (2)  $c_n$  und  $c_{-n}$  sind für reelle Funktionen  $f(t)$  konjugiert komplex:  $c_n = c_{-n}^*$ ; daher gilt auch  $|c_{-n}| = |c_n|$ .
- (3) Es gilt:  $|c_n| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n$ , d.h. der Betrag von  $c_n$  ist gleich der halben Amplitude  $A_n$  der  $n$ -ten Harmonischen (in der Amplituden-Phasenform der Fourier-Reihe).
- (4) Da die Summation von  $n = -\infty$  bis  $n = \infty$  geht, treten formal auch negative "Kreisfrequenzen"  $-\omega_0, -3\omega_0, -5\omega_0, \dots$  als *Rechengrößen* auf. Das erscheint auf den ersten Blick seltsam, kommt aber nur davon, dass man beispielsweise  $e^{j \cdot 3\omega_0}$  und  $e^{-j \cdot 3\omega_0}$  braucht, um die reelle Schwingung  $y = \sin(3\omega_0 t)$  oder  $y = \cos(3\omega_0 t)$  mit der Frequenz  $3 \cdot \omega_0$  als *physikalische* Größe darzustellen.

**Nichtperiodische Funktion als Grenzfall einer periodischen Funktion mit  $T \rightarrow \infty$**

Schließlich soll nun die Frage nach dem Frequenzspektrum (Frequenzgehalt) einer nicht-periodischen Funktion  $f(t)$ , beispielsweise eines einzelnen *Rechteckimpulses* (Abb. 5.33) gestellt werden:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

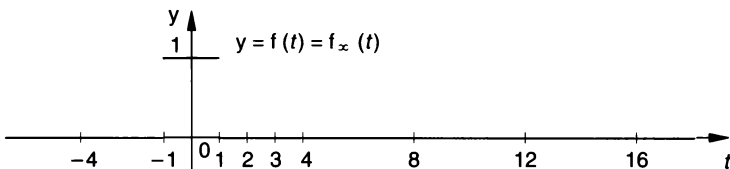
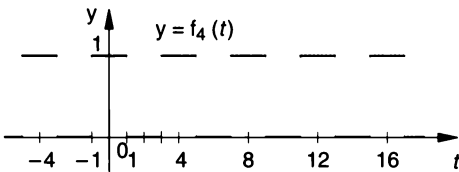
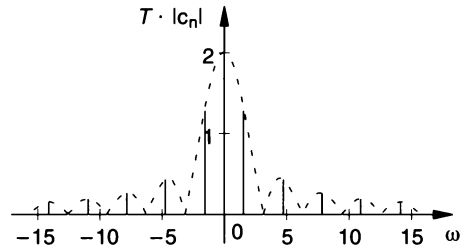


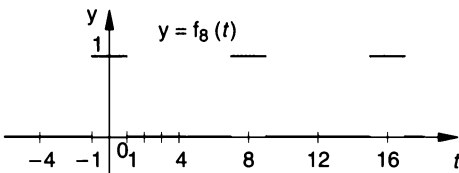
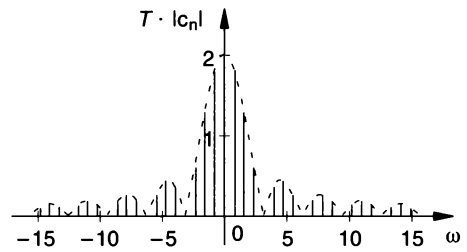
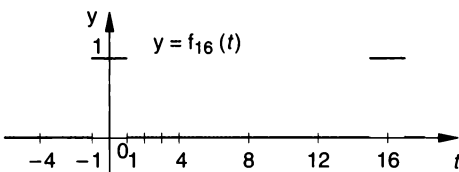
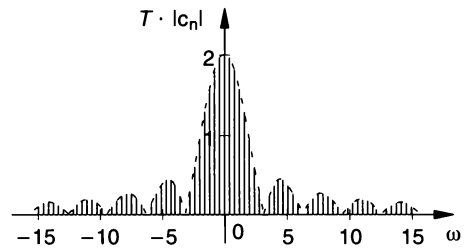
Abb. 5.33 Einzelimpuls

Man kann sich denken, dass dieser aus einer periodischen Impulsfolge entsteht, wenn die Periode  $T$  sehr groß ist; mathematisch bedeutet dies den Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$ . Auf diese Weise kann allgemein eine nichtperiodische Funktion als Grenzwert einer periodischen Funktion mit einer über alle Schranken wachsenden Periode  $T$  aufgefasst werden.

Dazu gehen wir von der in Abb. 5.34 dargestellten Folge von Rechtecksimpulsen mit der Periode  $T=4$  aus, verdoppeln danach zweimal die Periode und beobachten dabei die Folge der Werte  $T \cdot |c_n|$ . Abb. 5.34 und Abb. 5.35 zeigen diesen Sachverhalt bei  $f_4(t)$ . Strichliert ist schon jene Kurve eingezeichnet, die sich als "Amplitudendichte" für  $T \rightarrow \infty$  ergeben wird.

Abb. 5.34 Funktion mit Periode  $T=4$ Abb. 5.35 Folge der Werte  $T \cdot |c_n|$  von  $f_4(t)$ 

Wir verdoppeln nun die Periode  $T$  der Rechteckimpulsfolge auf 8, sodann auf 16, wie in den Abb. 5.36 und Abb. 5.38 gezeigt. Die zugehörigen Funktionen werden mit  $f_8(t)$  bzw.  $f_{16}(t)$  bezeichnet. Abb. 5.37 und Abb. 5.39 zeigen nur noch die im Folgenden interessierenden  $T \cdot |c_n|$ -Werte von  $f_8(t)$  bzw.  $f_{16}(t)$ . Bei ihrem Auftragen ist zu beachten, dass sich bei einer Verdopplung der Periode jeweils die Grundkreisfrequenz halbiert; daher liegen die  $T \cdot |c_n|$ -Linien nun entsprechend dichter.

Abb. 5.36 Impulsfolge mit Periode  $T=8$ Abb. 5.37 Folge der Werte  $T \cdot |c_n|$  von  $f_8(t)$ Abb. 5.38 Impulsfolge mit Periode  $T=16$ Abb. 5.39 Folge der Werte  $T \cdot |c_n|$  von  $f_{16}(t)$ 

Denkt man sich die Verdopplung der Periode ständig fortgesetzt, so wird für  $T \rightarrow \infty$  aus dem "Linienspektrum" der  $T \cdot |c_n|$ -Werte ein **kontinuierliches Spektrum**. Für  $T \rightarrow \infty$  gibt es unendlich viele Frequenzen, die Amplituden  $|c_n|$  gehen dabei jedoch gegen null.

Bezeichnet nun *allgemein*  $f_T(t)$  eine periodische Funktion mit der Periode  $T$  und  $f(t)$  die daraus durch  $T \rightarrow \infty$  entstehende nichtperiodische Funktion, so kann man zeigen, dass für  $T \rightarrow \infty$  und damit  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$  gilt:



$$T \cdot c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \rightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

sowie

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Man definiert:

Als **Fourier-Transformierte** einer (im Allgemeinen nichtperiodischen) Funktion  $f(t)$  bezeichnet man die komplexwertige Funktion

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Die Berechnung von  $F(j\omega)$  aus  $f(t)$  heißt **Fourier-Transformation** der Funktion  $f(t)$ . Dadurch entsteht aus einer reellen Funktion  $f(t)$  eine komplexwertige Funktion  $F(j\omega)$ .

Etwas überraschend könnte es erscheinen, dass man  $F(j\omega)$  und nicht  $F(\omega)$  für die Fourier-Transformierte schreibt. Dies ist aber nur eine Vereinbarung und drückt aus, dass man die Funktion über der imaginären Achse der komplexen Ebene definiert. Man könnte sie auch als  $F(\omega)$  über der reellen Achse definieren, was auch öfter geschieht. Für die Abhängigkeit von  $\omega$  ist dies ohne Auswirkung. Die  $j\omega$ -Definition ist durch einen Zusammenhang der Fourier- mit der Laplace-Transformation nahegelegt.

Man sagt, dass die Zeitfunktionen  $f(t)$  im **Original-** oder **Zeitbereich** liegen, während ihre Fourier-Transformierten im **Frequenz-** oder **Bildbereich** liegen. Auch die folgenden Schreibweisen sind üblich:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \text{ oder } f(t) \xrightarrow{\circ} F(j\omega).$$

Das Hantelsymbol  $\xrightarrow{\circ}$  drückt aus, dass  $f(t)$  und  $F(j\omega)$ , obwohl im Allgemeinen völlig verschieden, zusammengehören, einander entsprechen (miteinander korrespondieren); es wird daher *Korrespondenzsymbol* genannt. Die Fourier-Transformation einer Funktion  $f(t)$  ist eine so genannte *Integraltransformation*, da  $F(j\omega)$  durch eine Integration aus  $f(t)$  entsteht.

Die Fourier-Transformation lässt sich nicht nur auf Zeitfunktionen anwenden, sondern kann auch auf Funktionen mit ebenen oder räumlichen Koordinaten angewendet werden (Bildverarbeitung!).

Der folgende Satz wird ohne Herleitung angegeben.

Die Zeitfunktion  $f(t)$  kann aus  $F(j\omega)$  durch das so genannte **Fourier-Integral**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

dargestellt werden und damit aus  $F(j\omega)$  zurückgewonnen werden.

*Anmerkungen:*

- (1) Das Fourier-Integral drückt aus, dass in der Fourier-Transformierten  $F(j\omega)$  dieselbe Information enthalten ist wie in der Funktion  $f(t)$ .

- (2) Auch bei der komplexen Fourier-Analyse nichtperiodischer Funktionen treten physikalisch nicht deutbare negative "Frequenzen" auf. Grundsätzlich kann man wie bei den Fourier-Reihen auch bei nichtperiodischen Funktionen nur mit Frequenzen  $\omega \geq 0$  arbeiten; in diesem Fall müssten jedoch die verhältnismäßig einfachen Gleichungen der komplexen Fourier-Transformation durch kompliziertere ersetzt werden.

Ähnlich könnte man auch auf die komplexe Rechnung bei sinusförmigen Wechselströmen verzichten und, allerdings aufwendiger, reell rechnen.

- (3) Das Fourier-Integral ist das Gegenstück zur Fourier-Reihe  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$  einer periodischen Funktion  $f(t)$ . Es ermöglicht eine anschauliche Deutung der Fourier-Transformierten  $F(j\omega)$  einer Funktion  $f(t)$ :  $f(t)$  lässt sich nun im Gegensatz zur Fourier-Reihe einer periodischen Funktion als eine "kontinuierliche" Überlagerung harmonischer Schwingungen  $e^{j\omega t}$  mit Kreisfrequenzen  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  darstellen. Dabei ist  $\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega$  die komplexe Amplitude für ein kleines Kreisfrequenzintervall  $[\omega, \omega + d\omega]$  und entspricht dem Koeffizienten  $c_n$  in der Fourier-Reihe. Ein hoher Wert von  $F(j\omega)$  in einem Kreisfrequenzintervall  $[\omega, \omega + d\omega]$  bedeutet, dass dort die Kreisfrequenzen eine große Bedeutung für die Darstellung von  $f(t)$  haben; der Frequenzgehalt von  $f(t)$  in diesem Intervall ist hoch. Aus diesem Grund nennt man das Fourier-Integral auch die **spektrale Zerlegung** und  $F(j\omega)$  die **komplexe Spektraldichte**, kurz das **Spektrum** der nichtperiodischen Zeitfunktion  $f(t)$ . Wie jede komplexe Größe kann  $F(j\omega)$  im Exponentialformat oder in der Komponentenform geschrieben werden:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + j \cdot I(\omega).$$

$|F(j\omega)|$  heißt **Amplitudendichte**,  $\varphi(\omega)$  **Phasendichte**.

Ein Prisma zerlegt Licht in die Farben, aus denen es zusammengesetzt ist. Genauso zerlegt die Fourier-Transformation als "mathematisches Prisma" eine Funktion in die in ihr enthaltenen Frequenzen. Dabei gilt:

**Eine periodische Funktion besitzt ein diskretes Spektrum (= Linienspektrum), eine nichtperiodische Funktion ein kontinuierliches Spektrum.**

Die große Bedeutung der Fourier-Transformation in den Anwendungen ergibt sich weitgehend daraus, dass man mit ihrer Hilfe System- oder Signaleigenschaften aus sehr gegensätzlicher Sicht betrachten kann: im Zeitbereich oder im Frequenzbereich!

- (4) Welche Eigenschaft muss eine Zeitfunktion  $f(t)$  haben, dass sie eine Fourier-Transformierte  $F(j\omega)$  besitzt? Es ist also zu fragen, wann das uneigentliche Integral in der Definition von  $F(j\omega)$  existiert. Dies trifft jedenfalls zu, wie man zeigen kann, wenn für eine

(stückweise stetige) Funktion  $f(t)$  das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  existiert, also der Flächenin-

halt zwischen dem Graphen von  $|f(t)|$  und der gesamten  $t$ -Achse endlich bleibt. Anders ausgedrückt,  $f(t)$  muss genügend schnell "abfallen" (Abb. 5.40). Diese Bedingung *garantiert* die Existenz der Fourier-Transformierten. Allerdings gibt es auch Funktionen, die diese Bedingung nicht erfüllen, aber trotzdem eine Fourier-Transformierte besitzen.

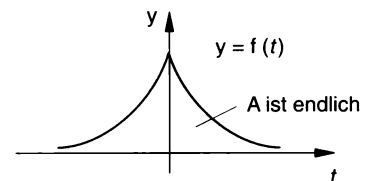


Abb. 5.40 Zur Existenz der Fourier-Transformierten von  $f(t)$

(5) Die Definition der Fourier-Transformierten erfolgt nicht einheitlich. Häufig wird statt der Kreisfrequenz  $\omega$  die *Frequenz*  $f$  verwendet. In diesem Fall wird die Fourier-Transformierte mit  $H$ , die Zeitfunktion auch mit  $h(t)$  bezeichnet. Man definiert dann:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt, \text{ woraus sich } h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \text{ ergibt.}$$

Vorteil: Der Faktor  $\frac{1}{2\pi}$  im Fourier-Integral wird vermieden, die beiden Formeln für  $H(f)$  und  $h(t)$  werden symmetrisch.

**Beispiel 5.7 : Spektrum eines Rechteckimpulses**

Bestimme die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

**a)**  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (a > 0) \text{ (Abb. 5.41)}$      **b)**  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ (Abb. 5.42)}$

**Lösung**

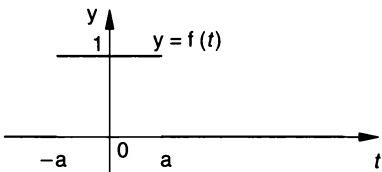


Abb. 5.41 Symmetrischer Rechteckimpuls

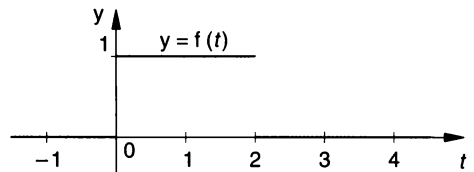


Abb. 5.42 Zeitverschobener Rechteckimpuls

Zu **a)**  $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$ . Ist  $\omega \neq 0$ , so ist

$$\int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega \cdot a} - e^{-j\omega \cdot (-a)}) = \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega \cdot a} - e^{-j\omega \cdot a}) = \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{2j} (e^{j\omega \cdot a} - e^{-j\omega \cdot a}) = 2 \cdot \frac{\sin(a\omega)}{\omega} = 2a \cdot \frac{\sin(a\omega)}{a\omega}.$$

Dabei wurde verwendet, dass  $\sin(a\omega) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega \cdot a} - e^{-j\omega \cdot a})$  ist (siehe Seite 192).

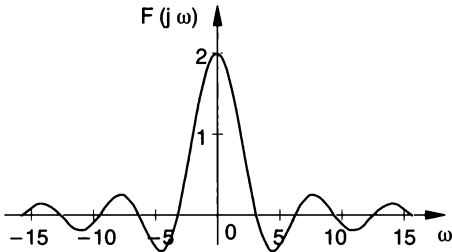
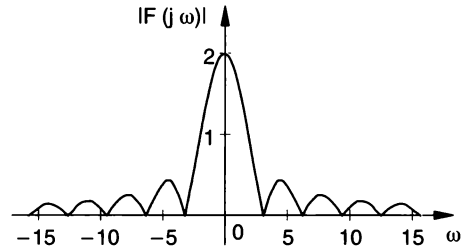
Ist  $\omega = 0$ , so ergibt sich einfach  $\int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a 1 \cdot e^0 dt = 2a$ .

Somit lautet die Fourier-Transformierte, die in diesem Fall eine reelle Funktion ist:

$$F(j\omega) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{\sin(a\omega)}{\omega} = 2a \cdot \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2a & \text{für } \omega = 0 \end{cases}$$

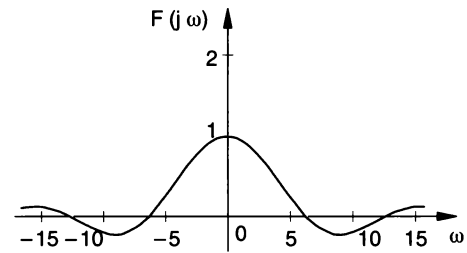
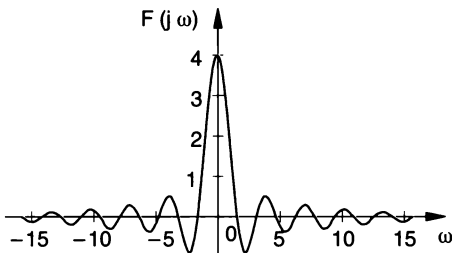
Diese Funktion ist stetig an der Stelle  $\omega = 0$ , da  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{2\sin(2\omega)}{a\omega} = 2a$ .

Für  $a = 1$  zeigen Abb. 5.43 und 5.44  $F(j\omega)$  sowie den Betrag  $|F(j\omega)|$ , die Amplitudendichte.  $|F(j\omega)|$  ist gerade die Hüllkurve in Abb. 5.35, 5.37 und 5.39, wo die  $T \cdot |c_n|$ -Werte einer periodischen Rechteckimpulsfolge (Periode  $T$ ) mit der Impulsbreite  $2a = 2$  dargestellt sind!

Abb. 5.43 Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses für  $a = 1$ Abb. 5.44 Amplitudendichte des Rechteckimpulses für  $a = 1$ 

Eine interessante Eigenschaft kann am Beispiel 5.7 gezeigt werden. Wir bestimmen die erste positive Nullstelle von  $F(j\omega)$ :  $\frac{\sin(a\omega)}{\omega} = 0$  für  $a\omega_1 = \pi$ .

Daraus folgt  $\omega_1 = \frac{\pi}{a}$ . Obwohl der Rechteckimpuls durch harmonische Schwingungen  $e^{j\omega t}$  aller Frequenzen aufgebaut wird, so sind doch besonders die Schwingungen mit Frequenzen  $|\omega| < \frac{\pi}{a}$  am Aufbau beteiligt. Wird nun aber  $a$  kleiner, die Impulsdauer  $2a$  also kürzer, so wird das beim Aufbau vorherrschende "Frequenzband"  $|\omega| < \frac{\pi}{a}$  breiter und umgekehrt. Für  $a = 1$  ist  $\omega_1 = \pi$ , für  $a = 2$  ist  $\omega_1 = \frac{\pi}{2} = 1,57$ . Ist umgekehrt der Impuls kürzer, d.h. seine Zeitdauer  $2a$  kleiner, so wird das vorherrschende Frequenzband breiter. Abb. 5.45 zeigt die Fourier-Transformierte, wenn  $a = 2$  sowie  $a = 0,5$ .

Abb. 5.45  $F(j\omega)$  eines Rechteckimpulses mit  $a = 2$  sowie mit  $a = 0,5$ 

Man spricht von einer **Reziprozität von Zeit und Frequenz**, die für die Fourier-Transformation grundlegend ist. Es lässt sich nicht nur für Rechteckimpulse zeigen, dass eine Verlängerung der Signaldauer immer eine Verkleinerung des Frequenzbandes (Intervall, in dem die Spektraldichte  $F(j\omega)$  merklich von null abweicht) zur Folge hat und umgekehrt. Diese Aussage ist fundamental für die Signalübertragung und Spektralanalyse.

Zu **b)** Es ist zu erwarten, dass die Amplitudendichte  $|F(j\omega)|$  gleich ist der eines Rechteckimpulses in a) mit  $a = 1$ . Denn außer einer Zeitverschiebung gibt es keine weitere Änderung.

$$F(j\omega) = \int_0^2 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^2 = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega \cdot 2} - e^{-j\omega \cdot 0}) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j2\omega}).$$

$$\text{Da } 1 - e^{-j2\omega} = e^{-j\omega} \cdot (e^{j\omega} - e^{-j\omega}),$$

$$\text{ist } F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega} \cdot (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = \frac{2e^{-j\omega}}{\omega} \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\omega} - e^{-j\omega}).$$

Berücksichtigt man noch, dass  $\sin \omega = \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\omega} - e^{-j\omega})$ , so erhält man schließlich:

$$F(j\omega) = \frac{2\sin \omega}{\omega} \cdot e^{-j\omega}.$$

Die Fourier-Transformierte ist nun tatsächlich eine komplexwertige Funktion. Wir bestimmen die Amplitudendichte  $|F(j\omega)|$ :

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{2\sin\omega}{\omega} \right| \cdot |e^{-j\omega}| = \left| \frac{2\sin\omega}{\omega} \right| \cdot 1 = \left| \frac{2\sin\omega}{\omega} \right|.$$

Die Amplitudendichte stimmt also mit dem aus a) überein, wenn man dort  $a = 1$  setzt. Die beiden Fourier-Transformierten unterscheiden sich nicht im Betrag, jedoch in der Phase.

**Beispiel 5.8 : Spektrum einer exponentiell abklingenden Funktion**

Bestimme die Fourier-Transformierte des einseitigen Exponentialimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} = e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

(Ein Anwendungsbeispiel dafür unter vielen: Zeitverhalten der Entladestromstärke eines Kondensators über einen Widerstand mit der Zeitkonstante  $\tau = 1$ ).

**Lösung** Abb. 5.46 und Abb. 5.47

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = -\frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-(1+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-t} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-t} \cdot [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] \Big|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Die Stammfunktion  $-\frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-t} \cdot [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)]$  wird an der oberen Grenze null, weil  $e^{-t}$  nach null geht für  $t \rightarrow \infty$ . Somit erhält man:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= -\frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-t} \cdot [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-0} \cdot [\cos 0 - j\sin 0] = \\ &= \frac{1}{1+j\omega}. \end{aligned}$$

Amplitudendichte:  $|F(j\omega)| = \frac{|1|}{|1+j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$ .

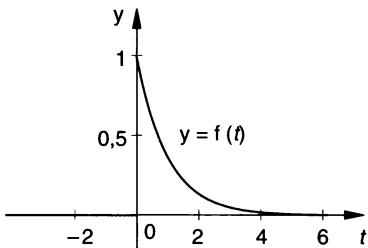


Abb. 5.46 Einseitiger Exponentialimpuls  $f(t)$

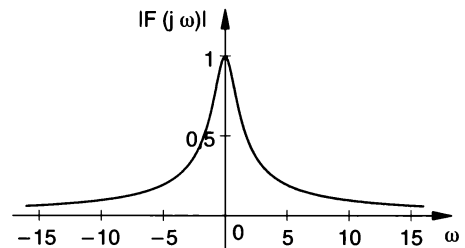


Abb. 5.47 Amplitudendichte zu  $f(t)$

**Beispiel 5.9 : Spektrum des Delta-Impulses**

Bestimme die Fourier-Transformierte des Delta-Impulses  $\delta(t)$ .

**Lösung**

Aufgrund der Ausblendeigenschaft des  $\delta$ -Impulses, Seite 189 folgt sofort:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \cdot 0} = 1.$$

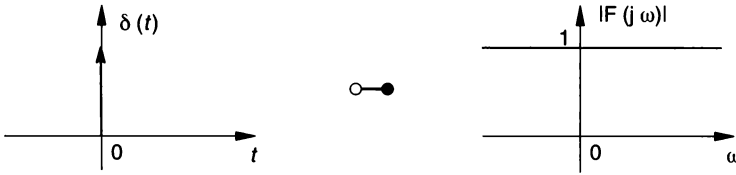
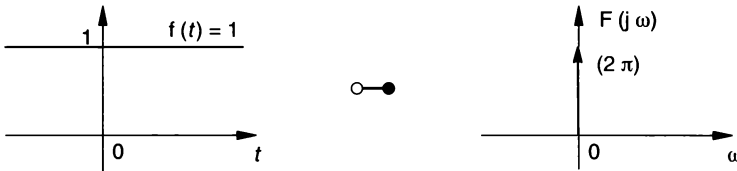


Abb. 5.48 Deltafunktion und zugehörige Amplitudendichte

Die Amplitudendichte  $|F(j\omega)|$  ist somit konstant gleich 1, unabhängig von der (Kreis)-Frequenz  $\omega$  (Abb. 5.48). Der Delta-Impuls enthält somit *alle Frequenzen*  $\omega \in \mathbb{R}$  mit der *gleichen Amplitude*. Man spricht auch von einem "weißen" Spektrum des  $\delta$ -Impulses.

Man kann auch fragen, wie die Zeitfunktion  $f(t)$  aussieht, deren Fourier-Transformierte  $F(j\omega) = \delta(\omega)$  ist, deren Spektraldichte an der Stelle  $\omega = 0$  unendlich, sonst aber überall null ist. Ohne Begründung wird die folgende Korrespondenz angegeben (Abb. 5.49):

$$f(t) = 1 \longleftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega)$$

Abb. 5.49 Konstante Funktion  $f(t) = 1$  mit zugehörigem Spektrum

Die "Gleichverteilung"  $f(t) = 1$  ist somit die gesuchte Zeitfunktion. Die beiden Korrespondenzen  $\delta(t) \longleftrightarrow 1$  und  $1 \longleftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega)$  sind Extremfälle der Reziprozität von Zeit und Frequenz (Seite 199).

### Vereinfachungen bei der Berechnung der Fourier-Transformierten

Bei geraden oder ungeraden (reellen) Zeitfunktionen kann die Berechnung der Fourier-Transformierten vereinfacht werden. Wegen  $e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \cdot \sin \varphi$  folgt zuerst

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt - j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

**a)  $f(t)$  ist gerade, d.h.  $f(-t) = f(t)$ :**

Daher ist auch  $f(t) \cdot \cos(\omega t)$  gerade, dagegen  $f(t) \cdot \sin(\omega t)$  ungerade. Daher folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt = 0.$$

Somit gilt einfach:  $F(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt$ ,  $F(j\omega)$  ist damit reell.

**b)  $f(t)$  ist ungerade**, d.h.  $f(-t) = -f(t)$ :

Nun ist  $f(t) \cdot \cos(\omega t)$  ungerade, dagegen  $f(t) \cdot \sin(\omega t)$  gerade. Daher folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt.$$

Somit gilt einfach:  $F(j\omega) = -2j \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt$ ,  $F(j\omega)$  ist damit imaginär.

**Fourier-Transformation gerader oder ungerader (reeller) Funktionen**

$f(t)$  gerade:  $F(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt$

$f(t)$  ungerade:  $F(j\omega) = -2j \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt$

**Beispiel 5.10 : Fourier-Transformierte einer geraden Funktion**

Bestimme die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses aus Beispiel 5.7, Seite 198:

**Lösung**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$F(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^a 1 \cdot \cos(\omega t) dt$$

Ist  $\omega \neq 0$ , so ist  $F(j\omega) = 2 \int_0^a f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^a 1 \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^a = 2 \cdot \frac{\sin(a\omega)}{\omega}$ .

Ist  $\omega = 0$ , so ist  $F(0) = 2 \int_0^a f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^a 1 \cdot \cos 0 dt = 2 \int_0^a 1 \cdot 1 dt = 2a$ .

**Weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation**

Zur Fourier-Transformation gibt es zahlreiche Sätze, die beim Bilden von Fourier-Transformierten nützlich sind. Stellvertretend dafür werden drei Sätze ohne Herleitung angegeben. Ihr Beweis kann unmittelbar durch Einsetzen in die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation auf Seite 196 und darauffolgende Integration erfolgen.

**a) Symmetrie von  $F(j\omega)$ :**

Ist  $f(t)$  reell (was wir im Allgemeinen immer annehmen), so gilt:  $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ .

Daraus folgt etwa, dass die Amplitudendichte  $|F(j\omega)|$  eine gerade Funktion bezüglich  $\omega$  ist. Siehe dazu die Beispiele 5.7, 5.8 und 5.9.

**b) Linearität (Summenregel und Faktorregel):**

Wenn  $f_1(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_1(j\omega)$  und  $f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_2(j\omega)$ , so gilt:

$$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} a \cdot F_1(j\omega) + b \cdot F_2(j\omega).$$

Eine Summe von Funktionen kann gliedweise fouriertransformiert werden. Ein konstanter Faktor bleibt unverändert.

**c) Frequenzverschiebungssatz:**

Wenn  $f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(j\omega)$ , so gilt:  $e^{j\omega_0 t} \cdot f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(j(\omega - \omega_0))$

Eine Multiplikation von  $f(t)$  mit  $e^{j\omega_0 t}$  bewirkt eine Verschiebung des Spektrums  $F(j\omega)$  von  $f(t)$  um  $\omega_0$ . Dies ist eine für die Anwendungen wichtige Eigenschaft der Fourier-Transformation.

**Beispiel 5.11 : Fourier-Transformierte einer Kosinusfunktion**

Bestimme die Fourier-Transformierte von  $f(t) = \cos(2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

**Lösung**

Es gilt:  $\cos(2t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j2t} + e^{-j2t}) = e^{j2t} \frac{1}{2} \cdot 1 + e^{-j2t} \frac{1}{2} \cdot 1$ . Aufgrund der Linearität der Fourier-Transformation, wegen  $1 \xrightarrow{\text{FT}} 2\pi \cdot \delta(\omega)$  und nach dem Frequenzverschiebungssatz folgt für die Fouriertransformierte  $F(j\omega)$  von  $f(t) = \cos(2t)$ :

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega - 2) + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega - (-2)) = \pi \delta(\omega - 2) + \pi \delta(\omega + 2).$$

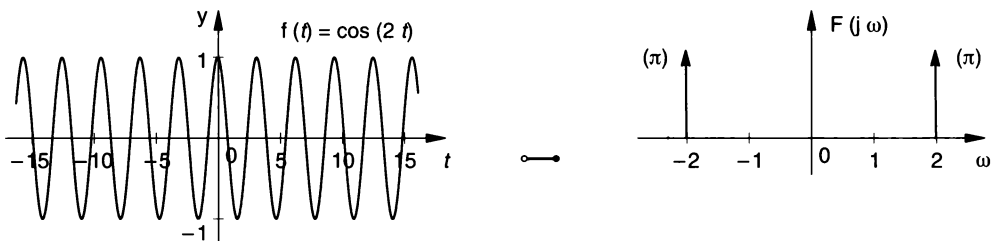


Abb. 5.50 Spektrum von  $f(t) = \cos(2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Man erhält also erwartungsgemäß, dass in  $f(t) = \cos(2t)$  nur eine Kreisfrequenz  $\omega = 2$  enthalten ist, das Spektrum dieser Funktion besteht nur aus je einem  $\delta$ -Impuls, d.h. einer "Spektrallinie" bei  $\omega = -2$  und  $\omega = 2$  (Abb. 5.50). Neben den Pfeilen für die  $\delta$ -Impulse sind auch die auftretenden Faktoren  $\pi$  vermerkt.

Wesentlich war hier die Voraussetzung, dass  $f(t) = \cos(2t)$  auf der *gesamten* Zeitachse gegeben war. Betrachtet man bei einer Messung die Funktion  $f(t) = \cos(2t)$  nur während einer endlichen Zeitspanne, etwa während der Zeitdauer von  $t = -a$  bis  $t = a$  ( $a > 0$ ), so liegt die gegenüber  $f(t)$  veränderte Funktion

$$g(t) = \begin{cases} \cos(2t) & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

vor. Man kann auch sagen, dass man  $f(t)$  nur im "Fenster" zwischen  $t = -a$  und  $t = a$  betrachtet. Das Spektrum von  $g(t)$  ist nicht mehr diskret, sondern es kommt zu einer Verbreiterung der beiden Linien, die umso stärker ist, je kleiner  $a$  ist (Reziprozität von Zeit und Frequenz!).



<b>Kleine Tabelle zur Fourier-Transformation: f(t) reell</b>	
f(t)	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, F(-j\omega) = F^*(j\omega),$ Realteil gerade, Imaginärteil ungerade Amplitudendichte  F(jω)  gerade
f(t) gerade	$F(j\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt;$ reell, gerade
f(t) ungerade	$F(j\omega) = -2j \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt;$ imaginär, ungerade
a · f(t) + b · g(t), reell	a · F(jω) + b · G(jω) Linearität
e <sup>jω<sub>0</sub>t</sup> · f(t)	F(j · (ω - ω <sub>0</sub> )) Frequenzverschiebungssatz
δ(t)	1
1	2π · δ(ω)
Symm. Rechteckimpuls der Länge 2a $f(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq a \\ 0, &  t  > a \end{cases}$	$2 \frac{\sin(a\omega)}{\omega}$ für ω ≠ 0 2a für ω = 0
Einseitiger Exponentialimpuls e <sup>-at</sup> · σ(t), a > 0	$\frac{1}{a + j\omega}$
cos(ω <sub>0</sub> t)	π [δ(ω + ω <sub>0</sub> ) + δ(ω - ω <sub>0</sub> )]
sin(ω <sub>0</sub> t)	jπ [δ(ω + ω <sub>0</sub> ) - δ(ω - ω <sub>0</sub> )]

**Im Überblick: Die Fourier-Transformation**

$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ , eine Funktion von ω, heißt **Fourier-Transformierte** der "Zeitfunktion" f(t). Man schreibt auch: f(t) ↔ F(jω). Die Umkehrformel lautet:

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$ . Das Integral darin heißt **Fourier-Integral**.

Die Fourier-Reihe einer **periodischen Funktion** f(t) mit der Periode T lautet in **komplexer Darstellung**:  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$ . Die harmonischen Schwingungen e<sup>jnω<sub>0</sub>t</sup> besitzen nur Frequenzen n ω<sub>0</sub>, die ganzzahlige Vielfache einer Grundkreisfrequenz ω<sub>0</sub> =  $\frac{2\pi}{T}$  sind.

Ist  $f(t)$  **nichtperiodisch**, so tritt an die Stelle der Fourier-Reihe das **Fourier-Integral**: auch hier ist  $f(t)$  aus **harmonischen Schwingungen**  $e^{j\omega t}$  mit der **komplexen Amplitude**  $\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega$  aufgebaut, wobei im Allgemeinen **alle Frequenzen**  $\omega$  zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  benötigt werden.  $F(j\omega)$  heißt auch komplexe **Spektraldichte**, kurz das **Spektrum** der nichtperiodischen Zeitfunktion  $f(t)$ .  $|F(j\omega)|$  heißt ihre **Amplitudendichte**.

**Reziprozität von Zeit und Frequenz:** Ein Signal von kurzer Dauer besitzt ein breites Frequenzband, d.h. die Spektraldichte  $F(j\omega)$  ist in einem großen Intervall deutlich von null verschieden, und umgekehrt.

Die Zerlegung einer Funktion (periodisch oder nichtperiodisch) in ihre harmonische Schwingungen wird **Fourier-Analyse** genannt. Die große **Bedeutung der Fourier-Transformation** in den Anwendungen ergibt sich weitgehend daraus, dass man mit ihrer Hilfe System- oder Signaleigenschaften statt im "Zeitbereich" oft einfacher im "Frequenzbereich" untersuchen kann.

## Aufgaben

5.10 Bestimme die Fourier-Transformierte von

$$\text{a) } f(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^t & \text{für } t < 0 \\ e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} -e^t & \text{für } t < 0 \\ e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

*Hinweis:* Benütze, dass  $f(t)$  gerade bzw. ungerade ist und verwende für die Integration eine Formelsammlung oder löse mit Hilfe eines CAS.

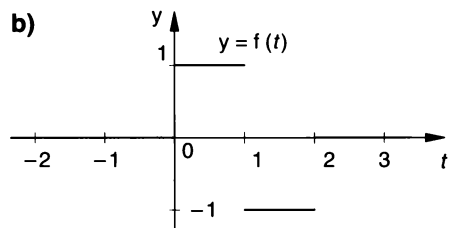
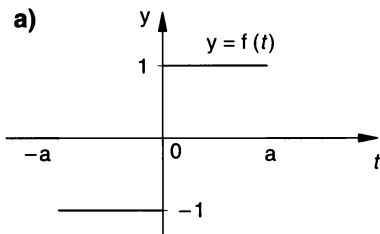
5.11 Bestimme die Fourier-Transformierte sowie die Amplitudendichte des Rechteckimpulses

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

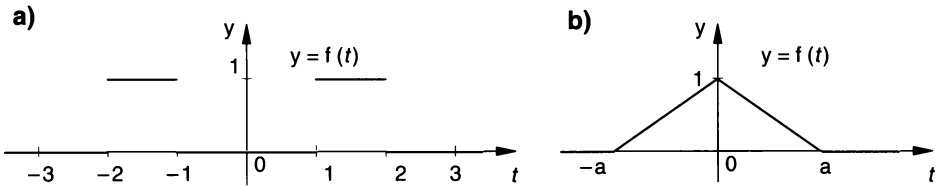
5.12 Bestimme die Fourier-Transformierte des folgenden einseitigen Exponentialimpulses:

$$\text{a) } f(t) = e^{-2t} \cdot \sigma(t) \quad \text{b) } f(t) = e^{-\frac{t}{3}} \cdot \sigma(t)$$

5.13 Die Funktion  $y = f(t)$  besteht aus zwei Rechteckimpulsen mit gegensätzlichen Vorzeichen. Bestimme ihre Fourier-Transformierte sowie die Amplitudendichte.



5.14 Gesucht ist die Fourier-Transformierte sowie die Amplitudendichte der Funktion  $f(t)$ .



5.15 Gesucht ist die Fourier-Transformierte der Funktion  $f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ .

5.16 Gegeben ist die Fourier-Transformierte  $F(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ . Wie lautet die zugehörige Zeitfunktion  $f(t)$ ?

*Hinweis:* Verwende das Fourier-Integral  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$ .

5.17 Wie lautet die Fourier-Transformierte der Sinusfunktion  $f(t) = \sin(2 \cdot t)$ ?

*Hinweis:*  $\sin(2t) = \frac{1}{2j} \cdot (e^{j \cdot 2t} - e^{-j \cdot 2t}) = e^{j \cdot 2t} \cdot \frac{1}{2j} \cdot 1 - e^{-j \cdot 2t} \cdot \frac{1}{2j} \cdot 1$

5.18 Bestimme die Fourier-Transformierte der Rechteckimpulsfolge  $f(t) = f_4(t)$  auf Seite 193.

*Hinweis:* Man kann von der Sinus-Kosinus-Form der Fourier-Reihe von  $f_4(t)$  auf Seite 192 ausgehen und darauf die Fourier-Transformation entsprechend Beispiel 5.11 anwenden.

5.19 Bestimme die Fourier-Transformierte der gedämpften Schwingung und ermittle numerisch die Maxima der Amplitudendichte

a)  $f(t) = 4 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) \cdot \sigma(t)$       b)  $f(t) = 2 \cdot e^{-4t} \cdot \cos(3t) \cdot \sigma(t)$

*Hinweis:* Setze in a)  $\sin \varphi = \frac{1}{2j} (e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi})$ , in b)  $\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi})$  und wende den Frequenzverschiebungssatz an.

5.20 Es soll die Amplitudendichte einer "einzigem" Kosinus-Schwingung mit  $\omega = 1$  bestimmt werden:

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } -\pi \leq t < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion lässt sich als Produkt  $r(t) \cdot \cos t$  schreiben, das auf der gesamten Zeitachse definiert ist; dabei ist  $r(t)$  der symmetrische Rechteckimpuls der Länge  $2\pi$  und der Höhe 1. Man betrachtet damit die auf der gesamten Zeitachse definierte Kosinusfunktion nur in einem "Fenster" zwischen  $-\pi$  und  $\pi$ . Benütze zur Lösung, dass die Fourier-Transformierte von  $r(t)$  gleich ist  $R(j\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\pi\omega)$  (siehe Beispiel 5.7, Seite 198). Dann kann man schreiben:  $f(t) = r(t) \cdot \cos t = \frac{1}{2} (e^{jt} + e^{-jt}) \cdot r(t)$ . Wende nun den Frequenzverschiebungssatz an!

## 5.4 Die Laplace-Transformation

Die Fourier-Transformation ist von zentraler Bedeutung für die Systemtheorie. Dies liegt u.a. daran, dass sie einen anschaulichen Zusammenhang zwischen einer Zeitfunktion  $f(t)$  und ihrem Frequenzspektrum vermittelt. Dabei ist es von Vorteil, dass die Fourier-Transformation "zweiseitig" ist, d.h. sie erstreckt sich über die gesamte Zeitachse ( $-\infty < t < +\infty$ ) bzw. Frequenzachse ( $-\infty < \omega < +\infty$ ).

Für andere Aufgabenstellungen in der Systemtheorie ist jedoch die zweiseitige Fourier-Transformation weniger günstig:

- Bei *Einschaltvorgängen* interessiert in der Regel nur das Verhalten ab einem bestimmten Zeitpunkt, zu dem etwa ein Eingangssignal auf ein System zu wirken beginnt. Dieser Einschaltzeitpunkt wird mit  $t = 0$  festgelegt, so dass nur Zeiten ab  $t = 0$  bedeutsam sind. Vielfach werden daher auch nur Funktionen  $f(t)$  betrachtet, die für  $t < 0$  identisch null sind.
- Zudem ist die Fourier-Transformierte selbst einfachster Funktionen, wie jene der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  oder der Sinusfunktion, nicht mehr eine Funktion im gewöhnlichen Sinn ist, sondern wie der Delta-Impuls  $\delta(t)$  eine sogenannte verallgemeinerte Funktion.

Eine gute Alternative zur Fourier-Transformation bietet besonders für Einschaltvorgänge die einseitige *Laplace*<sup>16</sup>-*Transformation*. Einseitig deswegen, weil sie sich nur auf Zeiten  $t \geq 0$  erstreckt. Der rechentechnische Nutzen der Laplace-Transformation ist in einigen einfachen Regeln begründet, die es zusammen mit einer Tabelle ermöglichen, ohne Integralrechnung auszukommen.

### Definition der Laplace-Transformation

Ist die Funktion  $f(t)$  auf der gesamten Zeitachse  $t \in \mathbb{R}$  definiert mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ , so heißt

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

(wenn das Integral existiert) **Laplace-Transformierte** von  $f(t)$ .

### Bemerkungen:

- (1) Die dahinterstehende Idee ist, die Funktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  noch mit dem Faktor  $e^{-\sigma t}$ ,  $\sigma$  ist eine positive reelle Zahl, zu multiplizieren und dann die Funktion  $f(t) \cdot e^{-\sigma t}$  einer Fourier-Transformation zu unterwerfen. Wegen  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  braucht ferner die Integration nur noch von  $t = 0$  bis  $t = \infty$  erstreckt werden, wodurch der Faktor  $e^{-\sigma t}$  zu einem *Dämpfungsfaktor* wird. Es liegt nun wieder eine Integraltransformation der Funktion  $f(t)$  vor, die durch den zusätzlichen Faktor ihr Konvergenzverhalten gegenüber der Fourier-Transformation entscheidend verbessert. Die neue Transformation lautet dann:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cdot e^{-\sigma t}\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\sigma+j\omega)t} dt.$$

Setzt man nun  $s = \sigma + j\omega$ , so liegt die Laplace-Transformierte von  $f(t)$  vor.

Die Zahl  $\sigma$  hat nichts mit der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  zu tun. Weiters wird statt des Buchstaben  $s$  in der Literatur oft der Buchstabe  $p$  verwendet.

<sup>16</sup> Pierre Simon LAPLACE (1749 – 1827), französischer Mathematiker und Astronom

- (2) Wie bei der Fourier-Transformation wird der gleiche Buchstabe  $F$  verwendet, als Argument steht jedoch die (komplexe) Variable  $s$ . Auch die folgenden Schreibweisen sind üblich:  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  oder  $f(t) \xrightarrow{\circlearrowright} F(s)$ .

Das Hantelsymbol  $\xrightarrow{\circlearrowright}$  drückt wieder aus, dass  $f(t)$  und  $F(s)$ , obwohl im Allgemeinen völlig verschieden, zusammengehören, einander entsprechen (korrespondieren); es wird daher das *Korrespondenzsymbol* genannt.

Ist  $f(t)$  stückweise stetig (d.h. beschränkt und an höchstens endlich vielen Stellen nicht stetig), so ist  $f(t)$  bis auf die Funktionswerte in den Unstetigkeitsstellen eindeutig durch  $F(s)$  bestimmt.

- (3) Man sagt, dass die Zeitfunktionen  $f(t)$  im **Original-** oder **Zeitbereich** liegen, während ihre Laplace-Transformierten im **Bildbereich** (statt Frequenzbereich bei der Fourier-Transformation) liegen.
- (4) Obwohl  $s$  eine komplexe Variable ist, genügt es für die weiteren Überlegungen,  $s$  auf die reellen Zahlen zu beschränken.

- (5) Um beispielsweise die abschnittsweise Definitionen  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$  zu vermeiden, schreibt man mit Hilfe der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  auch  $f(t) = e^{-2t} \cdot \sigma(t)$ . *In der Praxis wird jedoch der Faktor  $\sigma(t)$  in der Regel weggelassen, was auch im Folgenden vereinbart wird.* Beispielsweise bedeutet in diesem Sinne die Angabe  $f(t) = e^{-2t}$  nur die Definition der Funktion  $f(t)$  für  $t \geq 0$ ; für  $t < 0$  ist  $f(t) = 0$ .

**Beispiel 5.12 : Laplace-Transformationen**

Bestimme die Laplace-Transformierte von ( $f(t) = 0$  für  $t < 0$ ):

- a)  $f(t) = 1$ , also  $f(t) = \sigma(t)$       b)  $f(t) = \delta(t - a)$ ,  $a \geq 0$       c)  $f(t) = e^{-t}$   
 d)  $f(t) = t$       e)  $f(t) = \sin t$

**Lösung**

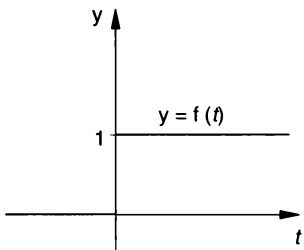


Abb. 5.51

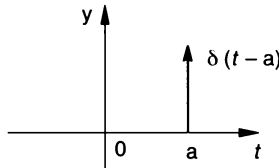


Abb. 5.52

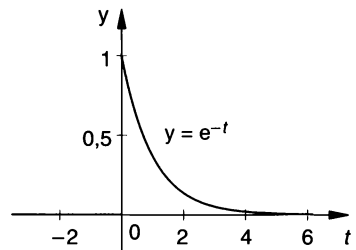


Abb. 5.53

Zu a) Abb. 5.51

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot b} \right) - \left( -\frac{1}{s} \right).$$

Der Grenzwert und damit das Integral existiert nur, wenn  $s > 0$  ist:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot b} \right) + \frac{1}{s} = 0 + \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

Man schreibt kurz:  $1 \xrightarrow{\circlearrowright} \frac{1}{s}$  mit  $s > 0$ . Was ist, wenn  $s = 0$  oder  $s < 0$  wäre?

Zu b) Abb. 5.52

Auf Grund der Ausblendeigenschaft des Delta-Impulses (Seite 189) ergibt sich

$$F(s) = \int_0^{\infty} \delta(t - a) e^{-s \cdot t} dt = e^{-a \cdot s}.$$

Speziell für  $a = 0$  ergibt die Laplace-Transformierte von  $\delta(t)$ :  $F(s) = 1$ : d.h.  $\delta(t) \rightarrow 1$ .

Zu c) Abb. 5.53

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1) \cdot t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s+1} \cdot e^{-(s+1) \cdot t} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{s+1} \cdot e^{-(s+1) \cdot b} \right) + \frac{1}{s+1} = 0 + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert nur, wenn  $s > -1$  ist.

Kurzschreibweise:  $e^{-t} \rightarrow \frac{1}{s+1}$  mit  $s > -1$ .

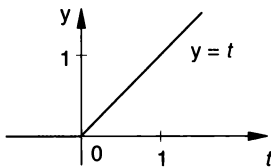


Abb. 5.54

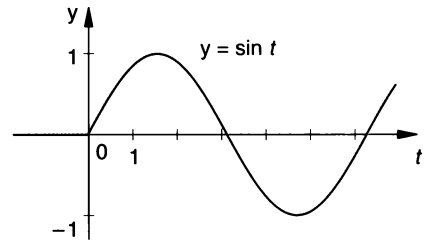


Abb. 5.55

Zu d) Abb. 5.54

Partielle Integration mit  $u = t$ ,  $u' = 1$  und  $v' = e^{-s \cdot t}$ ,  $v = -\frac{1}{s} e^{-s \cdot t}$  ergibt:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} t e^{-s \cdot t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -t \cdot \frac{1}{s} e^{-s \cdot t} \right]_0^b - \int_0^{\infty} 1 \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} dt = \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} b \cdot e^{-s \cdot b} + 0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} dt. \end{aligned}$$

Berechnung des Grenzwertes für  $s > 0$ :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b \cdot e^{-s \cdot b} = \infty \cdot 0 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^{s \cdot b}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s \cdot e^{s \cdot b}} = 0 \quad (\text{Regel v. de l'Hospital})$$

Berechnung des verbleibenden Integrals:

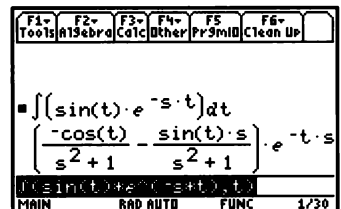
$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-s \cdot t} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}, \text{ wenn } s > 0.$$

Damit erhält man schließlich:  $F(s) = \frac{1}{s^2}$ . Kurzschreibweise:  $t \rightarrow \frac{1}{s^2}$  mit  $s > 0$ .

Zu e) Abb. 5.52

Zur Berechnung von  $F(s) = \int_0^{\infty} \sin t e^{-s \cdot t} dt$  benutzen

wir, dass  $\int \sin t \cdot e^{-s \cdot t} dt = -\frac{e^{-s \cdot t}}{s^2 + 1} (\cos t + s \cdot \sin t)$ :



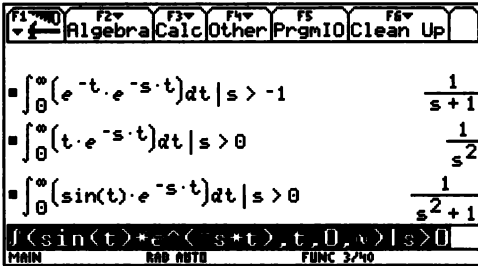
Für  $s > 0$  ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} \sin t \cdot e^{-s \cdot t} dt = \left[ -\frac{e^{-s \cdot t}}{s^2 + 1} (\cos t + s \cdot \sin t) \right]_0^{\infty} =$$

$$= 0 - \left( -\frac{e^0}{s^2 + 1} (\cos 0 + s \cdot \sin 0) \right) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Kurzschreibweise:  $\sin t \xrightarrow{s > 0} \frac{1}{s^2 + 1}$

Voyage 200



Wesentlich ist, die Variable  $s$  so einzuschränken, dass das Integral konvergent ist.

MC

1 laplace,  $t \rightarrow \frac{1}{s}$      $e^{-t}$  laplace,  $t \rightarrow \frac{1}{(s + 1)}$   
 $t$  laplace,  $t \rightarrow \frac{1}{s^2}$      $\sin(t)$  laplace,  $t \rightarrow \frac{1}{(s^2 + 1)}$

Nach Eintippen des für  $t \geq 0$  geltenden Funktionsterms klickt man auf die Schaltfläche laplace der Symbolik-Palette. In den Platzhalter wird die Variable, hier  $t$ , eingetragen.

ML

```
>> syms t; laplace(sin(t))
ans =
1/(s^2+1)
```

**Zusammenhang zwischen Laplace- und Fourier-Transformation:**

Es seien  $f(t)$  eine Funktion mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ ,  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  ihre Laplace-Transformierte und  $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  ihre Fourier-Transformierte. Wir lassen nun für die Variable  $s$  von  $F(s)$  auch komplexe Werte zu. Dann kann die Fourier-Transformierte  $F(j\omega)$  von  $f(t)$  durch die Laplace-Transformierte  $F(s)$  von  $f(t)$  ausgedrückt werden (wenn  $F(s)$  auf der imaginären Achse  $s = j \cdot \omega$  konvergent ist) :

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$$

Für Funktionen mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  kann daher die Fourier-Transformation als Spezialfall der Laplace-Transformation für  $\text{Re}(s) = 0$  betrachtet werden. Durch diesen Zusammenhang wird auch die Definition der Fourier-Transformierten auf der imaginären Achse verständlich.

Laplace-Transformierte werden wie in der technischen Literatur gebräuchlich mit demselben Buchstaben  $F$  bezeichnet, obwohl es sich um verschiedene Funktionen handelt. Welche der beiden Transformierten gemeint ist, kann am Argument  $j\omega$  bzw.  $s$  erkannt werden.

**Beispiel 5.13 : Fourier- und Laplace-Transformation**

Bestimme aus der Kenntnis der Laplace-Transformierten von  $f(t) = e^{-t}$  die Fourier-Transformierte von  $f(t)$ .

**Lösung**

Nach Beispiel 5.12, Seite 208, ist  $F(s) = \frac{1}{s+1}$ . Setzt man  $s = j \cdot \omega$ , so erhält man die Fourier-Transformierte von  $f(t) = e^{-t}$  in Übereinstimmung mit Beispiel 5.8, Seite 200:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}.$$

Dies gilt für  $s > -1$ , so dass sich die imaginäre Achse noch im Konvergenzbereich der Laplace-Transformation befindet.

Es sollen nun einige einfache Sätze im Umgang mit der Laplace-Transformation zusammengestellt werden. Zusammen mit Korrespondenztabelle ermöglichen sie es, *in der Praxis völlig auf Integrationen zu verzichten!*

Wir nehmen die Korrespondenzen  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$  und  $g(t) \longleftrightarrow G(s)$  an.

**Summenregel:**  $f(t) + g(t) \longleftrightarrow F(s) + G(s)$ .

Eine Summe von Funktionen kann gliedweise transformiert werden. Dies folgt unmittelbar aus der Summenregel der Integration.

**Faktorregel:** Ist  $a$  eine beliebige Konstante, so gilt:  $a \cdot f(t) \longleftrightarrow a \cdot F(s)$ .

Beide Regeln folgen unmittelbar aus den gleich genannten Regeln der Integration. Zusammen werden sie auch als **Linearitätseigenschaft** der Laplace-Transformation bezeichnet.

**Beispiel 5.14 : Summen- und Faktorregel (Linearität)**

a)  $f(t) = 2 + 5 \cdot t$ ;  $F(s) = ?$

b)  $f(t) = 7 \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin t$ ;  $F(s) = ?$

**Lösung**

Zu a)  $F(s) = \mathcal{L}\{2 + 5 \cdot t\} = \mathcal{L}\{2\} + \mathcal{L}\{5 \cdot t\} = \mathcal{L}\{2\} + 5 \cdot \mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s} + 5 \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2s + 5}{s^2}$

Zu b)  $F(s) = \mathcal{L}\{7 \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin t\} = 7 \cdot \mathcal{L}\{e^{-t}\} - 3 \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{7}{s+1} - \frac{3}{s^2+1} =$   

$$= \frac{7s^2 - 3s + 4}{(s+1) \cdot (s^2+1)}$$



**Dämpfungssatz:** Ist  $a$  eine beliebige Konstante, so gilt:  $e^{-a \cdot t} \cdot f(t) \longleftrightarrow F(s + a)$ .  
 Kurz: "Dämpfung  $\longleftrightarrow$  Verschiebung"

Dies folgt sofort, wenn man die Laplace-Transformierte von  $e^{-a \cdot t} \cdot f(t)$  bildet (Konvergenz vorausgesetzt):

$$\int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(s+a) \cdot t} dt = F(s + a).$$

Der Dämpfungsfaktor  $e^{-a \cdot t}$  im Zeitbereich bewirkt eine "Verschiebung" im Bildbereich. Dieser Satz findet Anwendung bei der Beschreibung von gedämpften Schwingungen, bei denen die Amplituden nach einer Exponentialfunktion abklingen.

**Beispiel 5.15 : Dämpfungssatz**

a)  $f(t) = e^{-2t}$ ;  $F(s) = ?$

b)  $f(t) = t \cdot e^{-2t}$ ;  $F(s) = ?$

c)  $f(t) = 2 \cdot e^{-3t} \cdot \sin t$ ;  $F(s) = ?$

d)  $\frac{3}{s^2 + 4s + 5}$ ;  $f(t) = ?$

**Lösung**

Zu a) Wir setzen  $e^{-2t} = e^{-2t} \cdot 1$ . Wegen  $1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$  ist  $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cdot 1\} = \frac{1}{s + 2}$ .

Zu b) Wegen  $t \longleftrightarrow \frac{1}{s^2}$  ist  $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cdot t\} = \frac{1}{(s + 2)^2}$ .

Zu c) Aufgrund der Faktorregel und wegen  $\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$  gilt:

$$\mathcal{L}\{2 \cdot e^{-3t} \cdot \sin t\} = 2 \cdot \frac{1}{(s + 3)^2 + 1} = \frac{2}{s^2 + 6s + 10}.$$

Zu d) Wir formen zuerst um:  $\frac{3}{s^2 + 4s + 5} = \frac{3}{s^2 + 4s + 4 + 1} = \frac{3}{(s + 2)^2 + 1}$ .

Wegen  $\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$  folgt daraus mit dem Dämpfungssatz  $f(t) = 3 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t$ .

**Zeitverschiebungssatz:** Ist  $a > 0$ , so gilt:  $f(t - a) \longleftrightarrow e^{-s \cdot a} F(s)$ .  
 Kurz: "Verschiebung  $\longleftrightarrow$  Dämpfung"

*Beweis:* Der Graph der Funktion  $f(t - a)$  entsteht durch Rechtsverschiebung des Graphen von  $f(t)$  um  $a$  (Abb. 5:56). Wir bilden die Laplace-Transformierte von  $f(t - a)$  und führen die lineare Substitution  $u = t - a$  durch. Dabei ergibt sich (Konvergenz vorausgesetzt):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t - a) \cdot e^{-s \cdot t} dt &= \int_a^{\infty} f(t - a) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-s \cdot (u+a)} du = \\ &= e^{-s \cdot a} \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-s \cdot u} du = e^{-s \cdot a} F(s) \end{aligned}$$

Dabei war zu berücksichtigen, dass  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  ist, woraus folgt, dass  $f(t - a) = 0$  für  $t < a$  ist.



Abb. 5.56 Zum Zeitverschiebungssatz

Eine Verschiebung im Zeitbereich nach rechts (also eine zeitliche Verzögerung) bewirkt also eine Multiplikation im Bildbereich mit  $e^{-s \cdot a}$ , d.h eine "Dämpfung" im Bildbereich.

**Beispiel 5.16 : Zeitverschiebungssatz**

- a)  $f(t) = \sigma(t - a)$ ,  $a \geq 0$ ;  $F(s) = ?$  (Abb. 5.57)
- b)  $f(t) = \sin(t - 1) \cdot \sigma(t - 1)$ ;  $F(s) = ?$  (Abb. 5.58)
- c) Rechteckfunktion (Rechteckimpuls):  $f(t) = \sigma(t) - \sigma(t - a)$  mit  $a > 0$  (Abb. 5.59)
- d) Rechteckschwingung (Folge von Rechteckimpulsen):  
 $f(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \frac{T}{2}) + \sigma(t - T) - \sigma(t - \frac{3T}{2}) + \dots$  mit  $T > 0$  (Abb. 5.60)
- e)  $F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-2s}$ ;  $f(t) = ?$

**Lösung**

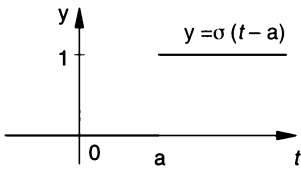


Abb. 5.57 Graph von  $\sigma(t)$  um a verschoben

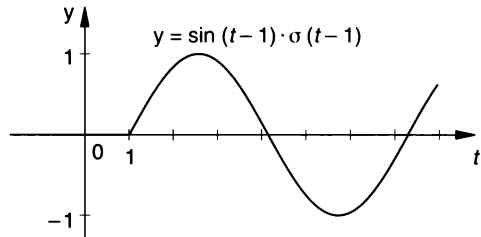


Abb. 5.58 Einschaltzeitpunkt um a = 1 verzögert

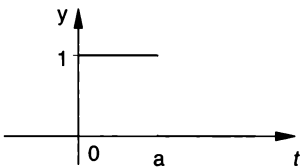


Abb. 5.59 Rechteckimpuls

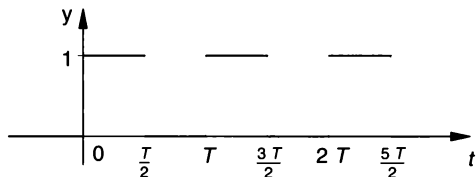


Abb. 5.60 Rechteckimpulsfolge mit der Periode T

Zu a) Wegen  $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$  folgt für  $a > 0$  aufgrund des Zeitverschiebungssatzes

$$\mathcal{L}\{\sigma(t - a)\} = e^{-a \cdot s} \frac{1}{s}.$$

Zu b) Wegen  $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$  folgt für eine Verschiebung  $a = 1$  nach rechts:

$$\mathcal{L}\{\sin(t - 1) \cdot \sigma(t - 1)\} = e^{-s} \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Da  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ , ist  $t = 0$  für die Laplace-Transformation technisch der Einschaltzeitpunkt für einen durch die Funktion  $f(t)$  beschriebenen Vorgang. Die Funktion  $f(t - a) \cdot \sigma(t - a)$  beschreibt für  $a > 0$  einen Vorgang, dessen Einschaltzeitpunkt um a verzögert ist.

Zu c) Aufgrund der Summenregel und des Zeitverschiebungssatzes gilt:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t) - \sigma(t-a)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} - \mathcal{L}\{\sigma(t-a)\} = \frac{1}{s} - e^{-a \cdot s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-a \cdot s}).$$

Zu d) Wir wenden wieder die auch für unendliche Reihen gültige Summenregel sowie den Zeitverschiebungssatz an:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sigma(t)\} - \mathcal{L}\{\sigma(t - \frac{T}{2})\} + \mathcal{L}\{\sigma(t - T)\} - \mathcal{L}\{\sigma(t - \frac{3T}{2})\} + \dots = \\ &= \frac{1}{s} - e^{-\frac{T \cdot s}{2}} \frac{1}{s} + e^{-T \cdot s} \frac{1}{s} - e^{-\frac{3T \cdot s}{2}} \frac{1}{s} + \dots = \\ &= \frac{1}{s} \left[ 1 - e^{-\frac{T \cdot s}{2}} + \left(e^{-\frac{T \cdot s}{2}}\right)^2 - \left(e^{-\frac{T \cdot s}{2}}\right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Hier liegt eine unendliche geometrische Reihe mit dem Quotienten  $q = -e^{-\frac{T \cdot s}{2}}$  vor ("Ingenieur-Mathematik 3", Seite 43). Eine solche Reihe konvergiert, wenn  $|q| < 1$  ist. Dies ist wegen der Voraussetzung  $s > 0$  für  $T > 0$  der Fall.

$$\text{Da } 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

erhält man  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + e^{-\frac{T \cdot s}{2}}}$  als Laplace-Transformierte der gegebenen Rechteckimpulsfolge.

Zu e) Liest man den Zeitverschiebungssatz von rechts nach links, so folgt aus  $\frac{1}{s^2} \xrightarrow{\circlearrowright} t$ :

$$e^{-2s} \frac{1}{s^2} \xrightarrow{\circlearrowright} (t-2) \cdot \sigma(t-2)$$

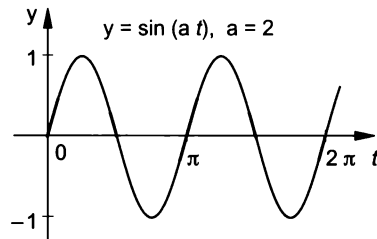
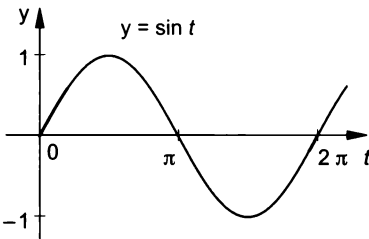


Abb. 5.61 Funktion  $f(t)$  und "gestauchte" Funktion  $f(a \cdot t)$ ,  $a > 1$

**Ähnlichkeitssatz** (Zeitdehnung bzw. -streckung): Ist  $a > 0$ , so gilt:  $f(a \cdot t) \xrightarrow{\circlearrowright} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ .

**Beweis:** Wir bilden die Laplace-Transformierte von  $f(a \cdot t)$  und führen die lineare Substitution  $u = a \cdot t$  durch. Dabei ergibt sich (Konvergenz vorausgesetzt):

$$\int_0^{\infty} f(a \cdot t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-\frac{s \cdot u}{a}} \cdot \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-\left(\frac{s}{a}\right) \cdot u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Die Funktion  $f(a \cdot t)$  entsteht aus der Funktion  $f(t)$  durch Dehnung ( $0 < a < 1$ ) oder durch eine Stauchung ( $a > 1$ ) auf der Zeitachse (Abb. 5.61)

Interpretation für  $a > 1$ : Läuft im Zeitbereich ein Vorgang  $y = f(t)$  als Vorgang  $y = f(a \cdot t)$  mit erhöhter Geschwindigkeit ab, kommt es also zu einer Stauchung des Funktionsgraphen, so entspricht dies im Bildbereich einer Stauchung der F-Werte und einer Dehnung des Graphen von F in s-Richtung, jeweils im gleichen Ausmaß.

**Beispiel 5.17 : Ähnlichkeitssatz**

In Beispiel 5.13, Seite 211, wurde gezeigt, dass  $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ . Ermittle daraus mit dem Ähnlichkeitssatz die Laplace-Transformierte von  $f(t) = \sin(\omega t)$ .

**Lösung**

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

**Differentiationssatz:** Sind  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $f''(t)$ ,  $f'''(t)$ , ... an der Stelle  $t = 0$  stetig, so gilt:

$$f'(t) \longleftrightarrow s \cdot F(s) - f(0)$$

$$f''(t) \longleftrightarrow s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \longleftrightarrow s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$$

usw.

*Beweis:*  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt.$

Partielle Integration mit  $u(t) = e^{-s \cdot t}$ ,  $u'(t) = -s \cdot e^{-s \cdot t}$  und  $v'(t) = f'(t)$ ,  $v(t) = f(t)$  ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_0^b + s \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot b} - f(0) + s \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \\ &= 0 - f(0) + s \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = -f(0) + s \cdot F(s). \end{aligned}$$

**Der Ableitung einer Zeitfunktion  $f(t)$  entspricht also im Bildbereich einer Multiplikation ihrer Bildfunktion  $F(s)$  mit  $s$  gefolgt von der Subtraktion von  $f(0)$ .** Eine verhältnismäßig komplizierte Operation wie das Differenzieren wird also im Bildbereich sehr vereinfacht. Diesem Sachverhalt verdankt die Laplace-Transformation ihre Anwendung beim Lösen von Anfangswertaufgaben bei Differentialgleichungen: Eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wird durch die Laplace-Transformation in eine algebraische Gleichung für die gesuchte Funktion übergeführt (eine algebraische Gleichung enthält auf die Gleichungsvariable bezogen nur die vier Grundrechnungsarten). In diese Gleichung gehen auch die Anfangswerte ein.

*Anmerkung:* Wir haben beim Differentiationssatz Stetigkeit an der Stelle 0 vorausgesetzt. Viele Funktionen mit  $t = 0$  für  $t < 0$  weisen jedoch an dieser Stelle ein sprungförmiges Verhalten auf (etwa die Sprungfunktion  $\sigma(t)$ ). Auch in diesem Fall kann der Differentiationssatz angewendet werden. Es muss jedoch sichergestellt sein, dass mit  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , ... die Werte "nach dem Sprung" gemeint sind, um ein stetiges Anschließen von  $f(t)$ ,  $f'(t)$ , ... an diese Anfangswerte zu gewährleisten. Daher schreibt man in diesem Fall sicherheitshalber statt  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , ... die rechtsseitigen Grenzwerte  $f(0+)$ ,  $f'(0+)$ , ..., die ja nicht mit den entsprechenden Funktionswerten  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , ... an diesen Stellen übereinstimmen müssen.

**Beispiel 5.18 : Differentiationssatz**

- a) Ermittle die Laplace-Transformierte von  $y' + 3 \cdot y$  bei  $y(0) = 1$ , wenn  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  ist.  
 b) Zeige mit dem Differentiationssatz, dass  $\mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\} = \frac{1}{s-a}$ .

**Lösung**

Zu a)  $\mathcal{L}\{y' + 3y\} = s \cdot Y(s) - y(0) + 3 \cdot Y(s) = (s+3) \cdot Y(s) - 1$ .

Zu b)  $\mathcal{L}\{(e^{a \cdot t})'\} = s \cdot \mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\} - e^{a \cdot 0} = s \cdot \mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\} - 1$ . Verwendet man in dieser Gleichung noch, dass  $\mathcal{L}\{(e^{a \cdot t})'\} = \mathcal{L}\{a \cdot e^{a \cdot t}\}$  ist (Faktorregel), so ergibt sich sofort  $\mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\} = \frac{1}{s-a}$ .

Besonders in elektrotechnischen Anwendungen können in Gleichungen neben Ableitungen auch Integrale auftreten. Wie eine Differentiation führt auch eine Integration im Zeitbereich auf eine algebraische Operation im Bildbereich. Dies besagt der Integrationsatz, der ohne Beweis angeführt wird.

$$\text{Integrationsatz: } \int_0^t f(\tau) \, d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} \cdot F(s).$$

**Beispiel 5.19 : Integrationsatz**

Im Beispiel 5.12 wurde gezeigt, dass  $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ . Zeige mit dem Integrationsatz, dass daraus  $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$  folgt.

**Lösung**

Wir stellen zuerst fest, dass  $\int_0^t \sin \tau \, d\tau = [-\cos \tau]_0^t = -\cos t + 1$ .

Somit kann geschrieben werden:  $\mathcal{L}\{1 - \cos t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin \tau \, d\tau\right\}$

Anwendung der Summenregel auf der linken Seite der Gleichung und des Integrationsatzes auf der rechten Seite ergibt:

$$\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{s} - \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

$$\text{Daraus: } \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+1-1}{s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}.$$

Kennt man die Bildfunktion  $F(s)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$  und interessiert nur der Anfangswert  $f(0)$  sowie das Verhalten von  $f(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  ("Endwert"), so erspart man sich mit dem folgenden Satz die oft aufwendige Rücktransformation aus dem Bildbereich. Die Existenz der Grenzwerte vorausgesetzt gilt nämlich, was nicht begründet wird:

**Anfangs- und Endwertsatz:**

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s)] \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s)].$$

Stimmt bei einer Funktion  $f(t)$  mit einem Sprung an der Stelle  $t = 0$  der Funktionswert  $f(0)$  nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert  $f(0+)$  überein, so ist  $f(0)$  durch  $f(0+)$  zu ersetzen.

**Beispiel 5.20 : Anfangs- und Endwertsatz**

$$F(s) = \frac{3}{s+2}; \quad f(0) = ? \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = ?$$

**Lösung**

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s}{s+2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{2}{s}} = 3; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s+2} = \frac{3 \cdot 0}{0+2} = 0.$$

Eine hier leicht mögliche Rücktransformation bestätigt die Ergebnisse:

$$F(s) = \frac{3}{s+2} \longleftrightarrow f(t) = 3 \cdot e^{-2t}; \quad f(0) = 3 \cdot e^{-2 \cdot 0} = 3; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Die folgende Tabelle fasst die besprochenen Sätze zusammen.

<b>Sätze zur Laplace-Transformation: <math>f(t) \longleftrightarrow F(s)</math>, <math>g(t) \longleftrightarrow G(s)</math></b>		
1	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \longleftrightarrow a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$	Linearität
2	$e^{-at} \cdot f(t) \longleftrightarrow F(s+a)$	Dämpfungssatz
3	$f(t-a) \longleftrightarrow e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$ , $a > 0$	Zeitverschiebungssatz
4	$f(a \cdot t) \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ , $a > 0$	Ähnlichkeitssatz
5	$f'(t) \longleftrightarrow s \cdot F(s) - f(0)$ $f''(t) \longleftrightarrow s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$ , usw.	Ableitungssatz
6	$\int_0^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} \cdot F(s)$	Integrationsatz
7	$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s)]$ , $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s)]$	Anfangs- und Endwertsatz

**Rücktransformation aus dem Bildbereich**

Dies ist im allgemeinen Fall der schwierigste Schritt, da er Kenntnisse aus der Funktionentheorie (Theorie *komplexer* Funktionen) voraussetzt. In praktischen Aufgabenstellungen gelingt die Rücktransformation jedoch in der Regel mit Hilfe von (umfangreichen) Korrespondenztabelle. Dazu kommt noch, dass in den Anwendungen Bildfunktionen häufig rationale Funktionen von  $s$  sind, die gegebenenfalls durch eine **Partialbruchzerlegung** als Summe von einfachen Brüchen dargestellt werden können (siehe gegebenenfalls "Ingenieur-Mathematik 3", Seite 214 ff.)

**Zur Erinnerung** ("Ingenieur-Mathematik 3", Seite 214 ff): **Was sind Partialbrüche?**

Ausgangspunkt für die Partialbruchzerlegung sind stets rationale Terme (Polynom im Zähler wie auch im Nenner), bei denen der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist. Ist dies nicht der Fall, wird eine Polynomdivision durchgeführt.

Beispiele für Partialbrüche:

$$\frac{1}{s-3}, \frac{1}{(s+3)^2}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^2+4s+13}, \frac{1}{s^2+8s+17}, \frac{s}{s^2+4s+13}$$

Die quadratischen Terme in den Nennern der letzten drei Brüche besitzen keine reellen Nullstellen.

Keine Partialbrüche sind die folgenden Brüche (sie können in Partialbrüche zerlegt werden):

$$\frac{s}{(s+3)^2} = \frac{1}{(s+3)} - \frac{3}{(s+3)^2}$$

$$\frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3} \quad (\text{der Nenner besitzt reelle Nullstellen, nämlich } -1 \text{ und } -3);$$

$$\frac{s}{s^2+4s+3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{s^2}{s^2+4s+3} = 1 - \frac{4s+3}{s^2+4s+3} = 1 - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} \quad (\text{zuerst Polynomdivision!}).$$

$$\frac{1}{(s^2+4s+5) \cdot (s^2+1)} = \frac{s+3}{8(s^2+4s+5)} - \frac{s-1}{8(s^2+1)}$$

**Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation**

Nr.	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t), t \geq 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	1, $\sigma(t)$
3	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t$
5	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$
6	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin(at)$
7	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
8	$\frac{1}{(s+b)^2+a^2} = \frac{1}{s^2+2bs+b^2+a^2}$	$\frac{1}{a} e^{-bt} \sin(at)$
9	$\frac{s}{(s+b)^2+a^2} = \frac{s}{s^2+2bs+b^2+a^2}$	$e^{-bt} \left[ \cos(at) - \frac{b}{a} \sin(at) \right]$
10	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
11	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^2} \left[ \frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at) \right]$
12	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(at)$

### Beispiel 5.21 : Rücktransformation

Ermittle die Zeitfunktion  $f(t)$  zu folgender Bildfunktion  $F(s)$ :

a)  $F(s) = \frac{2}{s} - \frac{5}{s^2}$

b)  $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$

c)  $F(s) = \frac{3}{(s+2)^2}$

d)  $F(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$

e)  $F(s) = \frac{s+7}{s^2+4s-5}$

f)  $F(s) = \frac{2s+3}{s^3+4s^2+3s}$

g)  $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+13}$

h)  $F(s) = \frac{3s+26}{s^3+4s^2+13s}$

i)  $F(s) = \frac{2s}{3s^2+12s+39}$

#### Lösung

Zu a) Wegen  $\frac{1}{s} \longleftrightarrow 1$  (Korrespondenz 2) und  $\frac{1}{s^2} \longleftrightarrow t$  (Korrespondenz 4) folgt mit der Summen- und Faktorregel:  $f(t) = 2 - 5t$ .

Zu b)  $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+4} + 3 \cdot \frac{s}{s^2+4}$ .

Aufgrund der Korrespondenzen 7 und 6 ergibt sich  $f(t) = 2 \cdot \cos(2t) + \frac{3}{2} \cdot \sin(2t)$ .

Zu c) Korrespondenz 5 mit  $a = 2$ :  $f(t) = 3t \cdot e^{-2t}$

Zu d) Wir zerlegen die echt gebrochen rationale Bildfunktion in Partialbrüche:

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} \Rightarrow A = 1, B = -2.$$

Aufgrund der Korrespondenzen 3 und 5 ist  $f(t) = e^{-2t} - 2t \cdot e^{-2t} = (1 - 2t) \cdot e^{-2t}$ .

Zu e) Nullstellen des Nenners:  $s^2 + 4s - 5 = 0 \Rightarrow s_1 = 1; s_2 = -5$ . Da diese reell sind, kann wie folgt in Partialbrüche zerlegt werden:

$$F(s) = \frac{s+7}{s^2+4s-5} = \frac{s+7}{(s-1)(s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+5} \Rightarrow A = \frac{4}{3}, B = -\frac{1}{3}.$$

Aufgrund der Korrespondenz 3 ist  $f(t) = \frac{4}{3} e^t - \frac{1}{3} e^{-5t}$ .

Zu f) Nullstellen des Nenners:  $s^3 + 4s^2 + 3s = s \cdot (s^2 + 4s + 3) = 0$ . Dieses Produkt ist null, wenn  $s$  oder  $s^2 + 4s + 3$  gleich null ist. Eine Nullstelle ist daher  $s_1 = 0$ .

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \Rightarrow s_2 = -1; s_3 = -3.$$

Da alle Nullstellen reell sind, kann wieder wie folgt in Partialbrüche zerlegt werden:

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^3+4s^2+3s} = \frac{2s+3}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 1.$$

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface. The top row of function keys (F1-F6) is visible. The main display area shows the command `expand((2*s+3)/(s^3+4*s^2+3*s))` and the result `1/s - 1/(2*(s+1)) - 1/(2*(s+3))`. The bottom status bar shows 'MAIN', 'RAD AUTO', and 'FUNC 1/30'.

Aufgrund der Korrespondenzen 2 und 3 ist  $f(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$ .



Zu g) Nullstellen des Nenners:  $s^2 + 4s + 13 = 0 \Rightarrow s_1 = -2 + 3j, s_2 = -2 - 3j$ .

Da die Nullstellen komplex sind, liegt bereits ein Partialbruch vor. Um in diesem Fall die Korrespondenzen 8 und 9 verwenden zu können, vergleichen wir im Nenner:

$$s^2 + 4s + 13 = s^2 + 2b \cdot s + b^2 + a^2 \Rightarrow 2b = 4 \text{ sowie } b^2 + a^2 = 13.$$

Daraus ergibt sich zuerst  $b = 2$  und danach durch Einsetzen für  $b$  in die zweite Gleichung:

$$2^2 + a^2 = 13; \text{ daraus } a^2 = 9 \text{ oder } a = 3 \text{ (man könnte auch } a = -3 \text{ nehmen).}$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Ergänzung auf ein volles Quadrat im Nenner:

$$s^2 + 4s + 13 = s^2 + 4s + 4 - 4 + 13 = (s + 2)^2 + 9,$$

woraus man beim Vergleich mit den Korrespondenzen 8 und 9 abliest:  $b = 2$  und  $a = 3$ .

Damit:

$$F(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 4s + 13} = \frac{2s + 3}{(s + 2)^2 + 9} = 2 \cdot \frac{s}{(s + 2)^2 + 3^2} + 3 \cdot \frac{1}{(s + 2)^2 + 3^2}.$$

Mit  $a = 3$  und  $b = 2$  in den erwähnten Korrespondenzen erhält man:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 e^{-2t} \left[ \cos(3t) - \frac{2}{3} \sin(3t) \right] + 3 \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(3t) = \\ &= 2 e^{-2t} \cos(3t) - \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(3t). \end{aligned}$$

Zu h) Nullstellen des Nenners:  $s^3 + 4s^2 + 13s = s(s^2 + 4s + 13) = 0$ . Da  $s^2 + 4s + 13 = 0$  komplexe Nullstellen hat (siehe g)), gibt es nur eine reelle Nullstelle  $s_1 = 0$ . Daher kann folgende Partialbruchzerlegung angesetzt werden:

$$F(s) = \frac{3s + 26}{s^3 + 4s^2 + 13s} = \frac{3s + 26}{s(s^2 + 4s + 13)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 13} \Rightarrow A = 2, B = -2, C = -5.$$

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 13} = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2 + 4s + 13} - \frac{5}{s^2 + 4s + 13}.$$

Anwendung der Korrespondenz 2 sowie wie in g) von 9 und 8 mit  $a = 3$  und  $b = 2$  ergibt:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cdot 1 - 2 e^{-2t} \left[ \cos(3t) - \frac{2}{3} \sin(3t) \right] - 5 \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(3t) = \\ &= 2 - 2 e^{-2t} \cos(3t) - \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(3t). \end{aligned}$$

Zu i) Um die Korrespondenz 9 verwenden zu können, hebt man im Nenner den Faktor 3 des quadratischen Gliedes  $3s^2$  heraus:

$$F(s) = \frac{2s}{3s^2 + 12s + 39} = \frac{2s}{3(s^2 + 4s + 13)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{s^2 + 4s + 13} = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{(s + 2)^2 + 3^2}.$$

$$\text{Somit: } f(t) = \frac{2}{3} e^{-2t} \left[ \cos(3t) - \frac{2}{3} \sin(3t) \right].$$

## Im Überblick: Die Laplace-Transformation

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$ , eine Funktion von  $s$ , heißt **Laplace-Transformierte** der Zeit-

funktion  $f(t)$ . Man schreibt auch:  $f(t) \rightarrow F(s)$  und nennt  $F(s)$  Bildfunktion zu  $f(t)$ . Sie ist eng mit der Fourier-Transformation verwandt. Während die Konvergenz des Integrals der Fourier-Transformation nur von  $f(t)$  abhängt, erhält die Zeitfunktion  $f(t)$  bei der Laplace-Transformation einen Dämpfungsfaktor, wodurch die Konvergenz im üblichen Sinn deutlich verbessert wird.

Die Laplace-Transformation wird zur Lösung von Problemen mit einem einseitigen Definitionsbereich  $[0, \infty[$  herangezogen. Dazu gehören im Besonderen **Einschaltvorgänge**.

Durch Verwendung einer Reihe von **Sätzen** und **Korrespondenztabelle**n kann beim Arbeiten mit der Transformation wie auch bei der Rücktransformation praktisch ganz auf die Integration verzichtet werden. Dies wird wesentlich dadurch ermöglicht, dass Bildfunktionen in der Praxis oft **rationale Funktionen** sind, die durch eine **Partialbruchzerlegung** vereinfacht werden können.

Der **Ableitungssatz** führt die Ableitungen  $f'(t)$ ,  $f''(t)$ , ... der Zeitfunktion  $f(t)$  auf einfache Multiplikationen ihrer Bildfunktion mit  $s$ ,  $s^2$ , usw. unter Einbeziehung der Anfangswerte  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , usw. zurück. Diese Eigenschaft macht die Laplace-Transformation besonders geeignet zur Lösung von **Anfangswertaufgaben** bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

## Aufgaben

5.21 Ermittle die Laplace-Transformierte durch Integration:

a)  $f(t) = 3$

b)  $f(t) = e^t$

c)  $f(t) = 2 \cdot (1 - e^{-t})$

5.22 Ermittle mit Hilfe einer Korrespondenztabelle die Laplace-Transformierte folgender Funktion  $f(t)$ :

a)  $f(t) = 2t$

b)  $f(t) = t - 3$

c)  $f(t) = 4t^2$

d)  $f(t) = 2 \cdot e^{-3t}$

e)  $f(t) = 5 \cdot (1 - e^{-t})$

f)  $f(t) = 3 - t + 2 \cdot e^{3t}$

g)  $f(t) = 2 \cdot \sin 3t$

h)  $f(t) = 3 \cdot \cos 4t$

i)  $f(t) = \cos(3t + \pi)$

j)  $f(t) = 5 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-4t}$

k)  $f(t) = \sinh t$

l)  $f(t) = \cosh(2t)$

5.23 Ermittle mit Hilfe einer Korrespondenztabelle die Laplace-Transformierte von:

a)  $f(t) = 4t \cdot e^{-t}$

b)  $f(t) = 2t^2 \cdot e^{-4t}$

c)  $f(t) = t \cdot \sin(2t)$

d)  $u(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-2t})$

e)  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$

f)  $i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}$

g)  $i(t) = \frac{U_0}{L\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t)$

5.24 Ermittle mit Hilfe einer Korrespondenztabelle die Laplace-Transformierte von:

a)  $f(t) = \sin^2 t$

b)  $f(t) = \cos^2 t$

*Hinweis:* Drücke  $f(t)$  durch  $\cos 2t$  aus.

5.25 Bestimme mit Hilfe des Dämpfungssatzes die Laplace-Transformierte von:

a)  $f(t) = t \cdot e^{-t}$

b)  $f(t) = t^2 \cdot e^{-2t}$

c)  $f(t) = e^{-t} \cdot \sin 2t$

d)  $f(t) = e^{-2t} \cdot \cos 3t$

5.26 Find the Laplace transform of the function:

a)  $f(t) = \begin{cases} 2, & 1 \leq t < 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

b)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$

c)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin 2t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

d)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

e)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2-t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

f)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 3-t, & 1 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$

**5.27** Zeichne den Graphen von  $f(t) = \sin[2 \cdot (t - 0,5)] \cdot \sigma(t - 0,5)$  und ermittle die Laplace-Transformierte von  $f(t)$ .

**5.28** Zeichne den Graphen der Funktion  $f(t) = t - \sigma(t - 1) - \sigma(t - 2) - \sigma(t - 3) - \dots$ , und ermittle die Laplace-Transformierte von  $f(t)$ .

**5.29** Ermittle die Laplace-Transformierte, wenn  $\mathcal{L}\{y'(t)\} = Y(s)$ :

**a)**  $3y' + 5y, y(0) = 2$

**b)**  $2y' - y, y(0) = 1$

**c)**  $4y' + 3y, y(0) = 0$

**d)**  $y'' + 2y' + y, y(0) = 1, y'(0) = 2$

**e)**  $2y'' + 5y' + 3y, y(0) = 1, y'(0) = 3$

**f)**  $4y'' + 3y' + 5y, y(0) = y'(0) = 0$

**5.30** Bestimme die Zeitfunktion  $f(t)$  zu folgender Bildfunktion  $F(s)$ :

**a)**  $F(s) = -\frac{1}{s}$

**b)**  $F(s) = \frac{3}{s^2}$

**c)**  $F(s) = \frac{2s - 1}{s^2}$

**d)**  $F(s) = \frac{3}{s - 4}$

**e)**  $F(s) = \frac{5}{s + 3}$

**f)**  $F(s) = \frac{4}{2s + 1}$

**g)**  $F(s) = \frac{3}{3s - 1}$

**h)**  $F(s) = \frac{4}{1 - 3s}$

**i)**  $F(s) = \frac{4}{s^2 + 16}$

**j)**  $F(s) = \frac{3}{s^2 + 16}$

**k)**  $F(s) = \frac{3s}{s^2 + 1}$

**l)**  $F(s) = \frac{3s}{4s^2 + 36}$

**5.31** Bestimme die Zeitfunktion  $f(t)$  zu folgender Bildfunktion  $F(s)$ :

**a)**  $F(s) = \frac{3}{s(s + 1)}$

**b)**  $F(s) = \frac{3}{(s - 2)(s + 1)}$

**c)**  $F(s) = \frac{4s}{s^2 - 1}$

**d)**  $F(s) = \frac{1 - 2s}{s^2 - 1}$

**e)**  $F(s) = \frac{3}{s^2 + s - 2}$

**f)**  $F(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 4}$

**g)**  $F(s) = \frac{s + 1}{s^2 - 4s}$

**h)**  $F(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s}$

**i)**  $F(s) = \frac{2s + 8}{s^2 + 4s + 3}$

**j)**  $F(s) = \frac{5s - 2}{s^2(s + 1)(s + 2)}$

**k)**  $F(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)^2}$

**l)**  $F(s) = \frac{s^2}{(s + 1)(s + 2)^2}$

**m)**  $F(s) = \frac{s}{(s + 2)^3}$

**n)**  $F(s) = \frac{3s^2 + 8s + 8}{s^3 + 4s^2 + 4s}$

**5.32** Bestimme die Zeitfunktion  $f(t)$  zu folgender Bildfunktion  $F(s)$ :

**a)**  $F(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s + 10}$

**b)**  $F(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2}$

**c)**  $F(s) = \frac{10}{(2s + 1) \cdot (s^2 + 1)}$

**d)**  $F(s) = \frac{74}{(3s + 1) \cdot (s^2 + 4)}$

**e)**  $F(s) = \frac{s^2 - 2s - 4}{s^4 + s^3 - 2s}$

**f)**  $F(s) = \frac{-8 \cdot (2s + 1)}{s^4 + 4s^2}$

**g)**  $F(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$

**h)**  $F(s) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$

**i)**  $F(s) = \frac{8}{s^2(s^2 + 4)}$

## 5.5 Anwendungen der Laplace-Transformation

### 5.5.1 Lösung von Differentialgleichungen

Wie schon erwähnt geht eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten durch eine Laplace-Transformation in eine algebraische Gleichung für die Transformierte der gesuchten Funktion über. In diese Gleichung sind auch die Anfangswerte eingebaut.

#### Beispiel 5.22 : Lösung einer Differentialgleichung mit Laplace-Transformation

Löse die Anfangswertaufgabe  $\frac{dy}{dt} + 2y = 4t$ ;  $y(0) = 3$ .

Siehe Beispiel 4.12, Seite 140, nun aber mit der Bezeichnung "t" statt "x".

#### Lösung

Wir wenden auf die linke und rechte Seite der Differentialgleichung die Laplace-Transformation an:  $\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} + 2y\right\} = \mathcal{L}\{4t\}$ .

Anwendung der Summen- und Faktorregel ergibt:  $\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2 \cdot \mathcal{L}\{y\} = 4 \cdot \mathcal{L}\{t\}$ .

Wir schreiben abkürzend  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ . Anwendung des Differentiationssatzes ergibt mit  $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$  (siehe Korrespondenztabelle Seite 218, Nr. 4)

$$s \cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{=3} + 2 \cdot Y(s) = 4 \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Man erhält eine einfache algebraische Gleichung für  $Y(s)$ , in die auch der Anfangswert eingeht. Sie kann leicht nach  $Y(s)$  aufgelöst werden:

$$Y(s) \cdot (s + 2) = \frac{4}{s^2} + 3 \quad \text{oder} \quad Y(s) = \frac{4 + 3s^2}{s^2(s + 2)}.$$

Steht eine umfangreichere Korrespondenztabelle zur Verfügung, so kann möglicherweise daraus die inverse Laplace-Transformierte  $y(t)$  von  $Y(s)$  sofort entnommen werden. Wir führen vor der Rücktransformation eine Partialbruchzerlegung durch:

$$Y(s) = \frac{4 + 3s^2}{s^2(s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 2} \Rightarrow A = -1; B = 2 \text{ und } C = 4$$

Wegen (Korrespondenztabelle Seite 218)  $\frac{1}{s} \longleftrightarrow 1$ ,  $\frac{1}{s^2} \longleftrightarrow t$  und  $\frac{1}{s + 2} \longleftrightarrow e^{-2t}$  lautet die Lösung:  $y(t) = -1 + 2t + 4 \cdot e^{-2t}$ .

Vorteile der Lösung durch die Laplace-Transformation gegenüber dem "klassischen" Verfahren:

- Keine Lösungsansätze entsprechend der Störfunktion (im Beispiel  $g(t) = 4t$ ) beim Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung
- Schematisierter Lösungsvorgang

Die Anfangswerte und die Störfunktion werden von Anfang an berücksichtigt. Wichtig ist die Einschränkung dieser Lösungsmethode auf *lineare* Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten. Wir fassen die einzelnen Rechenschritte zusammen:

### Lösung einer Anfangswertaufgabe einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten durch die Laplace-Transformation:

1. Die Differentialgleichung wird mit ihrem Anfangswert bzw. ihren Anfangswerten in eine algebraische Gleichung 1. Grades, also in eine *lineare* Gleichung, transformiert.
2. Die Lösung dieser Gleichung ist die Bildfunktion  $Y(s)$  der gesuchten Lösung  $y(t)$  der Differentialgleichung.
3. Durch Rücktransformation von  $Y(s)$  erhält man mit einer Korrespondenztabelle (nach eventueller Partialbruchzerlegung bei rationalen Bildfunktionen) die Lösung  $y(t)$  des Anfangswertproblems. Eine Integration erübrigt sich.

Man kann diese Schritte schematisch auch wie in der folgenden Abb. 5.62 darstellen:

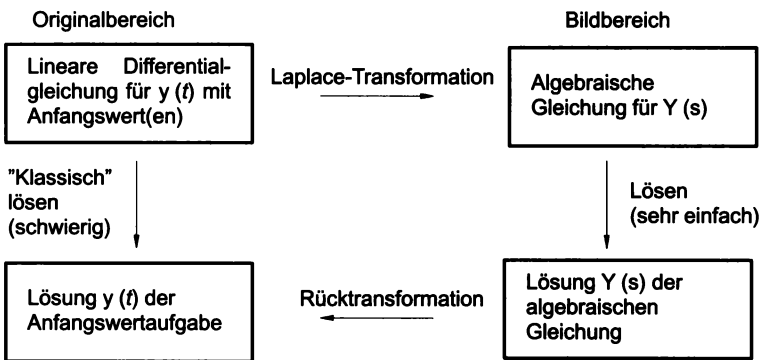


Abb. 5.62

### Beispiel 5.23 : Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Löse die Anfangswertaufgabe (siehe Beispiel 4.20 c), Seite 155):

$$y'' + 4y' + 3y = 130 \cdot \sin 2t \quad \text{mit } y(0) = 2 \quad \text{und} \quad y'(0) = 0.$$

#### Lösung

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 3y\} = \mathcal{L}\{130 \cdot \sin 2t\}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - \underbrace{s \cdot y(0)}_{=2} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 4 \cdot [s \cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{=2}] + 3Y(s) = 130 \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 4s + 3) = \frac{260}{s^2 + 4} + 2s + 8$$

$$Y(s) = \frac{\frac{260}{s^2 + 4} + 2s + 8}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2s^3 + 8s^2 + 8s + 292}{(s^2 + 4)(s + 3)(s + 1)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 + 8s + 292}{(s^2 + 4)(s + 3)(s + 1)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{C}{s + 3} + \frac{D}{s + 1} \Rightarrow A = -16, B = -4, C = -11, D = 29.$$

$$\text{Wegen } \frac{s}{s^2 + 4} \circlearrowright \cos 2t, \quad \frac{1}{s^2 + 4} \circlearrowright \frac{1}{2} \cdot \sin 2t, \quad \frac{1}{s + 3} \circlearrowright e^{-3t} \quad \text{und} \quad \frac{1}{s + 1} \circlearrowright e^{-t}$$

lautet schließlich die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = -16 \cdot \cos 2t - 2 \cdot \sin 2t - 11 \cdot e^{-3t} + 29 \cdot e^{-t}.$$

## Aufgaben

Alle folgenden Anfangswertaufgaben sind mit Hilfe der Laplace-Transformation zu lösen.

- 5.33 a)  $y' + y = 1$ ,  $y(0) = 2$                       b)  $y' + y = 2$ ,  $y(0) = 1$   
 c)  $y' + 4y = 12$ ,  $y(0) = 2$                       d)  $y' + 2y = 4t$ ,  $y(0) = 1$   
 e)  $y' + 2y = 2t - 3$ ,  $y(0) = 0$                       f)  $y' - 2y = 2 - 4t^2$ ,  $y(0) = 5$   
 g)  $y' + y = 2 \cdot e^t$ ,  $y(0) = 3$                       h)  $y' + y = 2 + e^{-t}$ ,  $y(0) = 1$   
 i)  $y' + 3y = 4t \cdot e^{-t}$ ,  $y(0) = 4$                       j)  $y' + 2y = 2 + t \cdot e^{-t}$ ,  $y(0) = 1$

- 5.34 Löse die Anfangswertaufgabe  $y' + 2y = 4$  mit der Anfangsbedingung  $y(1) = 3$  mit Hilfe der Laplace-Transformation.

*Hinweis:* Bestimme zuerst die (allgemeine) Lösung der Differentialgleichung mit dem vorerst noch unbekanntem Anfangswert  $y(0)$ . Berechne sodann diesen aus der Bedingung  $y(1) = 3$ .

- 5.35 Ermittle die Lösung der Anfangswertaufgabe (= Aufgabe 4.28, Seite 149):

- a)  $y' + y = 2 \cdot \sin t$ ;  $y(0) = 1$                       b)  $y' + 2y = 5 \cdot \cos t$ ;  $y(0) = 0$   
 c)  $y' + 3y = 12 \cdot \cos 3t$ ;  $y(0) = 0$                       d)  $y' + 3y = 6 \cdot \sin 3t$ ;  $y(0) = 2$   
 e)  $y' + 10y = 52 \cdot \sin 2t$ ;  $y(0) = 1$                       f)  $y' + 2y = 4 \cdot \cos 2t$ ;  $y(0) = 2$   
 g)  $y' + y = \sin t + 3 \cdot \cos t$ ;  $y(0) = 0$                       h)  $y' + y = 8 \sin t + 6 \cos t$ ;  $y(0) = 0$

- 5.36 Löse (= Aufgabe 4.41, Seite 159):

- a)  $y'' + 6y' + 5y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$                       b)  $y'' + 8y' + 12y = 0$ ;  $y(0) = 10$ ,  $y'(0) = 8$   
 c)  $y'' + 4y' + 8y = 0$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$                       d)  $y'' + 10y' + 26y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$   
 e)  $y'' + 8y' + 20y = 0$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$                       f)  $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ ;  $y(0) = r$ ,  $y'(0) = 0$

- 5.37 Löse      a) Beispiel 4.20, Seite 155      b) Beispiel 4.22, Seite 162

- 5.38 Löse folgende Schwingungsprobleme (= Aufgabe 4.47, Seite 174):

- a)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 85y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 9$                       b)  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 7y = 0$ ;  $y(0) = 6$ ,  $\dot{y}(0) = 0$   
 c)  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 160y = 0$ ;  $y(0) = 3$ ,  $\dot{y}(0) = 0$                       d)  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = -4$

- 5.39 Löse folgende Schwingungsprobleme für  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ , (= Aufgabe 4.55, Seite 175):

- a)  $\ddot{y} + 10\dot{y} + 16y = 48$                       b)  $\ddot{y} + 10\dot{y} + 24y = 24$   
 c)  $\ddot{y} + 10\dot{y} + 25y = 25$                       d)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 507 \cdot (1 + t)$   
 e)  $\ddot{y} + 14\dot{y} + 49y = 686 \cdot (1 + 2t)$                       f)  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = 32t$   
 g)  $\ddot{y} + 16y = 28 \sin 3t$                       h)  $\ddot{y} + 16y = 32 \sin 4t$   
 i)  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = 32 \sin 4t$

- 5.40 Eine erzwungene mechanische Schwingung genügt der Differentialgleichung

- a)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 29y = 680 \cdot \sin(3t)$                       b)  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 10y = 30 \cdot \cos(2t)$   
 c)  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 195 \cdot \sin(5t)$                       d)  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 10y = 30 \cdot [3 \sin(2t) + 4 \cos(2t)]$

Bestimme den Schwingungsverlauf  $y(t)$ , wenn  $y(0) = y'(0) = 0$ . Wie lautet die stationäre Lösung?

## 5.5.2 Elektrische Netzwerke im Laplace-Bildbereich

Ein  $RCL$ -Netzwerk wird durch eine lineare Differentialgleichung für die gesuchte Größe (Spannung, Stromstärke) mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Ihre Lösung kann grundsätzlich durch eine Laplace-Transformation der Differentialgleichung erfolgen, wodurch man eine lineare Gleichung für die Bildfunktion der gesuchten Größe erhält. Bei umfangreichen Netzwerken ist jedoch das Aufstellen der Differentialgleichung(en) oft mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden. Das folgende Beispiel zeigt, wie man auch das Aufstellen der Differentialgleichung eines Netzwerks vermeiden kann und dadurch noch einmal eine weitere Vereinfachung erreichen kann.

### Beispiel 5.24 : Netzwerkberechnung im Bildbereich (vgl. Beispiel 5.2, Seite 182)

An einem  $RL$ -Glied (Abb. 5.63) liegt eingangsseitig ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  s die Spannung

a)  $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$  mit  $\hat{u} = 25$  V und  $\omega = 5$  s $^{-1}$ .

b)  $u(t) = U_0 = 25$  V (Einschalten eines Gleichstroms).

Bestimme den zeitlichen Verlauf der Stromstärke  $i(t)$  und der Spannung  $u_L$ , wenn  $R = 10$   $\Omega$  und  $L = 1$  H. Die Anfangsbedingung für die Stromstärke lautet:  $i(0) = 0$ .

#### Lösung

Wir führen eine Laplace-Transformation der Differentialgleichung  $L \frac{di}{dt} + R i = u(t)$  des  $RL$ -Netzwerks mit  $i(0) = 0$  durch:

$$L \cdot [s I(s) - \underbrace{i(0)}_{=0}] + R \cdot I(s) = U(s)$$

$$L \cdot s I(s) + R \cdot I(s) = U(s)$$

$$I(s) \cdot [R + L s] = U(s)$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{R + L s} \quad (*)$$

Setzt man nun abkürzend  $Z_R = R$  und  $Z_L = L s$ , so kann man die Gleichung (\*) auch in der Form schreiben:

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} \quad \text{mit } Z(s) = Z_R + Z_L.$$

Diese Gleichung erinnert – wie bei der entsprechenden Überlegung zu Beispiel 5.2 – an das OHM'sche Gesetz  $U = R \cdot I$  bzw.  $I = \frac{U}{R}$  für den Gleichstromkreis. Die Größen  $Z_R$  und  $Z_L$  können als formale Erweiterung des elektrischen Widerstandes betrachtet werden und heißen **Bildwiderstand** oder kurz **s-Widerstand** des OHM'schen Widerstandes bzw. der Spule. Die Größe  $Z(s)$  ergibt sich durch Addition der s-Widerstände  $Z_R$  und  $Z_L$ , genauso, wie im Gleichstromkreis die Addition von OHM'schen Widerständen bei Serienschaltung.  $Z(s)$  kann somit als s-Widerstand des Stromkreises bezeichnet werden.

Die Größen  $Z_R(s)$  und  $Z_L(s)$  treten nun an die Stelle der Größen  $Z_R = R$  und  $Z_L = j \omega L$  im Wechselstromkreis. Durch die Laplace-Transformation der Netzwerk-Differentialgleichung stellt sich eine gleichartige Situation ein wie die Transformation der Netzwerk-Differentialgleichung in die komplexe Ebene (Symbolische Methode).

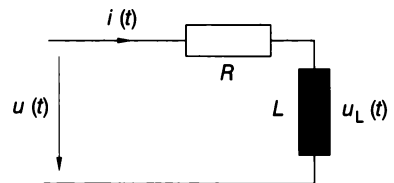


Abb. 5.63 Netzwerk im Zeitbereich

Man kann somit gleich auf die Netzwerk-Gleichung im Bildbereich kommen, wenn man für den Ohm'schen Widerstand und die Spule jeweils als Rechengröße einen  $s$ -Widerstand einführt. Man sagt, dass man das Netzwerk in den Laplace-Bildbereich transformiert (Abb. 5.64). Daraus können die Bildgrößen  $U(s)$  und  $I(s)$  formal nach den Regeln des Gleichstromkreises bestimmt werden.

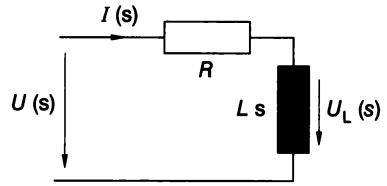


Abb. 5.64 Netzwerk im Laplace-Bildbereich

Zu a)  $U(s) = \hat{u} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ . Damit ist  $I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \hat{u} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{R + Ls}$ .

Die Weiterrechnung erfolgt mit den angegebenen Zahlenwerten unter Weglassung der Einheiten.

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = 25 \cdot \frac{5}{s^2 + 25} \cdot \frac{1}{10 + s} = \frac{125}{(s^2 + 25) \cdot (s + 10)}$$

$$\frac{125}{(s^2 + 25) \cdot (s + 10)} = \frac{As + B}{s^2 + 25} + \frac{C}{s + 10} \Rightarrow A = -1, B = 10, C = 1.$$

$$I(s) = \frac{-s + 10}{s^2 + 25} + \frac{1}{s + 10} = -\frac{s}{s^2 + 25} + \frac{10}{s^2 + 25} + \frac{1}{s + 10}$$

Wegen  $\frac{s}{s^2 + 25} \rightarrow \cos(5t)$ ,  $\frac{1}{s^2 + 25} \rightarrow \frac{1}{5} \cdot \sin(5t)$  und  $\frac{1}{s + 10} \rightarrow e^{-10t}$  folgt:

$$i(t) = -\cos(5t) + 2 \cdot \sin(5t) + e^{-10t} = \sqrt{5} \cdot \sin(5t - 26,6^\circ) + e^{-10t}$$

Wir betrachten den Summanden der Stromstärke  $i(t)$ . Dieser ist bereits nach kurzer Zeit (etwa einer knappen Sekunde) praktisch null. Übrig bleibt der "stationäre" Anteil  $i_s = 2 \cdot \sin(5t) - \cos(5t)$ . Genau diesen erhält man, wenn man die Aufgabe mit der komplexen Rechnung löst. Dies ist hier möglich, weil  $u(t)$  eine *sinusförmige* Wechselspannung ist.

Zu b)  $U(s) = U_0 \frac{1}{s}$ . Damit ist  $I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = U_0 \frac{1}{s \cdot (R + Ls)} = \frac{U_0}{L} \frac{1}{s \cdot (\frac{R}{L} + s)}$  die Bildfunktion

der gesuchten Stromstärke. Wir setzen abkürzend  $\tau = \frac{L}{R}$  ("Zeitkonstante").

$$\text{Partialbruchzerlegung: } \frac{1}{s \cdot (s + \frac{1}{\tau})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} \Rightarrow A = \tau, B = -\tau.$$

Damit ergibt sich:

$$I(s) = \frac{U_0}{L} \left( \frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = \frac{U_0}{L} \cdot \tau \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = \frac{U_0}{R} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right).$$

Wegen  $\frac{1}{s} \rightarrow 1$  und  $\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{R}{L}t}$  folgt  $i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 2,5 \text{ A} \cdot (1 - e^{-10t})$ .

Abb. 5.65 zeigt zusammenfassend die  $s$ -Widerstände der drei grundlegenden Elemente eines beliebigen  $RCL$ -Netzwerkes, auch des Kondensators. Sie ergeben sich wie im vorigen Beispiel 5.24 durch Laplace-Transformation der Spannungsabfälle  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$  und  $u_C(t)$  aufgrund der Faktorregel sowie des Differentiationssatzes. Die angeführte einfache Gestalt erhalten sie allerdings nur unter der Bedingung, dass der Strom durch die Spule sowie die Ladung des Kondensators zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  null ("energielos") sind.



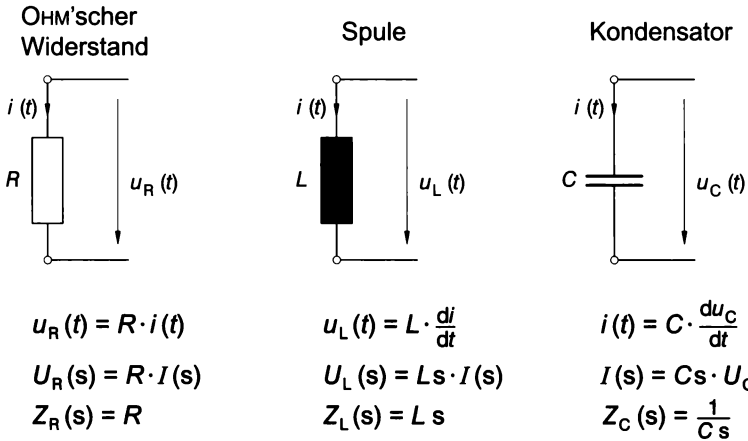


Abb. 5.65 Laplace-Bildwiderstände der Grundschaltelemente  $R$ ,  $L$  und  $C$

Es kann auch im Laplace-Bildbereich symbolisch wie in der komplexen Ebene bei der Wechselstromrechnung gerechnet werden. **Bei Verwendung der angeführten Bildwiderstände gelten formal für die Bildfunktionen der Ströme und Spannungen die selben Regeln wie in der Gleichstromlehre.**

Bei der Symbolischen Methode in der Wechselstromlehre werden *sinusförmige* erregende Spannungen vorausgesetzt. Man erhält dann die Ströme und Spannungen im *stationären* Zustand. Dagegen wird nun **keine besondere Einschränkung für die erregenden Spannungen** gemacht und man erhält die Ströme und Spannungen **auch während der Einschaltdauer.**

Die Laplace-Bildwiderstände entsprechen genau den komplexen Widerständen  $R$ ,  $j \omega L$  bzw.  $\frac{1}{j \omega C}$ . Man kann von der "j- $\omega$ -Form" zur "s-Form" der Widerstände wechseln, indem man  $j \omega$  durch  $s$  ersetzt.

**Beispiel 5.25 : RC-Netzwerk (vgl. Beispiel 5.3, Seite 184)**

In einem energielosen  $RC$ -Netzwerk (Abb. 5.65) mit  $R = 10 \text{ k}\Omega$  und  $C = 50 \text{ }\mu\text{F}$  ist ab  $t = 0$  s eingangsseitig die Spannung **a)  $u(t) = 5 \text{ V}$ , b)  $u(t) = 4 \cdot t \text{ V}$**  gegeben. Bestimme den Verlauf der Stromstärke  $i$  und der Kondensatorspannung  $u_C$ .

**Lösung** (siehe auch Beispiel 4.17, Seite 145)

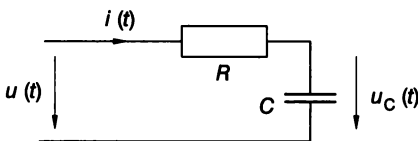


Abb. 5.66 Netzwerk im "Zeitbereich"

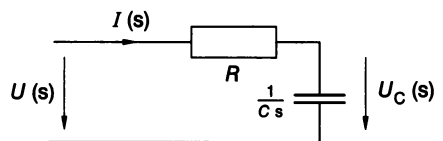


Abb. 5.67 Netzwerk im Laplace-Bildbereich

Mit  $Z_C = \frac{1}{Cs}$  ist der Bildwiderstand  $Z(s)$  des Stromkreises  $Z(s) = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{Cs}$ . Damit kann man im Bildbereich sofort das OHM'sche Gesetz anwenden:

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{U(s)}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{1 + RCs} \cdot U(s).$$

Bildfunktion der Kondensatorsspannung:  $U_C(s) = Z_C(s) \cdot I(s) = \frac{1}{Cs} \frac{Cs}{1+RCs} U(s) = \frac{U(s)}{1+RCs}$ .

Bei Weglassung der Einheiten ergibt sich nun mit den vorgegebenen Erregerspannungen  $u(t)$ :

Zu a)  $U(s) = \frac{5}{s}$ ;  $I(s) = \frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{1 + \frac{s}{2}} \cdot \frac{5}{s}$ . Wegen  $\frac{1}{s+2} \longleftrightarrow e^{-2 \cdot t}$  erhält man die gewünschte Stromstärke  $i(t) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot e^{-2 \cdot t}$ .

$$U_C(s) = \frac{U(s)}{1+RCs} = \frac{\frac{5}{s}}{1 + \frac{s}{2}} = 10 \cdot \frac{1}{s \cdot (s+2)}.$$

Mit der Partialbruchzerlegung  $\frac{1}{s \cdot (s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}$  ergibt sich  $U_C(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+2}$ .

Wegen  $\frac{1}{s} \longleftrightarrow 1$  und  $\frac{1}{s+2} \longleftrightarrow e^{-2 \cdot t}$  ergibt sich schließlich die Kondensatorspannung  $u_C(t) = 5 \text{ V} (1 - e^{-2 \cdot t})$ .

Die Beziehung  $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$  kann zur Kontrolle der Rechnung dienen.

Zu b)  $U(s) = \frac{4}{s^2}$ ;  $I(s) = \frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{1 + \frac{s}{2}} \cdot \frac{4}{s^2} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{s \cdot (s+2)} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$ . Dabei wurde wie in a) eine Partialbruchzerlegung durchgeführt. Wegen  $\frac{1}{s} \longleftrightarrow 1$  und  $\frac{1}{s+2} \longleftrightarrow e^{-2 \cdot t}$  erhält man die gewünschte Stromstärke  $i(t) = 0,2 \text{ mA} \cdot (1 - e^{-2 \cdot t})$ .

$$U_C(s) = \frac{U(s)}{1+RCs} = \frac{\frac{4}{s^2}}{1 + \frac{s}{2}} = 8 \cdot \frac{1}{s^2 \cdot (s+2)}.$$

Partialbruchzerlegung:  $\frac{1}{s^2 \cdot (s+2)} = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)}$ .

Damit:  $U_C(s) = -\frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s+2}$ . Wegen  $\frac{1}{s} \longleftrightarrow 1$ ,  $\frac{1}{s^2} \longleftrightarrow t$  und  $\frac{1}{s+2} \longleftrightarrow e^{-2 \cdot t}$  erhält man somit:  $u_C(t) = -2 + 4 \cdot t + 2 \cdot e^{-2 \cdot t} = 2 \text{ V} \cdot (2t - 1 + e^{-2 \cdot t})$ .

Die Beziehung  $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$  kann wieder zur Kontrolle der Rechnung dienen.

### Beispiel 5.26 : RC-Glied bei Rechtecksimpuls

An einem RC-Glied wird eingangsseitig die Spannung  $U_0 = 20 \text{ V}$  zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  zugeschaltet und nach  $T = 0,2 \text{ s}$  wieder ausgeschaltet. Bestimme den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung  $u_C$ , wenn  $R = 5000 \Omega$  und  $C = 20 \mu\text{F}$ .

#### Lösung

Wie im vorigen Beispiel ergibt sich als Zusammenhang zwischen den Laplace-Transformierten  $U_C(s)$  und  $U(s)$  der Kondensatorspannung  $u_C$  bzw. der Eingangsspannung  $u(t)$ :

$$U_C(s) = \frac{1}{1+RCs} U(s).$$

Die Eingangsspannung kann in der Form geschrieben werden:  $u(t) = U_0 [\sigma(t) - \sigma(t - T)]$ .

Wegen  $\sigma(t) \rightarrow \frac{1}{s}$  und  $\sigma(t-T) \rightarrow \frac{1}{s} \cdot e^{-Ts}$  (Zeitverschiebungssatz, siehe Seite 217) folgt

$$U_C(s) = U_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-Ts} \right) = \frac{U_0}{s} (1 - e^{-Ts}).$$

Somit ergibt sich bei Einsetzen der Zahlenwerte:

$$U_C(s) = \frac{1}{1+RCs} U(s) = \frac{20}{s(0,1s+1)} (1 - e^{-0,2s}) = \frac{200}{s(s+10)} (1 - e^{-0,2s}).$$

Partialbruchzerlegung:  $\frac{200}{s(s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+10} \Rightarrow A = 20, B = -20.$

Damit lautet die Bildfunktion  $U_C(s)$  der Kondensatorspannung:

$$U_C(s) = \left( \frac{20}{s} - \frac{20}{s+10} \right) \cdot (1 - e^{-0,2s}) = \frac{20}{s} - \frac{20}{s+10} - \left( \frac{20}{s} - \frac{20}{s+10} \right) \cdot e^{-0,2s}.$$

Wegen  $\frac{1}{s} \rightarrow 1$  und  $\frac{1}{s+10} \rightarrow e^{-10 \cdot t}$  folgt

$$u_C(t) = 20 - 20 \cdot e^{-10 \cdot t} - [20 - 20 \cdot e^{-10 \cdot (t-0,2)}] \cdot \sigma(t-0,2).$$

Dabei wurde wieder vom Zeitverschiebungssatz Gebrauch gemacht. Der Faktor  $\sigma(t-0,2)$  bewirkt, dass der in eckigen Klammern stehende Term erst für  $t \geq 0,2$  s wirksam wird:

$$0 \leq t < 0,2: u_C(t) = 20 \cdot (1 - e^{-10 \cdot t})$$

$$t \geq 0,2 \quad u_C(t) = 20 - 20 \cdot e^{-10 \cdot t} - 20 + 20 \cdot e^{-10 \cdot (t-0,2)} = 20 \cdot (e^{-10 \cdot (t-0,2)} - e^{-10 \cdot t}) = 20 \cdot e^{-10 \cdot t} \cdot (e^2 - 1).$$

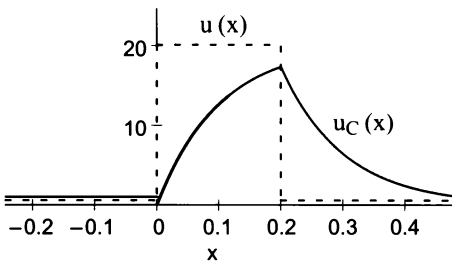
Man kann auch zusammenfassend schreiben:

$$u_C(t) = \begin{cases} 20 \text{ V} \cdot (1 - e^{-10 \cdot t}) & \text{für } 0 \leq t < 0,2 \\ 20 \text{ V} \cdot e^{-10 \cdot t} \cdot (e^2 - 1) & \text{für } t \geq 0,2 \end{cases}$$

MC

$$u(x) := 20 \cdot (\Phi(x) - \Phi(x-0,2))$$

$$u_C(x) := \text{wenn } [x < 0, 0, \text{ wenn } [x < 0,2, 20 \cdot (1 - e^{-10 \cdot x}), 20 \cdot e^{-10 \cdot x} \cdot (e^2 - 1)]]$$

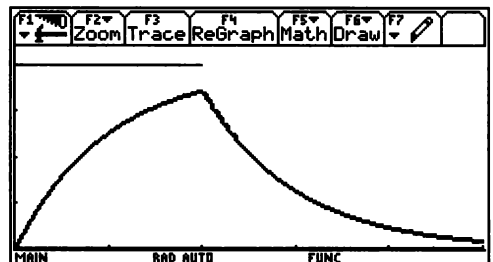


Voyage 200

Calculator screen showing the definition of the piecewise function  $u_C(x)$  using the 'when' function.

```

F1 [MODE] F2 [ZOOM] F3 [STAT] F4 [MATH] F5 [DRAW] F6 [EDIT] F7 [EXEC]
APLITS
v1={
  20,x<=,2
  0,else
  20*(1-e^-10*x),x<,2
  20*e^-10*x*(e^2-1),else
}
v3=
v4=
v5=
v6=
v1(x)=when(x<=,2,20,0)
MAIN RAD AUTO FUNC
    
```



### Aufgaben

Alle folgenden Aufgaben sind mit Hilfe der Transformation in den Laplace-Bildbereich zu lösen.

**5.41** Löse Beispiel 5.3, Seite 184, für den Fall, dass ab  $t = 0$  s die erregende Spannung wirksam wird.

**5.42** Berechne den Strom  $i(t)$  sowie die Kondensatorspannung  $u_C(t)$  des Stromkreises in Abb. 5.68, wenn  $U_0 = 100$  V,  $L = 1$  H und  $C = 1$   $\mu$ F.

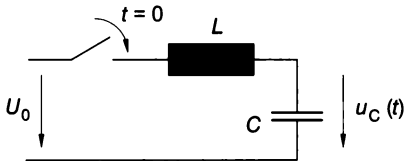


Abb. 5.68

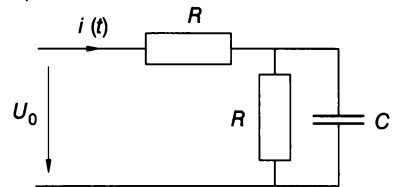


Abb. 5.69

**5.43** An das Netzwerk in Abb. 5.69 wird ab  $t = 0$  s die Spannung  $u(t) = U_0$  gelegt. Ermittle die Stromstärke  $i(t)$  für  $t \geq 0$  s, wenn  $U_0 = 8$  V,  $R = 400$   $\Omega$  und  $C = 50$   $\mu$ F ist.

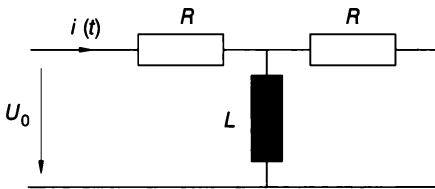


Abb. 5.70

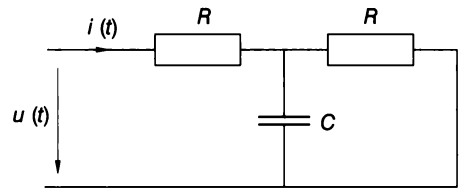


Abb. 5.71

**5.44** An das Netzwerk in Abb. 5.70 wird ab  $t = 0$  s die Spannung  $u(t) = U_0$  gelegt. Ermittle die Stromstärke  $i(t)$  für  $t \geq 0$  s, wenn  $U_0 = 20$  V,  $R = 10$   $\Omega$  und  $L = 0,5$  H ist.

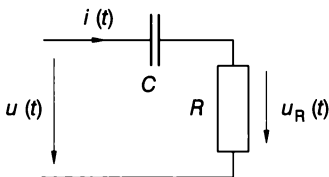


Abb. 5.72

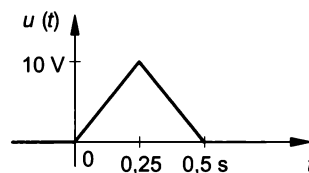


Abb. 5.73

**5.45** An das Netzwerk in Abb. 5.71 wird ab  $t = 0$  s die Spannung  $u(t) = U_0$  gelegt. Ermittle die Stromstärke  $i(t)$  für  $t \geq 0$  s, wenn  $U_0 = 20$  V,  $R = 10$  k $\Omega$  und  $C = 50$   $\mu$ F ist.

**5.46** In einem RC-Glied (Abb. 5.72) mit  $R = 10$  k $\Omega$  und  $C = 50$   $\mu$ F ist eingangsseitig ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  s eine linear ansteigende Spannung der Größe  $u(t) = 4$  V  $\cdot$  t wirksam. Berechne den Spannungsverlauf  $u_R(t)$  am OHM'schen Widerstand.

**5.47** Berechne die Stromstärke in einem RC-Glied (Abb. 5.72) mit  $R = 10$  k $\Omega$  und  $C = 50$   $\mu$ F, wenn eine Dreiecksspannung mit  $U_0 = 10$  V nach Abb. 5.73 angelegt wird.

**5.48** Löse Aufgabe 4.62 a), Seite 176.

**5.49** Löse Aufgabe 4.63, Seite 176.

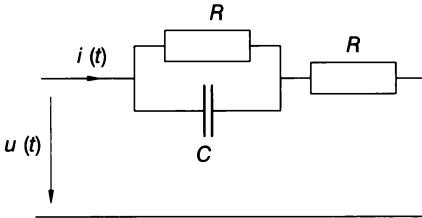


Abb. 5.74

**5.50** Die erregende Spannung  $u(t)$  der Schaltung in Abb. 5.74 steigt linear vom Zeitpunkt  $t = 0$  s bis zur Zeit  $t = 0,5$  s von 0 V auf  $U_0 = 100$  V an und bleibt dann konstant. Bestimme die Stromstärke  $i(t)$ , wenn  $R = 10$  k $\Omega$  und  $C = 50$   $\mu$ F ist.

### 5.5.3 Übertragungsverhalten von Systemen

Die Systemtheorie hat sich aus praktischen Problemen der Elektrotechnik entwickelt. Wichtige Anwendungsgebiete liegen in der Analyse und im Entwurf elektrischer Netzwerke, in der Nachrichtenübertragung, in der Regelungstechnik und in der Messtechnik vor.

In der Systemtheorie ist es üblich, ein System durch ein Rechteck ("Block") darzustellen. Wir nehmen ein System mit einem Eingang und einem Ausgang an:  $x(t)$  bezeichnet das Eingangssignal,  $y(t)$  das Ausgangssignal (Abb. 5.75).

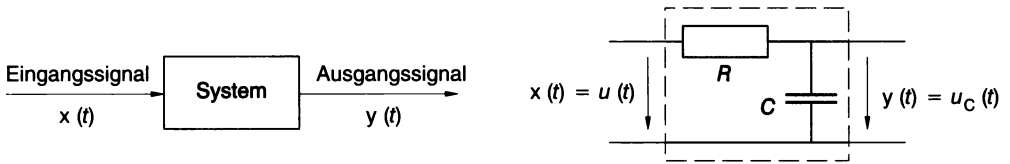


Abb. 5.75 System mit einem Eingang und einem Ausgang

### LTI-Systeme

Obwohl technische Systeme sehr verschieden sein können, besitzen sie oft zwei Eigenschaften: sie sind *linear* und sie sind *zeitinvariant*. Sie werden daher *LTI-Systeme* (engl. Linear Time-Invariant Systems, lineare zeitinvariante Systeme) genannt. Ein System heißt *linear*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. *Verstärkungsprinzip*: Ist  $y(t)$  das Ausgangssignal zu  $x(t)$  und wird das Eingangssignal zu  $c \cdot x(t)$  verstärkt, so führt dies zur gleichen Verstärkung des Ausgangssignals, also zu  $c \cdot y(t)$ .
2. *Überlagerungsprinzip*: Sind  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  die Ausgangssignale zu  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ , so ist  $y_1(t) + y_2(t)$  das Ausgangssignal zu  $x_1(t) + x_2(t)$ .

Ein System heißt *zeitinvariant*, wenn das *Verschiebungsprinzip* erfüllt ist: Ein zeitlich später einsetzendes Eingangssignal führt zu einem Ausgangssignal, das mit der gleichen Verspätung einsetzt, sonst aber unverändert bleibt.

Jedes durch eine lineare Differentialgleichung beschriebene System ist linear; sind die Koeffizienten dieser linearen Differentialgleichung konstant, so ist das System zusätzlich zeitinvariant. **Eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschreibt daher ein LTI-System!** LTI-Systeme machen das Kerngebiet der Systemtheorie aus.

Im folgenden Beispiel wird eine grundlegende Funktion eingeführt, die im Laplace-Bildbereich in einfachster Weise Eingangs- und Ausgangsfunktion eines LTI-Systems miteinander verbindet, die **Übertragungsfunktion**. Dazu ist ein zur Zeit  $t = 0$  energieloses elektrisches Netzwerk nach Abb. 5.76 ein Reihenschwingkreis, gegeben.

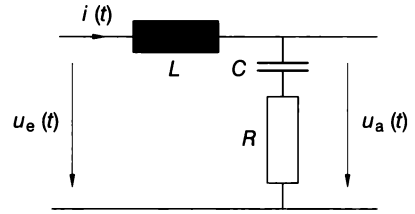


Abb. 5.76 Elektrisches LTI-System

Man könnte nun zeigen, dass aus den Beziehungen

$u_L + u_C + u_R = u_e$ ,  $u_C + u_R = u_a$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $i = C \frac{du_C}{dt}$  und  $u_R = R i$  die folgende Differentialgleichung zwischen der Eingangsspannung  $u_e(t)$  und der Ausgangsspannung  $u_a(t)$  folgt:

$$C L \cdot \frac{d^2 u_a}{dt^2} + C R \cdot \frac{du_a}{dt} + u_a = C R \cdot \frac{du_e}{dt} + u_e$$

Weil das System anfänglich energielos ist, gelten Anfangsbedingungen  $\dot{u}_a(0) = u_a(0) = 0$ . Dazu kommt  $u_e(0) = 0$ . Da das mathematische Modell dieses Systems eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist, liegt ein LTI-System vor. Der durch die Differentialgleichung gegebene Zusammenhang zwischen  $u_e(t)$  und  $u_a(t)$  ist verhältnismäßig aufwendig. Eine wesentliche Vereinfachung erfolgt durch die Beschreibung des Systems im Laplace-Bildbereich. Wir transformieren:

$$C L \cdot [s^2 U_a(s) - s \cdot \underbrace{u_a(0)}_{=0} - \underbrace{\dot{u}_a(0)}_{=0}] + C R \cdot [s U_a(s) - \underbrace{u_a(0)}_{=0}] + U_a(s) =$$

$$= C R \cdot [s U_e(s) - \underbrace{u_e(0)}_{=0}] + U_e(s)$$

$$(C L \cdot s^2 + C R \cdot s + 1) \cdot U_a(s) = (C R \cdot s + 1) \cdot U_e(s)$$

Wir bilden nun das Verhältnis der Bildfunktionen  $U_a(s)$  zu  $U_e(s)$ :

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{C R \cdot s + 1}{C L \cdot s^2 + C R \cdot s + 1}$$

Dieses Verhältnis hängt nicht von der Eingangs- oder Ausgangsfunktion ab, sondern nur von den Systemgrößen  $R$ ,  $C$  und  $L$ . Dabei ist nur vorausgesetzt, dass die transformierte Differentialgleichung linear mit konstanten Koeffizienten ist, sowie die Anfangsbedingungen null sind. Dies gilt *allgemein* bei LTI-Systemen. Aus diesem Grund bezeichnet man dieses Verhältnis als **Übertragungsfunktion**  $G(s)$  eines solchen Systems. Wir halten fest:

Als **Übertragungsfunktion**  $G(s)$  eines Systems bezeichnet man den Quotienten der Laplace-Transformierten  $Y(s)$  und  $X(s)$  der Ausgangsfunktion  $y(t)$  und der Eingangsfunktion  $x(t)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Mit Hilfe der Übertragungsfunktion  $G(s)$  kann bei bekannter Eingangsfunktion  $x(t)$  unmittelbar die Laplace-Transformierte der Ausgangsfunktion  $y(t)$  durch die einfache Beziehung  $Y(s) = G(s) \cdot X(s)$  gebildet werden.

**Die Übertragungsfunktion  $G(s)$  hängt nur von der Art des Systems und seinen Kenngrößen ab.**

Die Übertragungsfunktion beschreibt das zugehörige LTI-System vollständig. Der Vorteil dieser Vorgangsweise liegt darin, dass die Übertragungsfunktion  $G(s)$  bei einem energie-losen Übertragungsglied verhältnismäßig leicht gebildet werden kann (siehe nächstes Beispiel) und darüber hinaus (wenn keine Totzeit vorliegt) eine einfache Funktion, nämlich eine *rationale* Funktion ist.

Es wird erwähnt, dass im Zeitbereich der Zusammenhang zwischen der Eingangsfunktion  $x(t)$  mit  $x(t) = 0$  für  $t < 0$  und der Ausgangsfunktion  $y(t)$  durch das "Faltungsintegral"

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) \cdot x(\tau) \, d\tau,$$

also wesentlich aufwendiger gegeben ist. Dabei ist  $g(t)$  die so genannte Gewichtsfunktion, die inverse Laplace-Transformierte der Übertragungsfunktion  $G(s)$ .

**Beispiel 5.27: Übertragungsfunktion eines elektrischen LTI-Systems**

Gegeben ist das elektrische Netzwerk in Abb. 5.77 mit  $R = 100 \, \Omega$ ,  $C = 100 \, \mu\text{F}$  und  $L = 0,5 \, \text{H}$ .

- a) Ermittle seine Übertragungsfunktion  $G(s)$  durch Transformation des Netzwerks in den Bildbereich.
- b) Bestimme mit Hilfe der Übertragungsfunktion die Ausgangsspannung  $u_a(t)$  für  $t > 0 \, \text{s}$ , wenn  $u_e(t) = U_0(t) \cdot \sigma(t)$  mit  $U_0 = 10 \, \text{V}$ .

**Lösung**

Zu a) Für das gegebene Übertragungssystem gelten im Bildbereich (Abb. 5.77) die folgenden Gleichungen:

$$U_e(s) = \left[ Ls + \frac{1}{Cs} + R \right] \cdot I(s) \quad \text{und}$$

$$U_a(s) = \left[ \frac{1}{Cs} + R \right] \cdot I(s).$$

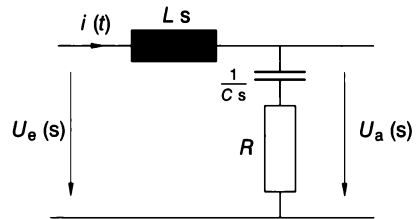


Abb. 5.77

Daraus ergibt sich sofort die Übertragungsfunktion:  $G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{RCs + 1}{LCs^2 + RCs + 1}$ .

Nach Einsetzen:  $G(s) = \frac{\frac{1}{100} s + 1}{\frac{1}{20000} s^2 + \frac{1}{100} s + 1} = \frac{200(s + 1)}{s^2 + 200s + 20000}$

Zu b) Wegen  $U_e(s) = \frac{U_0}{s} = \frac{10}{s}$  ist

$$U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s) = \frac{200(s + 1)}{s^2 + 200s + 20000} \cdot \frac{10}{s} = 2000 \cdot \frac{s + 100}{s(s^2 + 200s + 20000)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s + 100}{s(s^2 + 200s + 20000)} = \frac{A}{s} + \frac{B \cdot s + C}{s^2 + 200s + 20000} = \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{200} \cdot \frac{s}{s^2 + 200s + 20000}$$

Rücktransformation ergibt:

$$u_a(t) = 10 \, \text{V} \cdot [1 + e^{-100t} (\sin 100t - \cos 100t)] = 10 \, \text{V} \cdot [1 + \sqrt{2} e^{-100t} \sin(100t - \frac{\pi}{4})].$$

Eine weitere in den Anwendungen viel benützte Kenngröße zur Beschreibung von LTI-Systemen ist der so genannte **Frequenzgang  $G(j\omega)$** , der als die Übertragungsfunktion  $G(s)$  auf der imaginären Achse definiert ist. D.h. man ersetzt in der Übertragungsfunktion die im Allgemeinen komplexe Variable  $s = \sigma + j \cdot \omega$  durch  $s = j \cdot \omega$ .

## Aufgaben

5.51 Bestimme die Übertragungsfunktion des folgenden Übertragungsgliedes und bestimme damit die Ausgangsspannung (eine "Sprungantwort"), wenn  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 50 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$  sowie  $u(t) = 3 \text{ V} \cdot \sigma(t)$  ist.

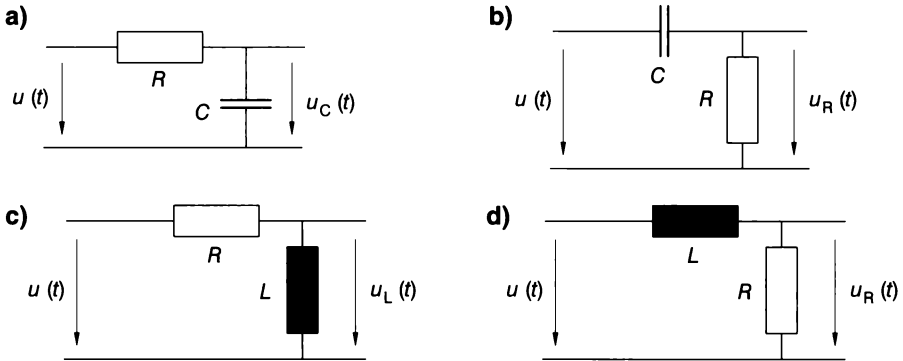


Abb. 5.78

5.52 Gegeben ist das (energieleose) System in Abb. 5.79 für  $u(t)$  als Eingangsfunktion und  $u_L(t)$  als Ausgangsfunktion, wobei  $R = 300 \text{ }\Omega$ ,  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$  und  $L = 2 \text{ H}$  sind.

- Wie lautet die Übertragungsfunktion?
- Berechne  $u_L(t)$ , wenn  $u(t) = 10 \text{ V} \cdot \sigma(t)$
- Berechne  $u_L(t)$ , wenn  $u(t) = 1508 \text{ V} \cdot \sin(20 \cdot t) \cdot \sigma(t)$ .

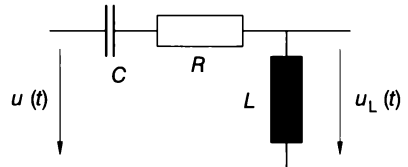


Abb. 5.79

## Im Überblick: Anwendungen der Laplace-Transformation

Durch die Laplace-Transformation wird eine **Anfangswertaufgabe einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten** im Bildbereich in eine einfache lineare Gleichung für die Bildfunktion der gesuchten Größe übergeführt. Dabei werden auch die Anfangsbedingungen berücksichtigt. Nach Lösung dieser Gleichung erfolgt die Rücktransformation, was bevorzugt mit Korrespondenztabelle erfolgt.

Betrachtet man in der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_0 x$  die Funktion  $x(t)$  als Eingangsfunktion und  $y(t)$  als Ausgangsfunktion eines **Systems**, so beschreibt sie ein **lineares zeitinvariantes System (LTI-System)**.

Die eigentliche **Bedeutung der Laplace-Transformation** liegt darin, dass aus einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit Anfangsbedingungen gleich null als Modell eines LTI-Systems eine einfache Gleichung vom Typ  **$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$**  im Bildbereich der Laplace-Transformation entsteht. Dabei ist  $G(s)$  die nur vom System abhängige **Übertragungsfunktion**,  $X(s)$  und  $Y(s)$  sind die Bildfunktionen von  $x(t)$  und  $y(t)$ . Dies führt zu einer wesentlichen Vereinfachung in der Beschreibung eines LTI-Systems, weshalb man weitgehend bei der weiteren Behandlung im Bildbereich bleibt.



## 6 Grundlagen der statistischen Methoden

Die kommenden Abschnitte setzen folgende Kenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraus (siehe eventuell "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 287 ff):

- (1) Deutung der **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses A als der zu erwartende **Anteil** bei einer großen Anzahl von Versuchen, in denen A eintritt.
- (2) Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten in einem **Laplace-Experiment**:

$P(A) = \frac{g}{m}$ , wobei g die Anzahl der für das Ereignis A günstigen Fälle und m jene aller möglichen Fälle ist.

- (3) Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse:

**Additionssatz** ("ODER-Regel") für unvereinbare Ereignisse:

$$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$$

**Multiplikationssatz** ("UND-Regel") für unabhängige Ereignisse:

$$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$$

- (4) **Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses**  $\bar{A}$  zu A:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

### 6.1 Diskrete Verteilungen

Im Folgenden werden einige wichtige in der Qualitätssicherung angewendete Wahrscheinlichkeitsverteilungen behandelt. Wahrscheinlichkeitsverteilungen geben formelmäßig Antwort auf häufig gestellte Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

#### 6.1.1 Hypergeometrische Verteilung

In einem "Prüflos" (Abb. 6.1), allgemeiner **Grundgesamtheit** genannt, sind N Einheiten, davon d fehlerhaft (defekt). Man entnimmt nun *zufällig* eine **Stichprobe** vom Umfang n. Das Ziehen einer Stichprobe erfolgt praktisch stets derart, dass eine einmal gezogene Einheit vor dem nächsten Zug nicht wieder in das Prüflos zurückgelegt wird. Man spricht kurz vom "Ziehen OHNE Zurücklegen".

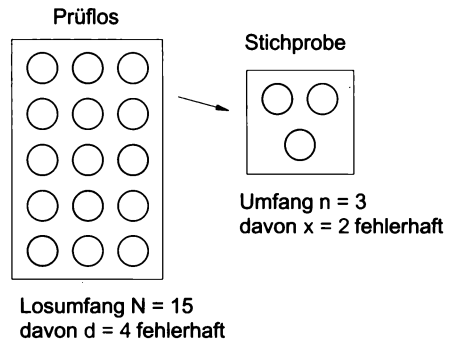


Abb. 6.1 Ziehen einer Stichprobe

*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe genau x fehlerhafte Einheiten vorzufinden?*

Die Frage soll anhand eines Zahlenbeispiels gemäß Abb. 6.1 beantwortet werden: Aus einem Prüflos mit  $N = 15$  Einheiten, davon  $d = 4$  fehlerhaft, wird zufällig eine Stichprobe des Umfangs  $n = 3$  entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,  $x = 2$  fehlerhafte Einheiten in der Stichprobe vorzufinden?

Das zufällige Ziehen kann als Laplace-Experiment aufgefasst werden:

Anzahl aller *möglichen* verschiedenen Stichproben (Beispiel 2.2, Seite 30):  $m = \binom{15}{3} = 455$ .

Aus den  $d = 4$  fehlerhaften Einheiten kann man  $\binom{4}{2}$ -mal auf verschiedene Weise genau  $x = 2$  fehlerhafte Einheiten herausgreifen; aus den verbleibenden 11 einwandfreien Einheiten kann man  $\binom{11}{1}$ -mal eine einwandfreie Einheit herausgreifen. Diese beiden Anzahlen ergeben multipliziert die Anzahl der *günstigen* Fälle, also der Stichproben mit genau  $x = 2$  fehlerhaften Einheiten:

$$g = \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{1} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{11}{1} = 66. \text{ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach}$$

$$\frac{g}{m} = \frac{66}{455} = 0,1451 = 14,51\%.$$

Bezeichnet allgemein  $g(x; N, d, n)$  die Wahrscheinlichkeit, genau  $x$  fehlerhafte Einheiten zu ziehen, wenn  $N$ ,  $d$  und  $n$  gegeben sind, so gilt allgemein:

### Hypergeometrische Verteilung (Ziehen ohne Zurücklegen):

$$g(x) = g(x; N, d, n) = \frac{\binom{d}{x} \cdot \binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, d)$$

Ist  $n + d > N$  (eher selten der Fall), so ist  $x \geq n + d - N$ .

Für jedes  $x$  ergibt sich eine andere Wahrscheinlichkeit; die möglichen Anzahlen  $x$  zusammen mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten werden unter der Bezeichnung **hypergeometrische Verteilung** zusammengefasst.

Anmerkungen:

- (1)  $N$ ,  $d$  und  $n$  heißen die *Parameter* der hypergeometrischen Verteilung. Wenn die Parameter klar sind, schreibt man kurz  $g(x)$  statt  $g(x; N, d, n)$ .
- (2)  $d$  bezeichnet in der Qualitätssicherung in der Regel die Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der Grundgesamtheit (im Prüflös). Allgemeiner gesprochen ist  $d$  die Anzahl der Träger eines bestimmten Merkmals in der Grundgesamtheit. Entsprechend bezeichnet  $x$  in der Folge diese Merkmalsträger in der Stichprobe.
- (3) Die Anzahl fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe kann nicht vorausgesagt werden; man bezeichnet sie daher als eine *Zufallsgröße* oder auch *Zufallsvariable*.
- (4) Die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten kann man sich gut in der folgenden Form merken:

$$g(x) = \frac{\binom{\text{SCHLECHT}}{\text{schlecht}} \cdot \binom{\text{GUT}}{\text{gut}}}{\binom{\text{GRUNDGESAMTHEIT}}{\text{Stichprobe}}}$$

Großbuchstaben beziehen sich auf die "große" Grundgesamtheit, Kleinbuchstaben auf die "kleine" Stichprobe.

- (5) Rekursionsformel für die Berechnung von  $g(x)$ :

$$g(0) = \frac{N-d}{N} \cdot \frac{N-d-1}{N-1} \cdot \dots \cdot \frac{N-d-n+1}{N-n+1}, \quad g(x+1) = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{d-x}{(N-n)-(d-x)+1} \cdot g(x)$$

### Beispiel 6.1 : Hypergeometrische Verteilung

Berechne alle Wahrscheinlichkeiten der hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern  $N = 15$ ,  $d = 4$  und  $n = 3$ .

#### Lösung

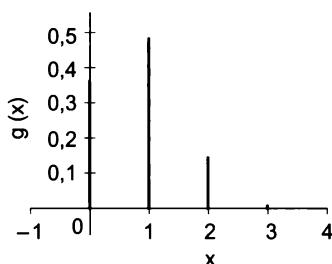
$$g(0) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{11}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{1 \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = 0,3626;$$

$$g(1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{11}{2}}{\binom{15}{3}} = 0,4835;$$

$$g(2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{11}{1}}{\binom{15}{3}} = 0,1451;$$

$$g(3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{11}{0}}{\binom{15}{3}} = 0,0088.$$

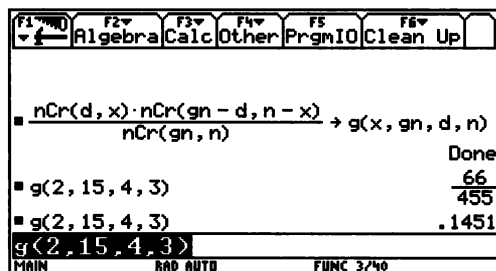
Abb. 6.2 zeigt die graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten  $g(x)$  in einem Stabdiagramm.  $g(0) + g(1) + g(2) + g(3)$  ist die Wahrscheinlichkeit, 0 oder 1 oder 2 oder 3 fehlerhafte Einheiten in der Stichprobe zu vorzufinden. Daher muss diese Summe 1 sein (Wahrscheinlichkeit für ein sicheres Ereignis). Dies kann als *Rechenkontrolle* dienen. Führe diese aus!



Einzelwahrscheinlichkeiten  $g(x)$ : dhypergeom ( $x, d, N - d, n$ )  
 $x := 0, 1 \dots 3$        $g(x) := \text{dhypergeom}(x, 4, 11, 3)$

Abb. 6.2 Hypergeom. Verteilung ( $N = 15$ ,  $d = 4$ ,  $n = 3$ )

MC

Voyage  
200

Statt  $N$  wurde  $gn$  geschrieben.

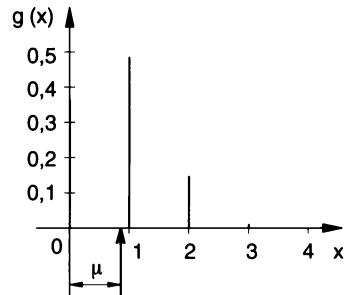
Das Ergebnis wird als Kommazahl angezeigt, wenn man vor  $\blacksquare$  die Taste  $\blacklozenge$  drückt (oder einen der Werte 2, 15, 4 oder 3 mit einem Kommapunkt versieht).

### Erwartungswert für die Anzahl fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung wie beispielsweise die hypergeometrische Verteilung ist durch die Angabe aller Werte  $g(x)$  bestimmt. Kürzer, wenn auch grob, kann eine Verteilung durch einige für sie charakteristische Kenngrößen beschrieben werden. Von Bedeutung ist hier an erster Stelle der **Erwartungswert**  $\mu$  einer Zufallsgröße, etwa der Anzahl fehlerhafter Einheiten unter  $n$  entnommenen Einheiten.

Zeichnet man wie in Abb. 6.3 das Stabdiagramm der hypergeometrischen Verteilung, so bezeichnet man die Schwerpunktskoordinate der Stäbe als ihren Erwartungswert (manchmal auch Mittelwert)  $\mu$ . Unterstützt man also die Stabanordnung an der Stelle  $\mu$ , so besteht Gleichgewicht.

Der Erwartungswert gibt somit eine Vorstellung von der Lage der Verteilung.

Abb. 6.3 Erwartungswert  $\mu$ 

*Deutung des Erwartungswertes:*

Gegeben seien viele Prüflose von  $N$  Einheiten, alle mit  $d$  fehlerhaften Einheiten. Wir entnehmen nun aus jedem dieser Prüflose eine Zufallsstichprobe. Bildet man nun den Mittelwert  $\bar{x}$  der Anzahlen fehlerhafter Einheiten aller dieser Stichproben, dann gilt die Näherung:  $\bar{x} \approx \mu$ .

Ohne Herleitung wird angegeben:

**Erwartungswert einer hypergeometrischen Verteilung** mit den Parametern  $N$ ,  $d$  und  $n$ :

$$\mu = n \cdot \frac{d}{N}$$

### Beispiel 6.2: Erwartungswert einer hypergeometrischen Verteilung

Berechne den Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern  $N = 15$ ,  $d = 4$  und  $n = 3$ .

**Lösung**

Erwartungswert  $\mu = 3 \cdot \frac{4}{15} = 0,8$ .

Würde man also aus vielen Prüflosen des Umfangs  $N = 15$ , davon stets  $d = 4$  fehlerhaft, je eine Zufallsstichprobe des Umfangs  $n = 3$  ziehen, so wäre der Mittelwert der fehlerhaften Einheiten in allen diesen Stichproben 0,8.

**Zwei praktisch wichtige Fragestellungen lauten** (siehe dazu Abb. 6.4):

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens  $x$  (z.B. 3) fehlerhafte Einheiten in einer Stichprobe vorzufinden?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens  $x$  (z.B. 3) fehlerhafte Einheiten in einer Stichprobe vorzufinden?

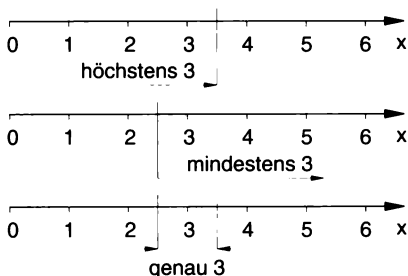


Abb. 6.4 Höchstens/Mindestens/Genau

Diese Fragestellungen können mit der so genannten **Verteilungsfunktion  $G(x)$**  beantwortet werden:

$$G(x) = g(0) + g(1) + \dots + g(x)$$

Wie bei den "Einzelwahrscheinlichkeiten"  $g(x)$  können in der Bezeichnung der Verteilungsfunktion  $G$  noch die Parameter der Verteilung angeführt werden:  $G(x; N, d, n)$ .

Zu a) Höchstens 3 bedeutet 0 oder 1 oder 2 oder 3; nach der ODER-Regel gilt (Ereignisse unvereinbar):

$$P(\text{höchstens } 3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = G(3).$$

$$\text{Allgemein: } P(\text{höchstens } x) = g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(x) = G(x).$$

Zu b) Mindestens 3 bedeutet 3 oder 4 oder 5 oder ... = Nicht (höchstens 2).

Da nach a) gilt:  $P(\text{höchstens } 2) = G(2)$ , folgt:

$$P(\text{mindestens } 3) = 1 - G(2).$$

$$\text{Allgemein: } P(\text{mindestens } x) = 1 - G(x - 1).$$

Beachte schließlich, dass  $g(x) = G(x) - G(x - 1)$  ist!

Wir halten fest (was auch für die noch zu behandelnde Binomialverteilung und Poisson-Verteilung gilt):

**Verteilungsfunktion  $G(x) = g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(x)$**   
 $P(\text{genau } x) = g(x) = G(x) - G(x - 1)$   
 **$P(\text{höchstens } x) = G(x)$**  Fragestellung von besonderer Bedeutung!  
 $P(\text{mindestens } x) = 1 - G(x - 1)$

**Beispiel 6.3: Verteilungsfunktion der hypergeometrischen Verteilung**

Unter den 15 Einheiten eines Prüfloses sind 4 fehlerhaft. Man entnimmt zufällig 3 Einheiten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei

a) genau eine, b) höchstens eine, c) mindestens eine fehlerhafte Einheit vorzufinden?

**Lösung** (siehe Beispiel 6.1, Seite 238)

Zu a)  $P(\text{genau } 1) = g(1) = 0,4835$

Zu b)  $P(\text{höchstens } 1) = G(1) = g(0) + g(1) = 0,3626 + 0,4835 = 0,8462$

Zu c)  $P(\text{mindestens } 1) = 1 - G(0) = 1 - g(0) = 1 - 0,3626 = 0,6374.$

**Aufgaben**

- 6.1 In einem Prüflos von 20 Einheiten sind drei Einheiten fehlerhaft. Jemand entnimmt eine Zufallsstichprobe von 5 Einheiten. Berechne den Erwartungswert für die Anzahl fehlerhafter Einheiten der Stichprobe und die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Einheiten in einer solchen Stichprobe.
  
- 6.2 In einer Schachtel befinden sich 25 einwandfreie und 4 defekte Dichtungen. Man entnimmt zufällig drei Dichtungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,  
a) keine            b) höchstens eine            c) mindestens eine  
defekte Dichtung zu entnehmen?
  
- 6.3 In einer Schachtel befinden sich 25 einwandfreie und 4 defekte Dichtungen. Man entnimmt zufällig drei Dichtungen. Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl defekter Dichtungen unter den drei entnommenen Dichtungen?

- 6.4** Eine Schaltung enthält 20 gleichartige Kondensatoren, von denen genau einer – wie eine Messung ergab – nicht mehr einwandfrei funktioniert. Man ersetzt 5 Kondensatoren, die leicht zugänglich sind, durch einwandfreie. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass danach die Schaltung wieder einwandfrei ist?
- 6.5** Ein Batterietestgerät kann gleichzeitig 4 Batterien prüfen. Unter 20 Batterien sind zwei unbrauchbar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese gleich beim ersten Test entdeckt werden?
- 6.6** In einem Reinigungsbehälter befinden sich 18 Schrauben, 2 davon haben ein fehlerhaftes Gewinde. Man entnimmt nun zufällig 8 Schrauben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass danach alle Schrauben im Behälter einwandfrei sind?
- 6.7** In einem Behälter liegen 50 Wälzlagerkugeln, von denen 5 einen falschen Durchmesser haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim zufälligen Entnehmen von 10 Kugeln den gleichen Fehleranteil wie im Behälter hat.
- 6.8** In einer Schachtel liegen 15 Spezialschrauben, wovon allerdings 6 einen etwas zu kleinen Durchmesser haben. Man greift nun zufällig in die Schachtel und entnimmt 10 Schrauben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter alle Schrauben den passenden Durchmesser haben?
- 6.9** Ein Unternehmen bezieht wöchentlich ein Los von 40 Prüfgeräten. Bei einer Wareneingangsprüfung werden 10 Prüfgeräte zufällig aus jedem Los entnommen und geprüft. Das Los wird angenommen, wenn alle Geräte den Prüftest bestehen. Gerade wurde ein Los mit 3 funktionsunfähigen Prüfgeräten angeliefert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein solches Los angenommen?
- 6.10** Österreichisches Zahlenlotto "6 aus 45": Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
- a) 6 richtige Zahlen
  - b) 5 richtige Zahlen mit Zusatzzahl
  - c) 5 richtige Zahlen ohne Zusatzzahl
  - d) 3 richtige Zahlen
  - e) keine richtige Zahl
- aus 6 richtigen Zahlen von insgesamt 45 Zahlen zu tippen, wenn ein Tipp aus 6 Zahlen besteht?
- 6.11** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schulklasse mit 10 Burschen und fünf Mädchen bei einer Zufallsauswahl von drei Schülern
- a) kein Mädchen
  - b) mindestens ein Mädchen darunter ist?
- 6.12** Es wird vermutet, dass in einem Unternehmen von 100 Mitarbeitern 60 für die Einführung einer Kantine sind. Unter 20 zufällig ausgewählten Personen findet man 8 Mitarbeiter, die dies bestätigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, wenn die Vermutung zutrifft?

## 6.1.2 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung kann als die wichtigste diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung betrachtet werden.

### Beispiel 6.4 : Eine einfache Versuchsabfolge

Ein (idealer) Würfel wird  $n = 8$ -mal geworfen. Jedesmal ist die Wahrscheinlichkeit  $p$ , die Augenzahl Sechs zu werfen, gleich  $\frac{1}{6}$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Sechser zu werfen?

#### Lösung

Eine Wurffolge, bei der ein Sechser beispielsweise beim 2. und 7. Wurf auftritt, ist:

Wurffolge	N	6	N	N	N	N	6	N
Wurfnummer	1	2	3	4	5	6	7	8

Dabei bezeichnet N ("Nicht") irgendeine Augenzahl ungleich sechs. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit für eine solche spezielle Wurffolge. Da die Ergebnisse der einzelnen Würfe unabhängig voneinander sind, sind deren Wahrscheinlichkeiten nach der UND-Regel zu multiplizieren:

$$P(N6NNNN6N) = P(N) \cdot P(6) \cdot P(N) \cdot P(N) \cdot P(N) \cdot P(N) \cdot P(6) \cdot P(N) = \\ = (1-p) \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot p \cdot (1-p) = p^2 \cdot (1-p)^6.$$

Eine Wurffolge N6NNNN6N könnte kurz auch durch die Nummernfolge 27 beschrieben werden: Die Zahl Sechs wurde beim zweiten und beim siebenten Wurf geworfen. Auf diese Weise können auch alle weiteren Wurffolgen mit 2 Sechsern durch zwei Nummern zwischen 1 und 8 beschrieben werden. Z.B.:

12 bezeichnet die Wurffolge 66NNNNNN

14 bezeichnet die Wurffolge 6NN6NNNN.

Die Wahrscheinlichkeit für *jede* dieser Wurffolgen ist gleich groß, nämlich  $p^2 \cdot (1-p)^6$ , da die Faktoren  $p$  und  $(1-p)$  nur in unterschiedlicher Reihenfolge auftreten. Es ist noch zu klären, wie viele dieser Wurffolgen es gibt. Offenbar ist ihre Anzahl gleich der Anzahl aller Nummernfolgen 12, 13, 14, ..., 23, 24, 25, ..., 78.

Dies sind aber gerade die Kombinationen von zwei Zahlen aus den acht Zahlen 1, 2, 3, ..., 8. Kombinationen deshalb, weil die Reihenfolge der Angabe belanglos ist. Z.B. bedeuten 12 und 21 dieselbe Wurffolge.

Anzahl der Kombinationen von 2 Elementen aus 8 Elementen:  $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ . Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Sechser zu werfen, mit  $g(2)$ , so gilt:

$g(2) = P(12 \text{ oder } 13 \text{ oder } 14 \text{ oder } \dots \text{ oder } 78)$ .

Da die Wurffolgen paarweise unvereinbar sind, sind die Wahrscheinlichkeiten nach der ODER-Regel einfach zu addieren:  $g(2) = P(12) + P(13) + P(14) + \dots + P(78)$ .

Da alle diese gleich sind, folgt schließlich als gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$g(2) = \binom{8}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^6 = 28 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,2605 = 26,05\%.$$

Man könnte in Beispiel 6.4 die Wahrscheinlichkeiten  $g(x)$  für alle möglichen Sechseranzahlen bei  $n = 8$  Würfeln berechnen. Diese Anzahl ist eine Zufallsgröße oder Zufallsvariable. Man erhält eine so genannte **Binomialverteilung** für diese Zufallsvariable. Sie ist gekennzeichnet durch  $p = \frac{1}{6}$  und  $n = 8$ . Wir können das Wesentliche der Versuchsabfolge von Beispiel 6.4 in folgendem Satz ausdrücken:

### Binomialverteilung

Ein Zufallsvorgang wird  $n$ -mal durchgeführt. Stets ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses  $A$  *gleich* und zwar  $p$ .

Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $A$  genau  $x$ -mal eintritt, gilt:

$$g(x) = g(x; n, p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Erwartungswert:  $\mu = n \cdot p$

#### Anmerkungen:

- (1)  $p$  und  $n$  heißen die *Parameter* der Binomialverteilung. Sie werden bei Bedarf in der Bezeichnung der Wahrscheinlichkeiten  $g(x; n, p)$  angeführt:
- (2) Das hier vorliegende **Versuchsschema** ist von großer Bedeutung; es wird **BERNOULLI<sup>17</sup>-Schema** genannt. Die Zufallsvariable "Anzahl des Eintretens des Ereignisses  $A$  in einem Bernoulli-Schema" ist binomialverteilt.
- (3) Wie bei der hypergeometrischen Verteilung ist der Erwartungswert  $\mu$  näherungsweise gleich dem Mittelwert der Anzahlen des Eintretens von  $A$  bei oftmaliger Durchführung der Versuchsfolge.
- (4) Rekursionsformel für die Berechnung von  $g(x)$ , wobei  $q = 1 - p$ :  

$$g(0) = q^n; \quad g(x+1) = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot g(x).$$
- (5) Wie bei der hypergeometrischen Verteilung findet auch bei der Binomialverteilung die Verteilungsfunktion  $G(x) = G(x; n, p)$  breite Verwendung (siehe Seite 239).

Zwei wichtige Sachverhalte in der Qualitätssicherung führen auf die Binomialverteilung: die Fertigung mit gleichbleibendem Ausschussanteil sowie das Ziehen einer Stichprobe "mit Zurücklegen".

### Beispiel 6.5 : Fertigung mit gleichbleibendem Ausschussanteil

Eine Fertigung von Stanzteilen läuft mit dem *gleichbleibenden* Ausschussanteil  $p = 4\%$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter  $n = 50$  hintereinander entnommenen Einheiten

a) genau 0      b) genau 2      c) höchstens 2      d) mindestens 2  
fehlerhafte Einheiten vorzufinden?

e) Wie groß ist der Erwartungswert  $\mu$  der fehlerhaften Einheiten?

#### Lösung

Die Fertigung eines Stanzteiles ist ein Zufallsvorgang, bei dem mit Wahrscheinlichkeit  $p = 4\%$  ein fehlerhafter Teil produziert wird. Bei der Fertigung der 50 Einheiten liegt ein Bernoulli-Schema vor, da  $p$  konstant angenommen wird. Daher ist die Anzahl  $x$  der fehlerhaften Einheiten unter den  $n = 50$  Einheiten binomialverteilt mit den Parametern  $n = 50$  und  $p = 4\% = 0,04$ .

<sup>17</sup> Jakob BERNOULLI (1654 – 1705), Schweizer Mathematiker



Zu a)  $g(0) = \binom{50}{0} \cdot 0,04^0 \cdot (1 - 0,04)^{50} = 1 \cdot 1 \cdot 0,1299 = 0,1299$

Zu b)  $g(2) = \binom{50}{2} \cdot 0,04^2 \cdot (1 - 0,04)^{48} = \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 0,04^2 \cdot (1 - 0,04)^{48} = 0,2762$

Zu c) Siehe Seite 240:  $P(\text{höchstens } 2) = G(2) = g(0) + g(1) + g(2)$ ;

$g(1) = \binom{50}{1} \cdot 0,04^1 \cdot (1 - 0,04)^{49} = \frac{50}{1} \cdot 0,04^1 \cdot (1 - 0,04)^{49} = 0,2706$ ;

$G(2) = 0,1299 + 0,2706 + 0,2762 = 0,6767 \approx 67,7\%$

Zu d) Siehe Seite 240:

$P(\text{mindestens } 2) = 1 - G(1) = 1 - [g(0) + g(1)] = 1 - [0,1299 + 0,2706] = 0,5995 \approx 60,0\%$ .

Zu e)  $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,04 = 2$  Einheiten.

D.h. Würde man oftmals 50 Einheiten entnehmen, so wären *durchschnittlich* etwa 2 pro 50 Einheiten fehlerhaft.

**MC** Einzelwahrscheinlichkeiten  $g(x)$ :  $\text{dbinom}(x, n, p)$   
 $x := 0, 1 \dots 10 \quad g(x) := \text{dbinom}(x, 50, 0.04)$

Abb. 6.5 zeigt das Stabdiagramm für die Wahrscheinlichkeiten  $g(x)$  der Binomialverteilung für  $n = 50$  und  $p = 4\%$  bis  $x = 10$ .  $\mu = 2$  ist die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes der Stabanordnung.

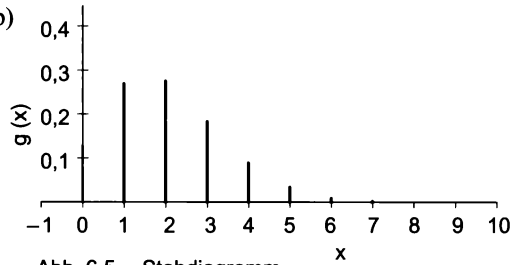


Abb. 6.5 Stabdiagramm

**Voyage 200**

F1	F2	F3	F4	FS	FB
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$nCr(n, x) \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n - x} \rightarrow g(x, n, p)$ Done $g(2, 50, .04)$ .2762 $\sum_{x=0}^2 g(x, 50, .04)$ .6767 $\Sigma(g(x, 50, 0.04), x, 0, 2)$					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 3/40	

### Ziehen mit Zurücklegen

In einem Prüflös sind  $N$  Einheiten, davon sind  $d$  fehlerhaft. Das Ziehen einer Stichprobe vom Umfang  $n$  möge nun folgendermaßen geschehen, was freilich nicht der Praxis entspricht: Man entnimmt zufällig eine Einheit aus dem Prüflös und prüft ihren Zustand. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit  $p$ , für das Ziehen einer fehlerhaften Einheit gleich  $\frac{d}{N}$  ( $d$  Einheiten sind "günstig"). Danach legt man die gezogene Einheit wieder in das Prüflös zurück.

Dieser Zufallsvorgang wird  $n$ -mal durchgeführt. Da nach jedem Zug zurückgelegt wird, ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer fehlerhaften Einheit stets  $p = \frac{d}{N}$ . Dabei ist freilich zu achten, dass das Ziehen zufällig erfolgt. Offenbar liegt hier wieder ein Bernoulli-Schema vor. Die Anzahl  $x$  der fehlerhaften Einheiten unter den gezogenen  $n$  Einheiten (= Stichprobe) ist binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p = \frac{d}{N}$ .

Praktische Bedeutung:

In der Praxis erfolgt das **Ziehen ohne Zurücklegen**; eine dem Prüflös entnommene Einheit wird nach dem Ziehen nicht wieder in das Prüflös zurückgelegt. Die Anzahl der fehlerhaften Einheiten unter den  $n$  entnommenen Einheiten ist **hypergeometrisch** verteilt. Ist jedoch der Stichprobenumfang  $n$  klein gegenüber dem Losumfang (etwa  $n < \frac{N}{10}$ ), so kann das Ziehen ohne Zurücklegen näherungsweise durch das Ziehen mit Zurücklegen ersetzt werden. Denn das Prüflös wird in diesem Fall durch das Zurücklegen nur geringfügig verändert.

D.h. aber, dass man im Fall  $n < \frac{N}{10}$  statt der hypergeometrischen Verteilung die einfachere Binomialverteilung nehmen kann, wobei  $p = \frac{d}{N}$  zu setzen ist.

Abb. 6.6 zeigt im Stabdiagramm den Vergleich der Wahrscheinlichkeiten  $g(x)$  der hypergeometrischen Verteilung für  $N = 1000$ ,  $d = 40$  und  $n = 100$  (für das Ziehen ohne Zurücklegen) mit der Binomialverteilung für  $p = \frac{d}{N} = 4\%$  und  $n = 100$  (Ziehen ohne Zurücklegen). Dabei ist  $n$  gleich  $\frac{N}{10}$  und nicht wie verlangt kleiner als  $\frac{N}{10}$ .

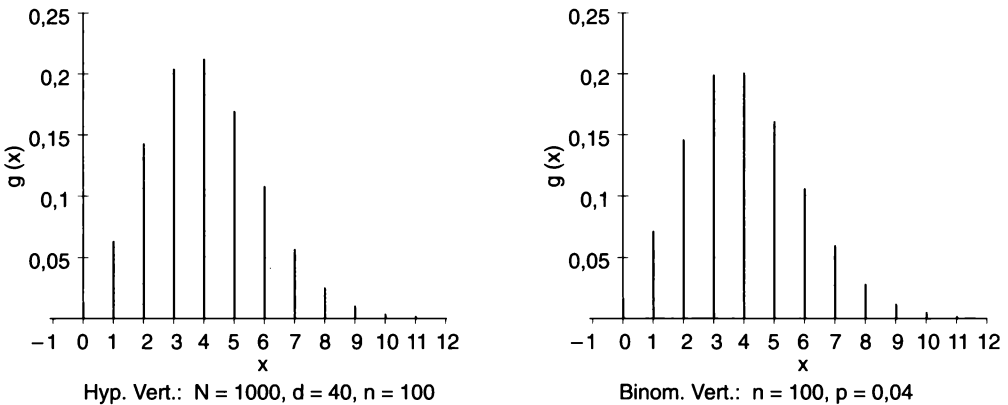


Abb. 6.6 Vergleich hypergeometrische Verteilung mit entsprechender Binomialverteilung

### Beispiel 6.6 : Binomialverteilung als Näherung der hypergeometrischen Verteilung

In einem Prüflös sind 2 000 Einheiten, davon sind 80 fehlerhaft. Man entnimmt nun eine Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 50$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) genau 0    b) genau 2    c) höchstens 2    d) mindestens 2 fehlerhafte Einheiten vorzufinden?

Löse diese Aufgaben näherungsweise unter Verwendung der Binomialverteilung!

#### Lösung

Da die Voraussetzung  $n < \frac{N}{10}$  erfüllt ist, kann die Binomialverteilung mit den Parametern  $p = \frac{d}{N} = 0,04 = 4\%$  und  $n = 50$  verwendet werden. Diese Binomialverteilung hat die gleichen Parameter wie jene von Beispiel 6.5, Seite 243. Lösung siehe daher dort!

### Aufgaben

- 6.13** Ein Schüler rechnet bei jedem Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% für die Note "Sehr gut". Wie schaut in diesem Fall bei 8 Tests die "Sehr gut"-Verteilung aus? Berechne also die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2, ..., 8 sehr gute Beurteilungen.
- 6.14** Ein Würfel wird zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,  
**a)** keinen **b)** genau einen **c)** höchstens einen **d)** mindestens einen Sechser zu werfen?
- 6.15** Ein Würfel wurde zehnmal geworfen; dabei gab es keinen Sechserwurf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf einen Sechser zu werfen?
- 6.16** In einer Fertigung ist der Anteil fehlerhafter Einheiten gleichbleibend 3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 80 Einheiten  
**a)** keine **b)** genau eine **c)** höchstens drei **d)** mindestens drei fehlerhafte Einheiten gefunden werden?
- 6.17** In einer Fertigungsabteilung ist bekannt, dass im Schnitt jedes 200. Stück Ausschuss ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Tagesproduktion von 1000 Stück  
**a)** kein Stück **b)** höchstens ein Stück Ausschuss ist?
- 6.18** In einem Gerät werden 5 Schalter stets gleichartig beansprucht. Die Ausfallwahrscheinlichkeit (während der Nutzungsdauer) liegt bei einem Schalter unabhängig von den anderen bei 4%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  
**a)** kein Schalter ausfällt **b)** mehr als zwei Schalter ausfallen?
- 6.19** In einem Prüfling von 5000 Einheiten sind 100 fehlerhaft. Man entnimmt eine Stichprobe des Umfangs 200. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,  
**a)** genau 0 **b)** genau 2 **c)** höchstens 4 **d)** mindestens 2 fehlerhafte Einheiten in der Stichprobe vorzufinden?
- 6.20** Ein Abnehmer bezieht kleine Spritzgussteile von einem Lieferanten in Losen zu je 3000 Einheiten. Er nimmt das Los an, wenn er bei einer Stichprobenprüfung von 125 Einheiten darunter höchstens 3 fehlerhafte Teile findet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Annahme, wenn der Fehleranteil im Los  
**a)** 1% **b)** 2% **c)** 6% beträgt?
- 6.21** An exam consists of ten "true" or "false" questions. What is the probability, that a student can get 8 or more questions correct by just guessing?
- 6.22** A multiple choice test contains 30 questions, each with four answers, only one of these is correct. Assume a student just guesses on each question. What is the probability that the student answers  
**a)** more than 15 questions correctly **b)** less than 8 questions correctly?
- 6.23** Ein Würfel wird 30-mal geworfen. Gib ein Intervall  $[x_{un}, x_{ob}]$  an, in dem die Anzahl  $x$  der Sechserwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% liegt. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit für die Anzahlen unter  $x_{un}$  sowie über  $x_{ob}$  zusammengenommen jeweils höchstens gleich 5% betragen.
- 6.24** In Mitteleuropa besitzen 38% der Menschen die Blutgruppe 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 10 Blutspendern mindestens 5 Personen mit dieser Blutgruppe vorzufinden?
- 6.25** Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass eine gebuchter Flug mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% nicht angetreten wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fluggesellschaft für eine Maschine mit 100 Plätzen keine Überbuchung hat, wenn  
**a)** 101 Buchungen **b)** 103 Buchungen **c)** 105 Buchungen zugelassen werden?

- 6.26** Bei einem Roulettespiel bleibt die Kugel auf einem von 37 Feldern mit den Nummern 0, 1, 2, ..., 36 stehen. Es werden 100 Spielrunden durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel
- a) nie                      b) genau zweimal                      c) mehr als zweimal  
auf dem Feld mit der Zahl 0 stehenbleibt?

### 6.1.3 Poisson-Verteilung

Auch die **POISSON**<sup>18</sup>-Verteilung spielt in den statistischen Methoden der Qualitätssicherung eine bedeutende Rolle. Sie wird hier bevorzugt zur Angabe der Verteilung der Anzahl von bestimmten Fehlern auf gleichartigen technischen Einheiten herangezogen. Unter gewissen Voraussetzungen kann sie auch als eine einfache Näherung der Binomialverteilung dienen, was häufig geschieht.

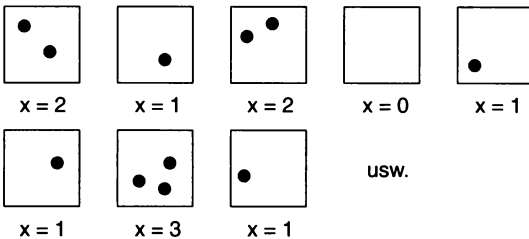


Abb. 6.7 Lackfehleranzahlen

Wir nehmen an, dass beispielsweise lackierte Bleche (Abb. 6.7) gleicher Art vorliegen. Jedes dieser Bleche kann eine bestimmte Anzahl  $x$  von Fehlern eines bestimmten Typs (etwa Lackblasen) besitzen. Ferner sei der arithmetische Mittelwert der Lackfehleranzahl vieler dieser Bleche bekannt. *Es kann nun sein, dass allein die Kenntnis dieses Mittelwertes (näherungsweise) ausreicht, die*

*Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Fehleranzahl auf einem einzelnen Blech anzugeben.*

Die **Anzahl  $x$  der Fehler pro (Prüf-)Einheit** (hier der Lackfehler pro Blech) ist häufig wenigstens näherungsweise **poissonverteilt**.

#### Poisson-Verteilung

Ist  $\mu$  die **mittlere Fehleranzahl pro Einheit** (der arithmetische Mittelwert der Fehleranzahl sehr vieler Einheiten), dann gilt für die Wahrscheinlichkeit  $g(x)$ , genau  $x$  Fehler auf einer beliebig herausgegriffenen Einheit zu finden:

$$g(x) = g(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

*Anmerkungen:*

- (1) Wir haben die Poisson-Verteilung als "Fehlerverteilung" pro Einheit eingeführt (Beispiele: Anzahl der Isolationsfehler pro Kupferdrahtspule, der Fadenbrüche pro Zwirrspule, der Webfehler pro Ballen Tuch, ...). Tatsächlich geht ihre Bedeutung darüber hinaus. Man spricht allgemeiner von der **Verteilung der Anzahl irgendwelcher Vorkommnisse auf einem Zählabschnitt** (Anzahl der Unfälle je Zeiteinheit, der Telefongespräche pro Minute, der Sternschnuppen pro Zeiteinheit, der Rosinen pro Kuchen, der Fichten pro Hektar, ...).
- (2) Die Poisson-Verteilung ist ein mathematische Modell, wodurch bei bekannter mittlerer Fehleranzahl  $\mu$  pro Einheit die Wahrscheinlichkeit  $g(x)$  für  $x$  Fehler auf einer Einheit ermittelt wird. Die mittlere Fehleranzahl pro Einheit  $\mu$  ist der (einzige) Parameter der Poisson-Verteilung. Er ist der Erwartungswert der Verteilung.  
Ob tatsächlich angenommen werden kann, dass die Anzahl der Fehler pro Einheit bzw. irgendwelcher Vorkommnisse pro Zählabschnitt poissonverteilt ist, wird durch bestimmte statistische Tests beurteilt.

<sup>18</sup> Siméon Denis Poisson (1781 – 1840), französischer Mathematiker und Physiker

- (3) Wichtig im Zusammenhang mit der Poisson-Verteilung ist, dass stets die Größe der Einheit (des Zählabschnitts) mit angegeben wird! Man erkennt dies am Wort "pro", "je" oder einer ähnlichen Formulierung.
- (4) Wie bei den bisherigen Verteilungen wird auch hier die Verteilungsfunktion  $G(x)$ , also die Wahrscheinlichkeit, höchstens  $x$  Fehler pro Einheit zu finden, vielfach angewendet.
- (5) Rekursionsformel für die Berechnung von  $g(x)$ :

$$g(0) = e^{-\mu}; \quad g(x + 1) = \frac{\mu}{x + 1} \cdot g(x)$$

Die Poisson-Verteilung ist ein oft brauchbares Modell in der Praxis, wenn punktuelle Vorkommnisse (etwa Fehler) im zeitlichen Ablauf betrachtet werden. Voraussetzung für das Auftreten einer poissonverteilten Anzahl von Vorkommnissen pro Einheit ist, dass diese Einheit wie folgt in Untereinheiten zerlegt werden kann:

- Die Wahrscheinlichkeit von mehr als einem Vorkommnis pro Untereinheit ist praktisch null.
- Das Eintreten eines Vorkommnisses in einer Untereinheit ist unabhängig vom Eintreten in jeder anderen.
- Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von einem Vorkommnis pro Untereinheit ist gleich für alle Untereinheiten und nur proportional zur Größe der Untereinheit.

**Beispiel 6.7 : Poisson-Verteilung**

Gegeben sind lackierte Bleche; die Lackfehler pro Blech seien poissonverteilt mit der mittleren Fehlerzahl (dem Erwartungswert)  $\mu = 1,4$  pro Blech. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- a)** genau 0    **b)** genau 2    **c)** höchstens 2    **d)** mindestens 2 fehlerhafte Lackfehler pro Blech vorzufinden?

**Lösung**

Zu **a)**  $g(0) = \frac{1,4^0}{0!} \cdot e^{-1,4} = 0,2466$ . Beachte, dass 0! definitionsgemäß 1 ist.

Zu **b)**  $g(2) = \frac{1,4^2}{2!} \cdot e^{-1,4} = 0,2417$

Zu **c)**  $G(2) = g(0) + g(1) + g(2)$ ;  $g(1) = \frac{1,4^1}{1!} \cdot e^{-1,4} = 0,3452$ ;  
 $G(2) = 0,2466 + 0,3452 + 0,2417 = 0,8335$

Zu **d)**  $1 - G(1) = 1 - [g(0) + g(1)] = 1 - 0,5918 = 0,4082$ .

Voyage 200

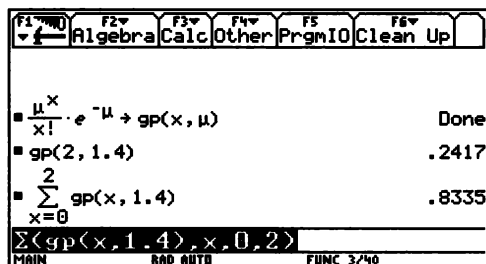


Abb. 6.8 und Abb. 6.9 zeigen die Stabdiagramme zweier Poisson-Verteilungen mit unterschiedlicher durchschnittlicher Fehleranzahl  $\mu$ . Durch diesen Wert ist wieder die x-Koordinate des Schwerpunktes des jeweiligen Stabdiagramms gegeben.

MC

$x := 0, 1 \dots 7 \quad g(x) := \text{dpois}(x, 1.4)$

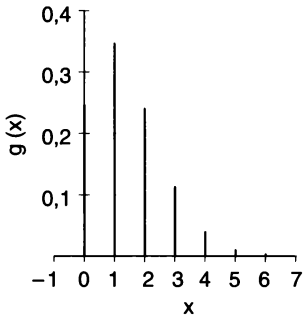


Abb. 6.8 Poisson-Verteilung für  $\mu = 1,4$

$x := 0, 1 \dots 13 \quad g(x) := \text{dpois}(x, 5)$

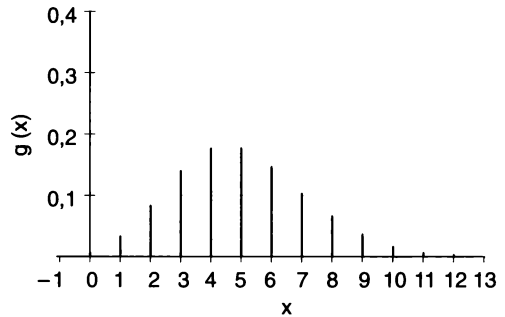
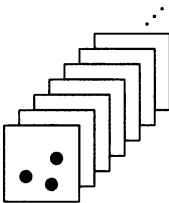


Abb. 6.9 Poisson-Verteilung für  $\mu = 5$

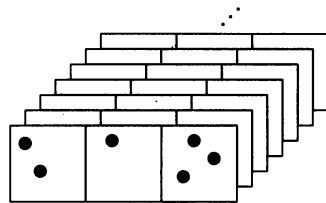
Die Poisson-Verteilung besitzt die folgende wichtige Eigenschaft, die aus ihren Voraussetzungen herleitbar ist:

**Additionssatz der Poisson-Verteilung**

Ist die Fehleranzahl pro Einheit poissonverteilt mit dem Parameter  $\mu$  und fasst man nun zwei, drei, ... Einheiten zu einer neuen Prüfeinheit zusammen (Abb. 6.10), so ist die Fehleranzahl auf dieser neuen Prüfeinheit wieder poissonverteilt mit dem Parameter  $2 \cdot \mu, 3 \cdot \mu, \dots$  D.h. die mittlere Fehleranzahl (der Erwartungswert) erhöht sich im gleichen Maß wie man Einheiten zu einer neuen Einheit zusammenfasst!



Lackfehleranzahl poissonverteilt mit  $\mu$

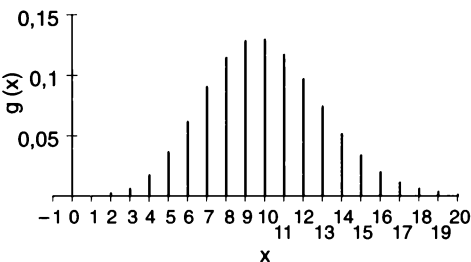


Lackfehleranzahl poissonverteilt mit  $3 \cdot \mu$

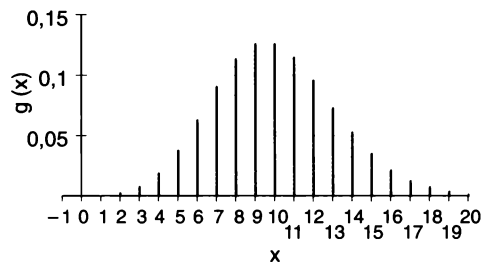
Abb. 6.10 Additionssatz der Poisson-Verteilung

**Die Poisson-Verteilung als Grenzfall der Binomialverteilung**

Neben der Verteilung für die Fehleranzahl pro Einheit findet die Poisson-Verteilung Anwendung als *Näherung für die Binomialverteilung* (und gegebenenfalls in der Folge auch für die hypergeometrische Verteilung).



Binomialverteilung:  $p = 0,05; n = 200$



Poisson-Verteilung: Mittelwert = 10

Abb. 6.11 Poisson-Verteilung als Näherung der Binomialverteilung

**Grenzwertsatz von Poisson**

Für  $n \rightarrow \infty$  und  $p \rightarrow 0$ , wobei jedoch das Produkt  $n \cdot p$  konstant bleibt, geht die Binomialverteilung in die Poisson-Verteilung mit dem Parameter  $\mu = n \cdot p$  über.

Die Binomialverteilung mit den Parametern  $p$  und  $n$  kann daher durch die Poisson-Verteilung mit dem Parameter  $\mu = n \cdot p$  genähert werden, wenn  $n$  groß und  $p$  klein ist (praktisch brauchbar, wenn  $n \geq 50$  und  $p \leq 0,1$ ).

Abb. 6.11 zeigt das Stabdiagramm einer Binomialverteilung mit  $p = 5\%$  und  $n = 200$  und zum Vergleich jenes einer Poisson-Verteilung mit  $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,05 = 10$ .

### Beispiel 6.8 : Näherung der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung

Eine Fertigung von Stanzteilen läuft mit dem gleich bleibenden Ausschussanteil  $p = 4\%$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter  $n = 50$  hintereinander entnommenen Einheiten

a) genau 0      b) genau 2      c) höchstens 2      d) mindestens 2 fehlerhafte Einheiten vorzufinden?

Löse näherungsweise mit Hilfe der Poisson-Verteilung und vergleiche dazu Beispiel 6.5, Seite 243, bzw. Beispiel 6.6, Seite 245.

**Lösung**

Parameter der Poisson-Verteilung:  $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,04 = 2$ .

Zu a)  $g(0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 0,1353$ . Beachte, dass  $0!$  definitionsgemäß 1 ist.

Zu b)  $g(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0,2707$ .

Zu c)  $g(1) = \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 0,2707$ ;  $G(2) = g(0) + g(1) + g(2) = 0,6767$ .

Zu d)  $1 - G(1) = 1 - [g(0) + g(1)] = 1 - 0,4060 = 0,5940$ .

**Aufgaben**

6.27 Bei der Lackierung von PKW-Motorhauben zeigte es sich, dass die Lackfehleranzahl poissonverteilt mit einer mittleren Fehleranzahl  $\mu = 2,1$  pro Motorhaube ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Motorhaube

a) keinen      b) höchstens fünf      c) mindestens zwei Lackfehler besitzt?

6.28 Auf Glasplatten einer bestimmten Art treten immer wieder kleine Luftblasen auf. Ihre Anzahl genügt einer Poisson-Verteilung mit einer mittlere Anzahl von 8 Blasen pro Glasplatte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Fehler dieser Art auf einer Glasplatte vorzufinden?

6.29 Die Zahl der Webfehler pro  $1 \text{ m}^2$  Tuch kann als poissonverteilt mit dem Mittelwert  $0,8$  betrachtet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf  $5 \text{ m}^2$  mehr als 2 Webfehler vorzufinden?

- 6.30** In einer Fertigungsabteilung ist bekannt, dass im Schnitt jedes 200. Stück Ausschuss ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Näherung durch Poisson-Verteilung), dass in einer Tagesproduktion von 1 000 Stück
- a) mindestens ein Stück,                      b) höchstens 5 Stück Ausschuss ist?
- 6.31** Es wird angenommen, dass 0,01 % unter den 20 000 Mitarbeitern eines großen Unternehmens jährlich durch einen Unfall arbeitsunfähig werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Näherung durch die Poisson-Verteilung), dass in einem Jahr mehr als 3 Mitarbeiter arbeitsunfähig werden.
- 6.32** Lose von lackierten Blechen gleicher Art werden auf kleine "Bläschen" geprüft. Erfahrungsgemäß kann eine Poisson-Verteilung der Bläschenanzahl angenommen werden mit einem Mittel von 8 Bläschen pro 100 Bleche. Stichprobenweise entnimmt man 50 Bleche. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf den Blechen dieser Stichprobe höchstens 10 Bläschen zu finden?
- 6.33** Bei der Herstellung von isoliertem Kupferdraht treten je Spule gleicher Drahtlänge im Mittel 3,2 Isolierfehler auf, die als poissonverteilt gelten können. Bis zu welcher Anzahl von Isolierfehlern pro Spule ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % zu rechnen?
- 6.34** Staubpartikel sind ein Problem bei der Herstellung optischer Speichermedien. Die Anzahl der Staubpartikel auf einer Diskette sei poissonverteilt mit einer durchschnittlichen Anzahl von 0,1 pro  $\text{cm}^2$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als 12 Staubpartikel auf einer Diskette von  $100 \text{ cm}^2$  vorzufinden?
- 6.35** The number of telephone calls that arrive at a phone exchange is often assumed to have a Poisson distribution. On the average there are 15 calls per hour. What is the probability that there are
- a) exactly 10 calls per hour?  
b) at least 15 calls per hour?  
c) 10 or less calls in 30 minutes?
- 6.36** The numbers of errors in a textbook follow a Poisson distribution. On the average there are 0,1 errors per page. What is the probability that there are more than 20 errors in 200 pages?
- 6.37** Zu einem Kundenschalter in einem Büro kommen pro Stunde durchschnittlich 8 Kunden. Es kann angenommen werden, dass die Anzahl der Kundenvorsprachen an diesem Schalter poissonverteilt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- a) in einer Stunde genau 4 Kunden,  
b) in zwei Stunden mehr als 25 Kunden kommen?
- 6.38** Ein Installationstechniker eines landesweiten Unternehmens unternimmt eine Fahrt in eine Stadt nur dann, wenn mindestens drei Aufträge aus dieser Stadt vorliegen. Angenommen, die Aufträge folgen einer Poisson-Verteilung mit einer mittleren Anzahl von 0,3 pro Woche und 10 000 Einwohner. Eine Stadt besitzt 100 000 Einwohner. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- a) der Techniker länger als eine Woche nicht in diese Stadt kommt?  
b) eine Person der Stadt, die als Erste einen Auftrag erteilt hat, noch vor Ablauf einer Woche vom Techniker besucht wird?



## Im Überblick: Diskrete Verteilungen



**Wahrscheinlichkeitsverteilungen** beantworten formelmäßig die Frage nach der Wahrscheinlichkeit der Werte oder von Wertebereichen, die **Zufallsgrößen** (beispielsweise die Anzahl fehlerhafter Einheiten in einer Stichprobe aus einem Prüflös) annehmen. Nimmt die Zufallsvariable nur abzählbar endlich oder unendlich viele Werte an, so heißt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung **diskret**.

Zieht man eine Zufallsstichprobe des Umfangs  $n$  aus einem Prüflös (einer Grundgesamtheit) von  $N$  Einheiten, darunter  $d$  fehlerhafte Einheiten, so ist die Zufallsgröße "Anzahl fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe" **hypergeometrisch** verteilt mit den Parametern  $N$ ,  $d$  und  $n$ . Das Ziehen der Stichprobe erfolgt dabei **ohne Zurücklegen** einmal gezogener Einheiten (wie in der Praxis üblich).

Ein **Bernoulli-Versuchsschema** liegt vor, wenn

- (1) ein **Zufallsversuch**, bei dem nur interessiert, ob ein bestimmtes Ereignis  $A$  ("Erfolg", "Treffer") eintritt oder nicht,  $n$ -mal unabhängig durchgeführt wird und
- (2) die **Wahrscheinlichkeit**  $p$  für das Eintreten des Ereignisses  $A$  stets **gleich bleibt**.

Die Zufallsgröße "Anzahl der Versuche, bei denen das Ereignis  $A$  eintritt" ist dann **binomialverteilt** mit den Parametern  $n$  und  $p$ .

Beim **Ziehen** einer Stichprobe aus einem Prüflös **mit Zurücklegen** liegt ein Bernoulli-Versuchsschema vor. Daher ist nun die Anzahl fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe binomialverteilt mit  $p = \frac{d}{N}$ . Da das Ziehen ohne Zurücklegen im Falle  $n < \frac{N}{10}$  durch das Ziehen mit Zurücklegen angenähert werden kann, kann in diesem Fall auch die hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung ersetzt werden.

Besitzt eine **Fertigung eine konstante Ausschussrate**  $p$  und entnimmt man daraus zufällig  $n$  Einheiten, so ist die Anzahl fehlerhafter Einheiten unter den  $n$  Einheiten **binomialverteilt**.

Als ein oft gut brauchbares Modell für die **Verteilung von Fehlern** auf Einheiten (allgemeiner von Vorkommnissen auf Zählabschnitten) gleicher Art gilt die **Poisson-Verteilung**. Sie besitzt nur einen Parameter, ihren Erwartungswert  $\mu$ . Er wird auch als mittlere Fehleranzahl pro Einheit bezeichnet.

## 6.2 Normalverteilung

### 6.2.1 Einführung

Die bisher besprochenen Verteilungen haben gemeinsam, dass danach verteilte Merkmale (Anzahl fehlerhafter Einheiten in einer Stichprobe, Anzahl von Fehlern pro Einheit) nur ganzzahlige Werte haben können. Sie sind Beispiele für *diskrete Verteilungen*. Daneben gibt es auch Merkmale, wie den Durchmesser von Bolzen, ein Abfüllgewicht, der elektrische Widerstand, usw., die *beliebige Werte aus einem Intervall* annehmen können. Merkmale dieser Art werden stetige Zufallsgrößen genannt; dementsprechend spricht man von *stetigen Verteilungen*. Ein besonders wichtiges Beispiel dieser Art ist die **Normalverteilung**.

Sie ist zu erwarten, wenn ein Merkmal (etwa das Gewicht automatisch abgefüllter Stoffe) sich aus einer Summe von vielen, schwachen, zufälligen Einflüssen zusammensetzt. Solche Einflüsse können sein: Auswirkungen von Temperatur und Feuchtigkeit auf Anlage und Material, kleine anhaltende Erschütterungen verschiedener Ursachen, Unregelmäßigkeiten in der Dichte oder Zusammensetzung eines Stoffes ...).

Alle diese Einflüsse können sich zu Merkmalswerten addieren, die sich um eine mittlere Lage häufen und nach kleineren und größeren Werten symmetrisch immer seltener auftreten. Die theoretische Grundlage dieses Sachverhaltes ist der Zentrale Grenzwertsatz, der einfach formuliert wie folgt lautet (Fassung als Satz von LJAPUNOW<sup>19</sup>):

#### Zentraler Grenzwertsatz

Eine stetige Zufallsgröße, die sich als *Summe* sehr vieler unabhängiger Einflussgrößen ergibt, von denen keine dominierend ist, ist näherungsweise normalverteilt.

Neben der Normalverteilung gibt es noch eine Reihe weiterer praktisch wichtiger stetiger Verteilungen. Beispiele dafür sind die Gleichverteilung (Rechtecksverteilung), die Weibull-Verteilung oder die logarithmische Normalverteilung.

#### Simulation: Entstehen einer Normalverteilung:

Beispielsweise vier Würfel werden oftmals geworfen und dabei das Merkmal (die Zufallsgröße) "Augensumme" betrachtet. Jeder Würfel trägt gleichberechtigt zur Augensumme bei. Die Augenzahlen der vier Würfel stellen vier Einflüsse dar, die sich auf das Ergebnis, die Augensumme, auswirken.

Die 4 Würfel werden N-mal geworfen.  $N := 5000 \quad i := 1 \dots N$

Augenzahlen der Würfel beim i-ten Wurf:

$$a_i := 1 + \text{trunc}(\text{rnd}(6)) \qquad b_i = 1 + \text{trunc}(\text{rnd}(6))$$

$$c_i := 1 + \text{trunc}(\text{rnd}(6)) \qquad d_i = 1 + \text{trunc}(\text{rnd}(6))$$

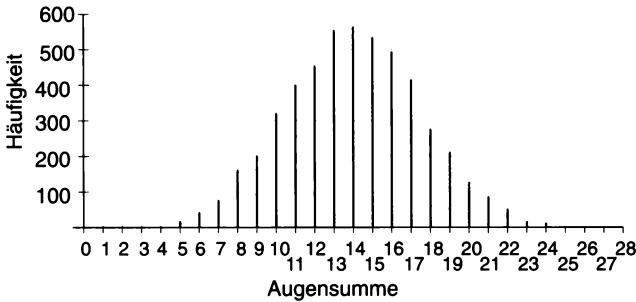
Augensumme beim i-ten Wurf:  $s_i = a_i + b_i + c_i + d_i$

$j := 1 \dots 25$  Klassengrenzen:  $\text{kgrenze}_j := j$

Vektor der absoluten Häufigkeiten:  $h := \text{hist}(\text{kgrenze}, s)$

<sup>19</sup> A. LJAPUNOW, (1857 – 1918), russischer Mathematiker

MC



Es wird selten vorkommen, dass alle Würfel nur kleine oder nur große Augenzahlen haben. Die geringste mögliche Augensumme ist vier, die höchste 24. Häufig werden Augensummen in der Mitte dieser extremen Werte vorkommen.

Erhöht man die Anzahl der Wurf- folgen weiter, so zeigt sich immer besser ein symmetrisches Bild. Nimmt man statt vier Würfel mehr

Würfel (d.h. es wirken mehr Einflüsse), so ergibt sich immer besser ein glockenförmiges Aussehen als Einhüllende der Stäbe.

Die "Dichte" der Merkmalswerte wird bei Vorliegen einer Normalverteilung durch die GAUSS'sche Glockenkurve zum Ausdruck gebracht, die von C. F. GAUSS (1777 – 1855) bei Untersuchungen über Messfehler gefunden wurde. Die Gleichung dieser Kurve, man spricht von der Gleichung der **Dichtefunktion einer Normalverteilung**, lautet:

$$g(x) = g(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Sie besitzt die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ . Zur Diskussion dieser Funktion siehe "Ingenieur- Mathematik 3", Seite 162. Zusammenfassend gilt (Abb. 6.12):

- Maximum an der Stelle  $\mu$ ; dieser Parameter wird **Erwartungswert** oder **Mittelwert** (auch Prozess- oder Fertigungslage) genannt.
- Abnahme der Dichtefunktion nach kleineren und größeren Werten symmetrisch zu  $\mu$ ;
- Glockenförmiger Verlauf mit Wendepunkten an den Stellen  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$ .

Der Parameter  $\sigma$  heißt **Standardabweichung** und ist als Abstand der Wendepunkt- stellen von der Maximalstelle  $\mu$  ein Maß für die "Breite" der Glocke.

Statt der Standardabweichung  $\sigma$  wird auch öfter ihr Quadrat, die **Varianz**  $\sigma^2$ , als zweiter Parameter einer Normalverteilung angegeben.

- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = 0$

*Es ist zu achten, ob die Wörter "Mittelwert" und "Standardabweichung" sich auf eine Normal- verteilung oder auf eine Stichprobe beziehen. Die Bedeutung ist unterschiedlich!*

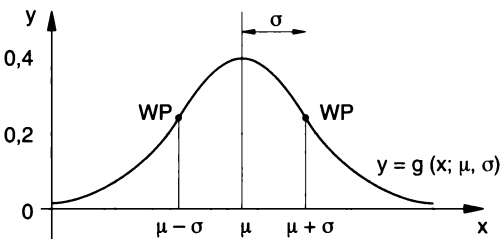
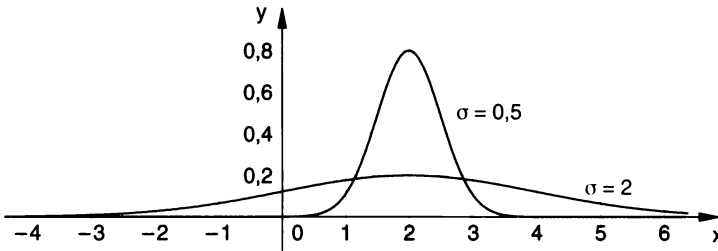


Abb. 6.12 GAUSS'sche Glockenkurve

Man kann ferner zeigen, dass der **Flächeninhalt unter jeder Glockenkurve gleich 1** ist. Daraus folgt sofort: *Eine schmale Glocke ( $\sigma$  klein) ist hoch, eine breite Glocke ( $\sigma$  groß) ist niedrig!* ( Abb. 6.12) . Der Parameter  $\mu$  legt die *Lage*,  $\sigma$  die *Form* der Glocke fest.

Abb. 6.13 Glockenkurven mit unterschiedlichen Werten für  $\sigma$ 

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsgröße oder allgemeiner eine stetige Zufallsgröße einen *bestimmten* Wert  $x$  hat, ist null.

Nehmen wir an, dass beispielsweise eine Abfüllmenge jeden Wert zwischen

745 ml und 755 ml annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass dann eine Abfüllmenge exakt 749 ml = 749,000... ml ausmacht, muss null sein. Wäre das nicht der Fall und die Wahrscheinlichkeit eine wenn auch kleine Zahl, so würden die Wahrscheinlichkeiten aller Abfüllgewichte zwischen 745 ml und 755 ml über alle Grenzen wachsen, also unendlich sein, da es in diesem Intervall unendlich viele Abfüllmengen gibt.

So kann man bei stetigen Zufallsgrößen wie Abfüllmengen, Bolzendurchmessern und dgl. sinnvollerweise nur fragen, wie wahrscheinlich eine solche Größe in einem bestimmten **Intervall** liegt. Dabei geht man wieder von der Verteilungsfunktion  $G(x) = G(x; \mu, \sigma)$  aus, die – genauso wie bei den bisher behandelten Verteilungen die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Wert eines normalverteilten Merkmals höchstens gleich  $x$  ist. Es gilt:

### Wahrscheinlichkeit und Fläche unter der Glockenkurve

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Merkmalswert **höchstens gleich**  $x_0$  ist, ist gleich dem Inhalt der Fläche  $G(x_0; \mu, \sigma)$  unter der Glockenkurve von  $-\infty$  bis  $x_0$  (Abb. 6.14).

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Merkmalswert **zwischen  $a$  und  $b$**  liegt, ist gleich  $G(b; \mu, \sigma) - G(a; \mu, \sigma)$ , also gleich dem Inhalt der Fläche unter der Glockenkurve von  $a$  bis  $b$  (Abb. 6.15):

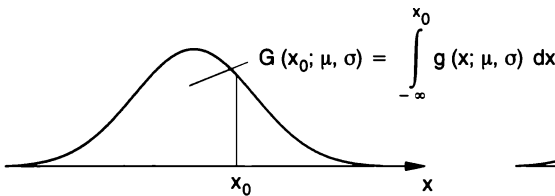


Abb. 6.14 Verteilungsfunktion als Fläche unter der Glockenkurve

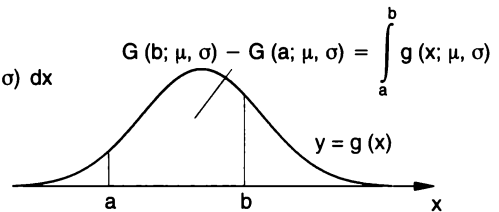
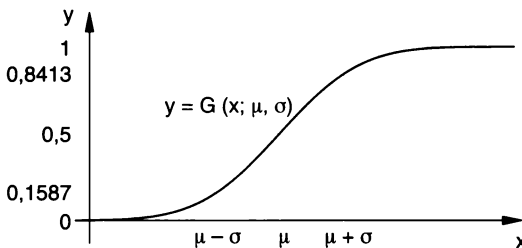


Abb. 6.15 Fläche unter der Glocke und Wahrscheinlichkeit

Die Dichtefunktion  $g(x; \mu, \sigma)$  ist nur für ein genaues Zeichnen der Glocke (wenn gewünscht) von Bedeutung; zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten dient ausschließlich die Verteilungsfunktion  $G(x; \mu, \sigma)$ .

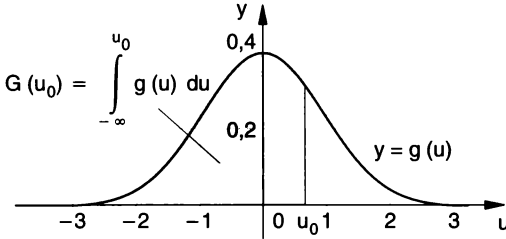
Abb. 6.16 Graph der Verteilungsfunktion  $G(x; \mu, \sigma)$ 

Der Graph der Verteilungsfunktion  $G(x; \mu, \sigma)$  besitzt einen monoton wachsenden S-förmigen Verlauf.  $G(x; \mu, \sigma)$  nimmt alle Werte zwischen 0 und 1 an. Diesen Werten nähert sie sich asymptotisch für  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow \infty$ . Die Berechnung von  $G(x; \mu, \sigma)$  als Integral im üblichen Sinn ist nicht möglich, da dieses Integral keine elementare Stammfunktion besitzt.

**Standardisierte Normalverteilung oder u-Verteilung**

Eine besondere rechentechnische Rolle unter den Normalverteilungen spielt jene mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ . Sie heißt *standardisierte Normalverteilung* oder kurz *Standardnormalverteilung*. Zu ihrer Kennzeichnung wird statt "x" der Buchstabe "u" verwendet, weshalb diese besondere Normalverteilung auch *u-Verteilung* genannt wird. Wir vereinbaren als Bezeichnung der Verteilungsfunktion kurz  $G(u)$  statt ausführlich  $G(u; 0, 1)$ . Für jede andere Normalverteilung müssen  $\mu$  und  $\sigma$  angeführt werden.

Die Dichte- und die Verteilungsfunktion der u-Verteilung lauten also (Abb. 6.17):



$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{bzw.}$$

$$G(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_0} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

In der mathematischen Literatur findet sich als Bezeichnung der Dichte- und Verteilungsfunktion meist  $\varphi(z)$  bzw.  $\Phi(z)$ .

Abb. 6.17 Dichte- und Verteilungsfunktion der u-Verteilung

Aus Abb. 6.18 ergibt sich die folgende Symmetrieeigenschaft für die Verteilungsfunktion:

$$G(-u) = 1 - G(u)$$

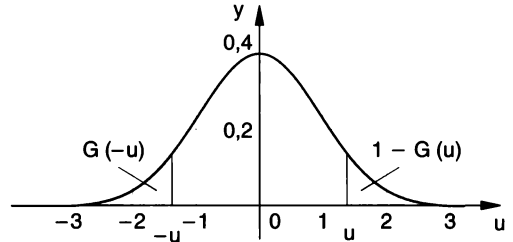


Abb. 6.18 Verteilungsfunktionswert für negatives u

Die Bedeutung der standardisierten Normalverteilung liegt u.a. darin, dass ein Verteilungsfunktionswert  $G(x; \mu, \sigma)$  einer *beliebigen* Normalverteilung sehr einfach in einen Verteilungsfunktionswert  $G(u)$  der u-Verteilung übergeführt werden kann. Dadurch braucht nur eine Berechnungsmöglichkeit für  $G(u)$  etwa in Form einer "u-Tabelle" geschaffen zu werden. Es gilt nämlich, wie gezeigt werden kann:

**Standardisierungsformel:**  $G(x; \mu, \sigma) = G(u)$  mit  $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$  (Abb. 6.19)

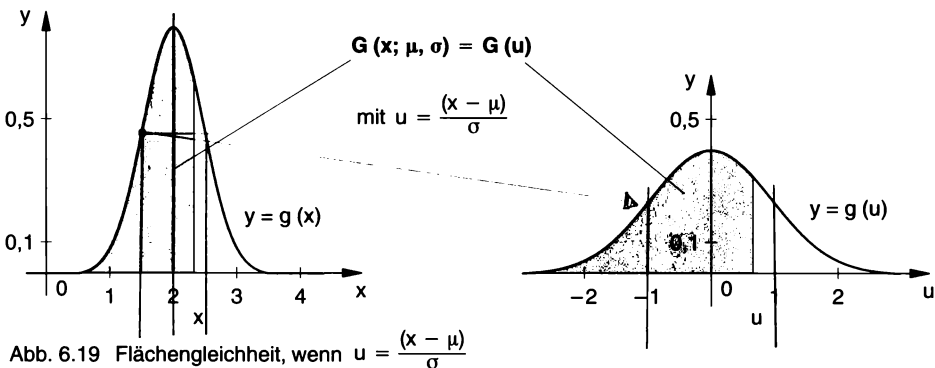


Abb. 6.19 Flächengleichheit, wenn  $u = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$

**Beispiel 6.9 : Ermittlung der Verteilungsfunktion G(u)**

Bestimme den Wert der Verteilungsfunktion der u-Verteilung an der Stelle  $u = 1$ .

**Lösung**

Die Integration kann mit Hilfe der Simpsonformel erfolgen.

$$\text{Da } G(1) = G(0) + \int_0^1 g(u) \, du = 0,5 + \int_0^1 g(u) \, du,$$

ergibt sich (n ist die Anzahl der Doppelintervalle):

$n = 1$  (Keplerformel):

$$G(1) = 0,5 + \frac{1-0}{6} \cdot [g(0) + 4 \cdot g(0,5) + g(1)] = 0,841529\dots$$

$n = 2$ :

$$G(1) = 0,5 + \frac{1-0}{12} \cdot [g(0) + 4g(0,25) + 2g(0,5) + 4g(0,75) + g(1)] = 0,841355\dots$$

$n = 4$ :

$$G(1) = 0,5 + \frac{1-0}{24} \cdot [g(0) + 4g(0,125) + 2g(0,25) + \dots + 4g(0,875) + g(1)] = 0,841345\dots$$

Eine weitere Erhöhung der Doppelintervalle bringt auf 4 Nachkommastellen keine Änderung der Genauigkeit. Somit erhalten wir:  $G(1) = 0,8413$ .

Die Bestimmung der Verteilungsfunktion erfolgt in der Praxis häufig mit Hilfe einer Tabelle (Tabelle 1). Es gibt auch Näherungsformeln für  $G(u)$ . So gilt mit einem absoluten Fehler

$$\text{kleiner als } 1,8 \cdot 10^{-4}: G(u) \approx \frac{e^{2z}}{1 + e^{2z}}; \quad z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot u \cdot (1 + 0,044715 \cdot u^2).$$

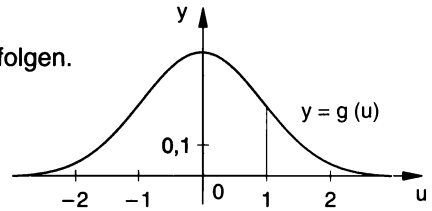


Abb. 6.20

**Beispiel 6.10 : Grundlegende Berechnungen**

Messwerte sind normalverteilt mit dem Erwartungswert (Mittelwert)  $\mu = 6$  und der Standardabweichung  $\sigma = 2$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert

a) höchstens 7 ist, b) mindestens 3 ist, c) zwischen 4,3 und 8 liegt?

**Lösung**

Zum besseren Verständnis wie auch als eine gewisse Rechenkontrolle empfiehlt es sich, die Glockenkurve zu skizzieren. Dabei zeichnet man am besten zuerst die Glocke; danach kennzeichnet man ihre Maximumstelle mit  $\mu$  und ihre Wendestellen mit  $\mu - \sigma$  bzw.  $\mu + \sigma$ .

Zur Abschätzung, ob ein Rechenergebnis sinnvoll sein kann, benützt man, dass die Fläche unter der Glocke (von  $-\infty$  bis  $+\infty$ ) gleich 1 ist und dass die Fläche von  $-\infty$  bis  $\mu$  gleich 0,5 ist.

Die numerische Bestimmung der  $G(u)$ -Werte kann mit Tabelle 1 erfolgen.

Zu a)

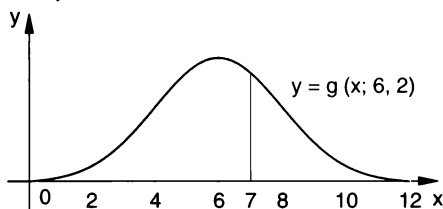


Abb. 6.21

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Inhalt der Fläche unter der Glocke bis  $x = 7$ :

$$G(7; 6, 2) = G\left(\frac{7-6}{2}\right) = G(0,5) = 0,6915 = 69,15\%.$$

Zu b)

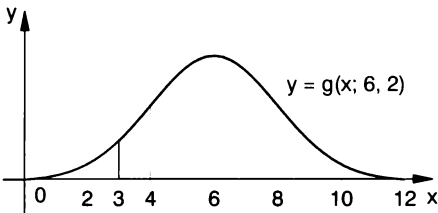


Abb. 6.22

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Flächeninhalt unter der Glocke ab  $x = 3$ . Diese Fläche ist gleich  $1 - G(3; 6, 2)$ .

$$1 - G(3; 6, 2) = 1 - G\left(\frac{3-6}{2}\right) = 1 - G(-1,5) = 1 - [1 - G(1,5)] = G(1,5) = 0,9332 = 93,32\%.$$

Zu c)

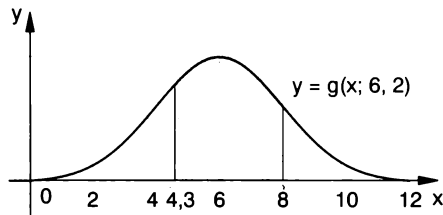


Abb. 6.23

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Flächeninhalt unter der Glocke zwischen 4,3 und 8.

$$\begin{aligned} G(8; 6, 2) - G(4,3; 6, 2) &= \\ &= G\left(\frac{8-6}{2}\right) - G\left(\frac{4,3-6}{2}\right) = G(1) - G(-0,85) = \\ &= G(1) - [1 - G(0,85)] = 0,8413 - 1 + 0,8023 = \\ &= 64,37\%. \end{aligned}$$

Zwischen den Stellen  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$  liegt bei *jeder* Normalverteilung der *gleiche* Anteil von Merkmalswerten. Das Gleiche gilt für  $\mu \pm 2\sigma$  sowie  $\mu \pm 3\sigma$ .

**Beispiel 6.11 : Anteil zwischen  $\mu \pm \sigma$ ,  $\mu \pm 2\sigma$  bzw.  $\mu \pm 3\sigma$**

Gegeben ist ein normalverteiltes Merkmal, etwa eine Dosierungsmenge, der Durchmesser von Bolzen oder dgl. Welcher Anteil der Merkmalswerte liegt zwischen

- a)  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$     b)  $\mu - 2\sigma$  und  $\mu + 2\sigma$     c)  $\mu - 3\sigma$  und  $\mu + 3\sigma$ ?

**Lösung**

Zur Erinnerung: Wahrscheinlichkeit  $\approx$  Anteil (einer großen Anzahl von Merkmalswerten).

Zu a)

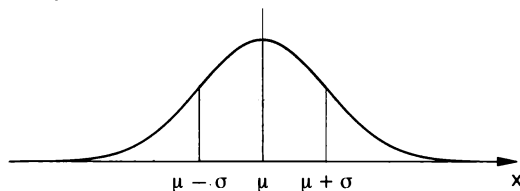


Abb. 6.24 Etwa 68% aller Merkmalswerte

$$\begin{aligned} G(\mu + \sigma; \mu, \sigma) - G(\mu - \sigma; \mu, \sigma) &= \\ &= G\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= G(1) - G(-1) = G(1) - [1 - G(1)] = \\ &= 2 \cdot G(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = \\ &= 0,6826 \approx 68\%. \end{aligned}$$

Zu b)

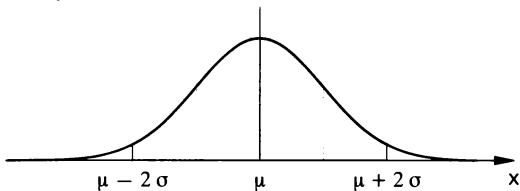


Abb. 6.25 Etwa 95% aller Merkmalswerte

$$\begin{aligned} G(\mu + 2\sigma; \mu, \sigma) - G(\mu - 2\sigma; \mu, \sigma) &= \\ &= G\left(\frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= G(2) - G(-2) = 2 \cdot G(2) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9545 \approx 95\%. \end{aligned}$$

Zu c)

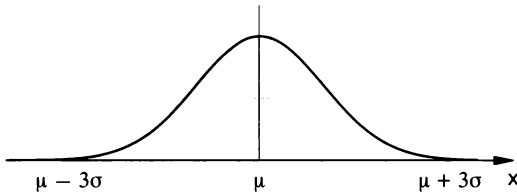


Abb. 6.26 Fast alle Merkmalswerte

$$\begin{aligned} G(\mu + 3\sigma; \mu, \sigma) - G(\mu - 3\sigma; \mu, \sigma) &= \\ &= G\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= G(3) - G(-3) = 2 \cdot G(3) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0,9987 - 1 = 0,9974 \approx 99,7\%. \end{aligned}$$

Man kann also erwarten, dass sich eine große Anzahl normalverteilter Merkmalswerte wie folgt verteilt:

- Etwa 68% oder  $\frac{2}{3}$  aller Werte liegen zwischen  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$ .
- Etwa 95% aller Werte liegen zwischen  $\mu - 2\sigma$  und  $\mu + 2\sigma$ .
- Etwa 99,7% oder **fast alle Werte** liegen zwischen den **3  $\sigma$ -Grenzen**  $\mu - 3\sigma$  und  $\mu + 3\sigma$  (man kann auch sagen, nur etwa drei von 1000 Werten liegen außerhalb der 3  $\sigma$ -Grenzen).

Es ist vorteilhaft, sich diese Anteile zu merken. Damit ist auch öfter eine gewisse Kontrolle von Rechenergebnissen möglich!

### Quantile der Standardnormalverteilung

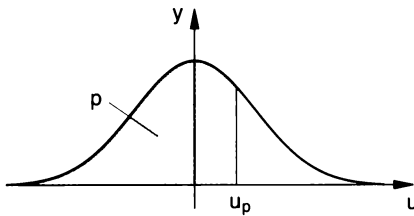


Abb. 6.27 p-Quantil der u-Verteilung

Wir geben nun umgekehrt einen Wert  $p$  für die Verteilungsfunktion  $G(u)$  vor und fragen nach dem zugehörigen  $u$ -Wert (Abb. 6.27). Dieser  $u$ -Wert wird mit  $u_p$  bezeichnet und heißt **p-Quantil** der  $u$ -Verteilung:  $G(u_p) = p$ .  $u_p$  ist also jener  $u$ -Wert, bei dem gerade das "Quantum"  $p$  des Flächeninhaltes unter der Glocke, ausgehend von  $-\infty$ , erreicht wird.

Die Bestimmung der Quantile  $u_p$  erfolgt mit Tabelle 1. Eine näherungsweise Berechnung von  $u_p$ ,  $p \geq 0,5$ , mit einem absoluten Fehler kleiner als  $4,5 \cdot 10^{-4}$  ist wie folgt möglich:

$$u_p \approx t - \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3} \quad \text{mit } t = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - p)} \quad \text{und}$$

$$a_0 = 2,515517, \quad a_1 = 0,802853, \quad a_2 = 0,010328$$

$$b_1 = 1,432788, \quad b_2 = 0,189269, \quad b_3 = 0,001308$$

Für  $p < 0,5$  setze  $u_p = -u_{1-p}$ .

### Beispiel 6.12 : Umgekehrte Fragestellung

Die Länge von Wellen ist normalverteilt mit  $\mu = 800,00$  mm und  $\sigma = 3,00$  mm. Ermittle jenen (symmetrisch um  $\mu$  gelegenen) Bereich, in den erwartungsgemäß 95% aller Längenwerte fallen.

#### Lösung

Wir bezeichnen den unteren Rand des gesuchten Bereichs mit  $\mu - c$ , den oberen Rand mit  $\mu + c$  (Abb. 6.28).

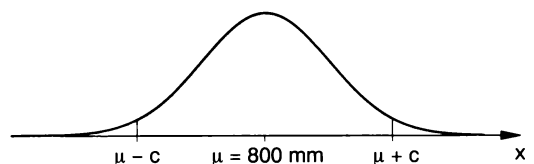


Abb. 6.28



Aus Beispiel 6.11 b), Seite 258, wissen wir, dass etwas über 95% aller Merkmalswerte bei Vorliegen einer Normalverteilung zwischen  $\mu - 2\sigma$  und  $\mu + 2\sigma$  liegen.  $c$  wird daher etwas kleiner als 2 sein müssen.

Wenn 5% außerhalb des erwähnten Bereichs liegen, liegen 2,5% der Werte rechts bzw. 97,5% links von  $\mu + c$ . Daher:  $G(\mu + c; \mu, \sigma) = G\left(\frac{\mu + c - \mu}{\sigma}\right) = G\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 0,975$ .

Es liegt nun die umgekehrte Aufgabe vor: gegeben ist ein G-Wert, gesucht ist der zugehörige u-Wert, hier also das Quantil  $u_{0,975}$ . Aus Tabelle 1 liest man ab:  $u_{0,975} = 1,960$ ; daher:

$$\frac{c}{\sigma} = 1,96 \Rightarrow c = 1,96 \cdot \sigma = 5,88 \text{ mm.}$$

Der gesuchte Bereich lautet daher: [794,12 mm; 805,88 mm].

### Beispiel 6.13 : Vertiefende Berechnungen

Ein Baustoff wird automatisch abgefüllt. Die Füllmasse ist normalverteilt mit der Standardabweichung  $\sigma = 0,20$  kg. Vorgeschrieben ist ein Toleranzbereich von 49,20 kg bis 50,80 kg.

- a) Wie viel Prozent liegen nicht im Toleranzbereich, wenn  $\mu = 49,50$  kg?
- b) In welchem Bereich muss  $\mu$  liegen, wenn höchstens 1% außerhalb des Toleranzbereiches liegen darf?

#### Lösung

Zu a) Toleranzunterschreitender Anteil = Inhalt der Fläche unter der Glockenkurve bis zum unteren Grenzwert UGW:

$$G(49,2; \mu, \sigma) = G\left(\frac{49,2 - 49,5}{0,2}\right) = G(-1,5) = 1 - G(1,5) = 0,0668 \approx 6,7\%.$$

Toleranzüberschreitender Anteil = Inhalt der Fläche unter der Glockenkurve bis zum oberen Grenzwert OGW. Schon aus Abb. 6.29 wird nahegelegt, dass dieser Anteil praktisch null ist:

$$G(50,8; \mu, \sigma) = 1 - G\left(\frac{50,8 - 49,5}{0,2}\right) = 1 - G(6,5) = 1 - 1,0000 = 0,0000.$$

Ein u-Wert 6,5 findet sich nicht mehr in der Tabelle 1; diese enden oft bei etwa  $u = 4$ , wo  $G(u)$  auf vier Nachkommastellen genau 1,0000 ist.

Der Anteil der Füllmassenwerte außerhalb des Toleranzbereiches ist also 6,7%.

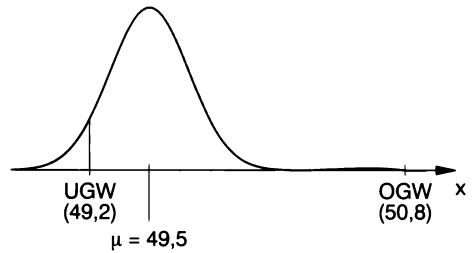


Abb. 6.29

Zu b)

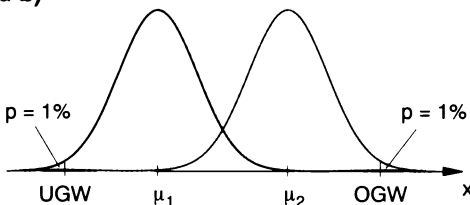


Abb. 6.30

$\mu_1$  ist der unterste noch mögliche Mittelwert,  $\mu_2$  der oberste.  $\mu_1$  liegt gleich weit entfernt von UGW = 49,20 kg wie  $\mu_2$  von OGW = 50,80 kg.

Wir berechnen  $\mu_2$ . Liegt  $\mu$  schon nahe dem OGW, so gibt es keinen nennenswerten Anteil, der den unteren Grenzwert UGW unterschreitet. Wenn 1 % der Merkmalswerte bei  $\mu = \mu_2$  den OGW überschreiten, liegen 99% darunter:

$$G(50,8; \mu_2, \sigma) = G\left(\frac{50,8 - \mu_2}{0,2}\right) = 0,99 \Rightarrow u_{0,99} = \frac{50,8 - \mu_2}{0,2} = 2,326 \text{ oder } \mu_2 = 50,33 \text{ kg.}$$

$$\mu_1 = 49,20 \text{ kg} + 0,47 \text{ kg} = 49,67 \text{ kg.}$$

$\mu$  muss also zwischen 49,67 kg und 50,33 kg liegen.

## Aufgaben

**6.39** Zeichne die Dichtekurven  $g(x; \mu, \sigma)$  einer Normalverteilung für  $\mu = 5$ , wenn

- a)**  $\sigma = 1$       **b)**  $\sigma = 2$       **c)**  $\sigma = 0,5$ .

Über welchen symmetrisch zu  $\mu$  liegenden Intervallen liegt jeweils 99,7% der Fläche unter der Dichtekurve, d.h. sind die Werte des betreffenden Merkmals praktisch sicher anzutreffen?

**6.40** Bestimme die p-Quantile  $u_p$  der standardisierten Normalverteilung (u-Verteilung) für

- a)**  $p = 0,5$    **b)**  $p = 0,6$    **c)**  $p = 0,9$    **d)**  $p = 0,975$    **e)**  $p = 0,1$    **f)**  $p = 0,025$

**6.41** Messwerte sind normalverteilt mit  $\mu = 50$  und  $\sigma = 5$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert

- a)** höchstens 60,   **b)** mindestens 42,   **c)** genau 51,   **d)** zwischen 47 und 53 ist?  
**e)** weniger als 8 vom Mittelwert  $\mu$  abweicht?

**6.42** Bei der Fertigung von Wellen erwies sich deren Länge in guter Näherung als normalverteilt mit  $\mu = 250,00$  mm und  $\sigma = 0,15$  mm. Welcher Anteil der Fertigung

- a)** liegt unterhalb von 249,70 mm?  
**b)** liegt zwischen 249,80 mm und 250,10 mm?  
**c)** ist größer als 250,35 mm?  
**d)** weicht mehr als 0,35 mm vom Mittelwert  $\mu$  ab?

**6.43** Das Abfüllgewicht von Päckchen ist normalverteilt mit  $\mu = 249$  g und  $\sigma = 2$  g. Vorgegeben ist ein Toleranzbereich von  $(250 \pm 5)$  g). Welcher Anteil der Päckchen liegt hinsichtlich seines Abfüllgewichtes außerhalb des Toleranzbereiches?

**6.44** The reaction time of a driver is normally distributed with a mean of approximately 0,6 s and a standard deviation of 0,08 s.

- a)** What is the probability that the reaction time of the driver exceeds 0,8 s?  
**b)** What is the reaction time that is exceeded only with a probability of 1%?

**6.45** Zwei Maschinen  $M_1$  und  $M_2$  fertigen Drehteile der gleichen Art. Für deren Durchmesser ist ein Toleranzbereich  $(250,0 \pm 2,0)$  mm vorgeschrieben. Die Durchmesser können in guter Näherung als normalverteilt angesehen werden und zwar bei  $M_1$  mit  $\mu_1 = 249,0$  mm und  $\sigma_1 = 1,0$  mm, bei  $M_2$  mit  $\mu_2 = 249,5$  mm und  $\sigma_2 = 1,5$  mm. Welche Maschine hat den höheren Ausschussanteil?

- 6.46** Elektrische Widerstände sind normalverteilt mit  $\mu = 200 \Omega$  und  $\sigma = 10 \Omega$ . Gefordert ist die Einhaltung eines Mindestwertes von  $182 \Omega$  und eines Höchstwertes von  $210 \Omega$ . Wie viele Widerstände sind aus einem Vorrat von 8 000 Widerständen brauchbar?
- 6.47** Der elektrische Widerstand eines elektronischen Bauteils ist normalverteilt mit  $\mu = 100 \Omega$  und  $\sigma = 5 \Omega$ .
- Wie viele dieser Bauteile halten einen Mindestwert von  $90 \Omega$  ein?
  - Welcher Widerstandswert wird nur noch von 1 % der Bauteile übertroffen?
  - Ermittle jenen symmetrisch um  $\mu$  gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 90 % der Widerstandswerte aller Bauteile fallen!
- 6.48** Bei der Fertigung von Wellen erwies sich deren Durchmesser normalverteilt mit  $\mu = 231,0 \text{ mm}$  und  $\sigma = 1,0 \text{ mm}$ . Für den Durchmesser ist ein Höchstwert von  $232,5 \text{ mm}$  vorgeschrieben.
- Welcher Anteil übersteigt den Höchstwert?
  - Welchen Wert darf die Standardabweichung  $\sigma$  höchstens haben, sodass bei  $\mu = 231,0 \text{ mm}$  der Überschreitungsanteil höchstens 0,5 % ist?
  - Ermittle bei  $\sigma = 1,0 \text{ mm}$  jenen symmetrisch um  $\mu$  gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % der Durchmesserwerte aller Wellen fallen!
- 6.49** Die Abfüllmasse eines chemischen Stoffes ist normalverteilt mit  $\sigma = 0,1 \text{ g}$ . Vorgegeben ist ein Höchstmasse von  $10,4 \text{ g}$ . Wie groß darf  $\mu$  höchstens sein, wenn der Überschreitungsanteil 1 % nicht übersteigen darf?
- 6.50** Die Reißlast eines bestimmten Drahttyps ist normalverteilt mit  $\mu = 100,0 \text{ N}$ . Wie groß darf  $\sigma$  höchstens sein, wenn bei einem vorgeschriebenen unteren Grenzwert von  $90,0 \text{ N}$  der Unterschreitungsanteil höchstens 1 % sein darf?
- 6.51** Für eine Dosiermenge gilt ein oberer Grenzwert von  $20,15 \text{ g}$ . Die Dosiermenge kann als normalverteilt mit  $\mu = 20,00 \text{ g}$  und  $\sigma = 0,05 \text{ g}$  angesehen werden.
- Wie groß ist der Überschreitungsanteil?
  - Wie groß darf (bei unverändertem  $\mu$ ) die Standardabweichung  $\sigma$  höchstens sein, wenn der Überschreitungsanteil 2 % nicht übersteigen darf?
- 6.52** The fill volume of an automatic filling machine for filling cans is normally distributed with a standard deviation of  $0,005 \text{ l}$ . At what value should the mean be set so that 99,5 % of all cans exceed  $0,3 \text{ l}$ ?
- 6.53** Toleranzfestlegung: Für die Verschiebung der Fertigungslage  $\mu$  eines normalverteilten Längenmaßes um  $2 \sigma$  aus der Mitte des Toleranzbereiches wird ein Ausschussanteil von 4 % akzeptiert. Wie groß müsste dann die Toleranz mindestens sein, wenn  $\sigma = 0,02 \text{ mm}$  ist?

## 6.2.2 Das Wahrscheinlichkeitsnetz

Die Verteilungsfunktion  $G(x; \mu, \sigma)$  jeder Normalverteilung wird im so genannten Wahrscheinlichkeitsnetz als Gerade dargestellt, was einfache graphische Untersuchungen ermöglicht. Um dieses herzustellen, geht man von der Darstellung der Verteilungsfunktion in Abb. 6.16, Seite 255 aus. Man verändert nun die Skala der y-Achse (Abb. 6.31) derart, dass der S-förmig gekrümmte Graph zu einer Geraden gestreckt wird. Abb. 6.32 zeigt ein Wahrscheinlichkeitsnetz mit einer Geraden als Graph von  $G(x; \mu, \sigma)$ .

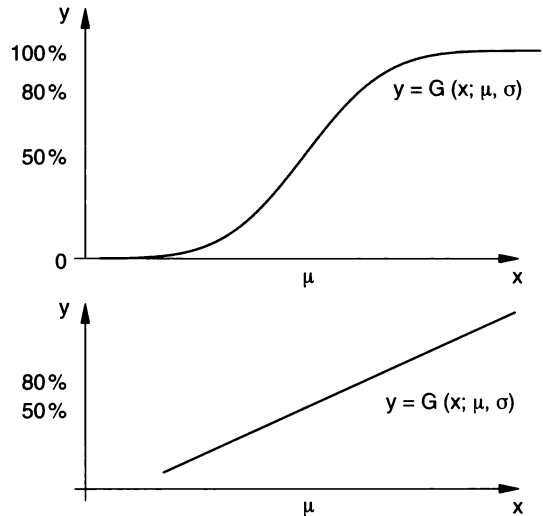


Abb. 6.31 Entstehung des Wahrscheinlichkeitsnetzes

Um dies zu erreichen, müssen die Abstände auf der y-Achse von der 50%-Linie nach oben und nach unten immer mehr gedehnt werden. Der Leitgedanke ist grundsätzlich gleich wie bei der Erstellung einer logarithmischen Teilung einer Achse. Führt man eine solche auf der y-Achse durch, wird bekanntlich auch der Graph einer besonderen Funktion zu einer Geraden gestreckt, nämlich der einer Exponentialfunktion.

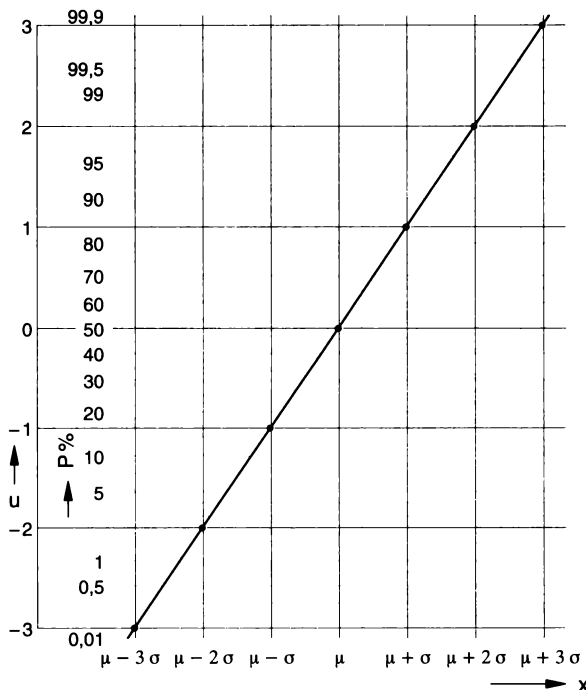


Abb. 6.32 Wahrscheinlichkeitsnetz

Die graphische Darstellung von  $G(x; \mu, \sigma)$  ist eine Gerade, die die 50%-Linie an der Stelle  $x = \mu$  schneidet (Abb. 6.32). Ein weiterer Punkt ergibt sich, wenn  $x = \mu + \sigma$  ist; dort schneidet die Gerade die 84%-Linie (genauer 84,13%). Dies deshalb, weil  $G(\mu + \sigma; \mu, \sigma) = 0,8413$ .

Die x-Achse ist vor dem Zeichnen der die Verteilungsfunktion  $G(x; \mu, \sigma)$  darstellenden Geraden zu skalieren.

### Beispiel 6.14 Lösung mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes

Ein Baustoff wird automatisch abgefüllt. Die Füllmasse ist normalverteilt mit der Standardabweichung  $\sigma = 0,20$  kg. Vorgeschrieben ist ein Mindestgewicht von 49,8 kg. Wie groß ist der Unterschreitungsanteil  $p$ , wenn  $\mu = 50,1$  kg wäre? Löse mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes.

#### Lösung

Man zeichnet (Abb. 6.33) die Verteilungsfunktion  $G(x; \mu, \sigma)$  als Gerade durch zwei Punkte, etwa  $P_1$  ( $\mu/50\%$ ) und  $P_2$  ( $\mu + 2\sigma/99,72\%$ ). Zur Kontrolle kann ein dritter Punkt  $P_3$  dienen.

An der Stelle  $x = 49,8$  kg liest man ab:  $G \approx 7\%$ .

Lösung rechnerisch:

$$\begin{aligned} p &= G(49,8; \mu, \sigma) = \\ &= G\left(\frac{49,8 - 50,1}{0,2}\right) = \\ &= G(-1,5) = 1 - G(1,5) = \\ &= 1 - 0,9332 = \\ &= 0,0668 \approx 6,7\%. \end{aligned}$$

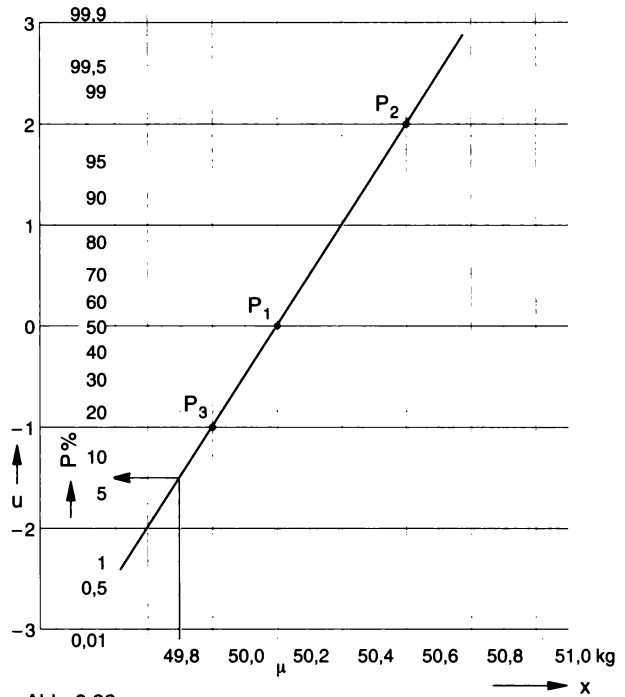


Abb. 6.33

#### Aufgaben

Löse mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes

6.54 Aufgabe 6.41

6.55 Aufgabe 6.43

6.56 Aufgabe 6.47

6.57 Aufgabe 6.49

#### 6.2.3 Die Normalverteilung als Näherung

Die Normalverteilung kann unter bestimmten Voraussetzungen andere Verteilungen annähern. Davon wird besonders bei der *Binomial*- und auch bei der *Poisson-Verteilung* Gebrauch gemacht, was erhebliche rechentechnische Vorteile bringt.

Ohne Begründung wird angeführt, dass unter der Voraussetzung  $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$  die Verteilungsfunktion  $G_{\text{Bin}}(x; n, p)$  der Binomialverteilung praktisch ausreichend genau durch die

Verteilungsfunktion  $G(x; \mu, \sigma)$  der Normalverteilung mit  $\mu = n \cdot p$  und  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$  genähert werden kann. Nun kann eine binomialverteilte Zufallsgröße nur die Werte  $x = 0, 1, 2, \dots, n$  annehmen. Die näherungsweise Berechnung der Verteilungsfunktion  $G_{\text{Bin}}(x; n, p)$  kann dadurch verbessert werden, dass man in der Verteilungsfunktion der Normalverteilung  $x$  durch den Zwischenwert  $x + 0,5$  ersetzt ("Stetigkeitskorrektur").

Auch die Poisson-Verteilung kann unter bestimmten Voraussetzungen durch die Normalverteilung genähert werden. Dies ist praktisch ausreichend genau der Fall, wenn die mittlere Anzahl  $\mu$  von Fehlern pro Einheit größer als 9 ist. Bei Verwendung der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ( $u$ -Verteilung) kann man daher formulieren:

### Näherung durch die Normalverteilung

**Binomialverteilung** (Parameter  $p, n$ ):

$$G_{\text{Bin}}(x; n, p) \approx G(u) \quad \text{mit} \quad u = \frac{x + 0,5 - n p}{\sqrt{n p (1 - p)}} \quad \text{für} \quad n \cdot p \cdot (1 - p) > 9.$$

**Poisson-Verteilung** (Parameter  $\mu$ ):

$$G_{\text{Poisson}}(x; \mu) \approx G(u) \quad \text{mit} \quad u = \frac{x + 0,5 - \mu}{\sqrt{\mu}} \quad \text{für} \quad \mu > 9.$$

Abb. 6.34 gibt einen Überblick über möglichen Näherungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

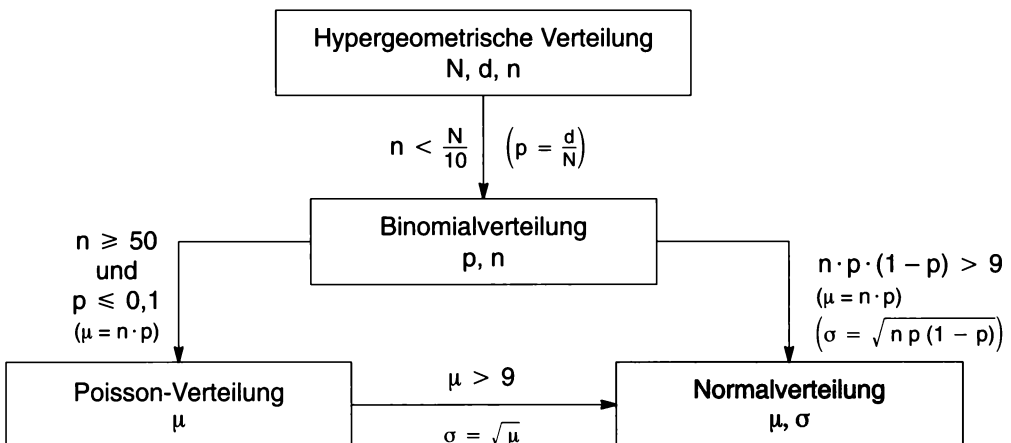


Abb. 6.34 Übersicht über die Näherung von Verteilungen

## Aufgaben

- 6.58** Ein idealer Würfel wird 300 mal geworfen. Berechne näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechserwürfe
- a)** kleiner als 40 ist **b)** zwischen 45 und 55 liegt (beide Werte eingeschlossen).
- 6.59** In einem digitalen Übertragungskanal ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit fehlerhaft übertragen wird, stets gleich  $10^{-5}$ . Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Millionen Bits mehr als 80 Bits fehlerhaft übertragen werden?

- 6.60** In einem Fertigungsprozess von Halbleitern beträgt die Ausschussrate praktisch gleichbleibend 3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 1 000 Chips
- a) höchstens 40 fehlerhaft sind,      b) mindestens 25 fehlerhaft sind.
- 6.61** Aus einem Prüfling von 1 500 elektrischen Steckverbindungen, davon 75 fehlerhaft, werden zufällig 200 entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 15 in der Stichprobe fehlerhaft sind mit Hilfe der Näherung durch die
- a) Poisson-Verteilung,      b) Normalverteilung.
- 6.62** Angenommen, die Anzahl von Asbestpartikeln pro Volumseinheit ist poissonverteilt mit dem Mittelwert 500. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, weniger als 460 Partikeln pro Volumseinheit vorzufinden?

### 6.2.4 Verteilung von Stichprobenkenngrößen

Wir nehmen an, dass sich in einem Behälter eine große Anzahl von OHM'schen Widerständen befindet, deren Widerstandswerte normalverteilt sind mit dem Mittelwert (Erwartungswert)  $\mu = 100 \Omega$  und der Standardabweichung  $\sigma = 2 \Omega$ . Wir entnehmen nun zweimal zufällig 5 Widerstände. Dabei ergeben sich folgende Werte  $x_1, x_2, x_3, x_4$  und  $x_5$ :

MC

$x := \text{mnorm}(5, 100, 2) \dots$  liefert 5 normalverteilte Zufallszahlen mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 2$

$x =$	$\begin{bmatrix} 99.12 \\ 98.64 \\ 99.05 \\ 98.10 \\ 96.63 \end{bmatrix}$	<p>mittelwert(x) = 98.308                  median(x) = 98.64                  Stdev(x) = 1.024                  Var(x) = 1.049</p>
-------	---	--

$x := \text{mnorm}(5, 100, 2) \dots$  noch einmal 5 normalverteilte Zufallszahlen mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 2$

$x =$	$\begin{bmatrix} 100.09 \\ 99.76 \\ 101.11 \\ 104.38 \\ 101.62 \end{bmatrix}$	<p>mittelwert(x) = 101.392                  median(x) = 101.11                  Stdev(x) = 1.834                  Var(x) = 3.362</p>
-------	---	--

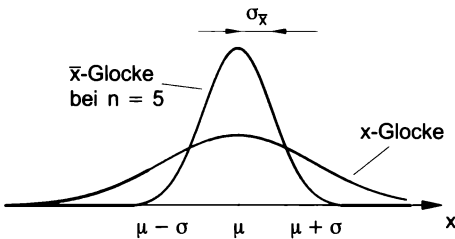
Nicht überraschend ist es, dass von Stichprobe zu Stichprobe mit den Einzelwerten  $x_i$  auch die Mittelwerte  $\bar{x}$ , die Mediane  $\tilde{x}$ , die Standardabweichungen  $s$  sowie die Stichprobenvarianzen  $s^2$  streuen. Man kann nun nach ihren Verteilungen fragen.

#### Verteilung der Mittelwerte

Die Mittelwerte  $\bar{x}$  streuen um die mittlere Lage  $\mu$  genauso wie die Einzelwerte  $x_i$  der Stichprobe; jedoch streuen sie deutlich weniger als die Einzelwerte. Genauer lässt sich ableiten:

Die **Mittelwerte**  $\bar{x}$  von Stichproben normalverteilter Merkmalswerte (Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ ) des stets gleichen Umfangs  $n$  sind ebenfalls **normalverteilt** mit den Parametern  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Im Beispiel einer Normalverteilung mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 2$  bedeutet dies, dass die Mittelwerte  $\bar{x}$  von Stichproben des stets gleichen Umfangs  $n = 5$  normalverteilt sind mit  $\mu_{\bar{x}} = 100$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,89$ . Bei jeder Vervielfachung des Stichprobenumfanges halbiert sich  $\sigma_{\bar{x}}$ .



Die Glockenkurve der Mittelwerte von Stichproben des gleichen Umfangs ist also schmaler (und damit höher) als die Glockenkurve der Einzelwerte (Abb. 6.35).

Abb. 6.35 Glockenkurven der Mittelwerte und Einzelwerte

Das Stichprobenmittel  $\bar{x}$  ist daher ein **Schätzwert für den Parameter  $\mu$  einer Normalverteilung**:  $\hat{\mu} = \bar{x}$ .

Allgemein wird ein Schätzwert eines Parameters so geschrieben, dass man den Parameterbuchstaben (hier  $\mu$ ) "überdacht"; man spricht "mu-Dach".

### Verteilung der Stichprobenvarianzen $s^2$

Wir betrachten die Stichprobenvarianzen  $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  von Stichproben stets gleichen Umfangs  $n$  und bilden die Größe  $(n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$ . Für  $n > 1$  können die Werte dieser Größe nicht negativ sein. Sie kann daher beispielsweise nicht einer Normalverteilung unterliegen; ihre Dichtefunktion  $g(x)$  mit  $x = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$  muss null sein für  $x < 0$ . Statt  $x$  wird aus historischen Gründen meist die Bezeichnung  $\chi^2$  verwendet, die Verteilung wird  **$\chi^2$ -Verteilung** (gesprochen Chi-Quadrat) genannt. Beispielsweise ist die Dichtefunktion der

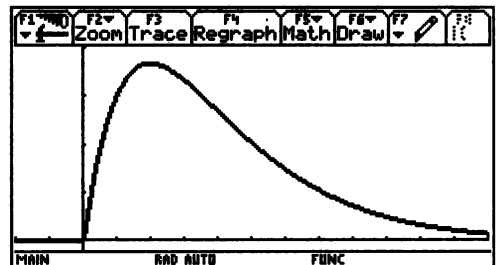
$$\chi^2\text{-Verteilung für } n = 5 \text{ wie folgt gegeben: } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Man nennt  $f = n - 1$  die **Anzahl der Freiheitsgrade** der entsprechenden  $\chi^2$ -Verteilung; in unserem Fall ist  $f = 4$ .

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Dichtefunktion der  $\chi^2$ -Verteilung für  $f = 4$  zwischen  $x = -2$  und  $x = 12$ .

Sie besitzt ihr Maximum im Punkt  $(2/0,1839)$ . Ihr Erwartungswert  $\mu$  (= Schwerpunktskoordinate) ist  $f = 4$ .

Wie bei jeder Dichtefunktion einer stetigen Verteilung ist auch hier die Fläche unter der Kurve gleich 1.



Gegeben ist ein normalverteiltes Merkmal mit der Standardabweichung  $\sigma$ . Dann sind die Werte  $f \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$  mit  $f = n - 1$  aus Stichproben des stets gleichen Umfangs  $n$   **$\chi^2$ -verteilt mit  $f$  Freiheitsgraden**.



Bildet man die Stichprobenvarianzen  $s^2$  aus vielen Stichproben des Umfangs  $n$ , so liegen diese Werte in der Nähe der Varianz  $\sigma^2$  der Normalverteilung. Man kann zeigen, dass sie *im Mittel* mit  $\sigma^2$  übereinstimmen! Man sagt, dass  $s^2$  den Parameter  $\sigma^2$  *erwartungstreu* schätzt.

**$s^2$  ist daher ein geeigneter Schätzwert für  $\sigma^2$ :  $\hat{\sigma}^2 = s^2$ .**

Würde man bei der Berechnung von  $s^2$  statt des Nenners  $n - 1$  den Nenner  $n$  nehmen, so würde die Eigenschaft des im Mittel richtigen Schätzens verloren gehen; dies wirkt sich praktisch allerdings nur bei kleineren Werten von  $n$  aus.

Die Wurzel aus der Stichprobenvarianz, die **Stichprobenstandardabweichung  $s$**  wird zur **Schätzung von  $\sigma$**  verwendet. Jedoch wird dabei  $s$  im Mittel etwas unterschätzt. D.h.  $\bar{s}$  ist (bei einer großen Zahl von Stichproben des gleichen Umfangs) etwas kleiner als  $\sigma$ . Dies fällt jedoch nur bei kleinen Stichproben ins Gewicht.

**Beispiel 6.15 : Verteilung der Mittelwerte**

Ein Hersteller liefert elektrische Widerstände, die normalverteilt mit dem Mittelwert (Erwartungswert)  $\mu = 1\,000\ \Omega$  und der Standardabweichung  $\sigma = 40\ \Omega$  sind. Man entnimmt der Lieferung zufällig 10 Widerstände und bildet den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$ . Wie wahrscheinlich liegt er unter  $980\ \Omega$ ?

**Lösung**

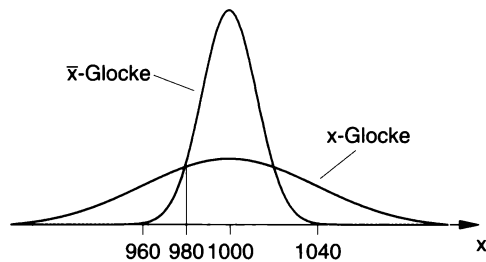


Abb. 6.36

Die Mittelwerte  $\bar{x}$  sind normalverteilt mit  $\mu_{\bar{x}} = 1\,000\ \Omega$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{40}{\sqrt{10}}\ \Omega = 12,6\ \Omega$ .

$$G(980; \mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}) = G\left(\frac{980 - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = G(-1,58) = 1 - G(1,58) = 0,057 = 5,7\%.$$

Die Stichprobe besitzt also einen Mittelwert, der mit Wahrscheinlichkeit 5,7% unter  $980\ \Omega$  liegt.

**Aufgaben**

- 6.63 Eine normalverteilte Größe besitzt den Erwartungswert 100 und die Standardabweichung 5. Wie sind die Mittelwerte aus Stichproben des Umfangs
  - a)  $n = 4$       b)  $n = 25$       c)  $n = 100$       verteilt?
  
- 6.64 Der Durchmesser von Rohren aus Kunststoff ist normalverteilt mit  $\mu = 10,02\ \text{cm}$  und  $\sigma = 0,03\ \text{cm}$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass:
  - a) der Durchmesser eines Rohres,
  - b) der Mittelwert der Durchmesser einer Stichprobe von 9 Rohren zwischen  $10,00$  und  $10,03\ \text{cm}$  liegt?
  
- 6.65 Die Reißfestigkeit von Drähten eines bestimmten Typs unterliegt einer Normalverteilung mit dem Mittel  $108\ \text{N}$  und der Standardabweichung  $3\ \text{N}$ . Welcher Wert der Reißfestigkeit wird vom Mittel einer Stichprobe von 16 Drahtproben mit Wahrscheinlichkeit 99% überschritten?

- 6.66** Gegeben ist eine Normalverteilung mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 2$ .
- Simuliere nun eine größere Anzahl von Stichproben des Umfangs  $n = 5$  und berechne die Stichprobenstandardabweichungen  $s$ , die Stichprobenvarianzen  $s^2$ .
  - Trage die  $s$ -Werte auf einer Achse auf und vergleiche mit  $\sigma$ .
  - Trage die  $s^2$ -Werte auf einer weiteren Achse auf und vergleiche mit  $\sigma^2$ .
- 6.67** Gegeben ist eine Normalverteilung mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 2$ . Simuliere eine größere Anzahl von Stichproben des Umfangs  $n = 5$  (Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/ Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...) und berechne die Stichprobenvarianzen  $s^2$ . Bilde nun die Größen  $(n - 1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$ , führe eine Klasseneinteilung durch und trage sie in einem Histogramm auf. Als "Einhüllende" des Histogramms sollte sich bei einer genügend großen Anzahl von Werten die Dichtefunktion der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $f = n - 1 = 4$  Freiheitsgraden ergeben.

### Im Überblick: Normalverteilung

Die **Normalverteilung** ist eine stetige Verteilung. Sie besitzt zwei Parameter: den Erwartungswert oder Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$ . Die Dichtefunktion der Normalverteilung heißt **Gauss'sche Glockenkurve**. Ihre Wendepunkte liegen an den Stellen  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$ . Der **Zentrale Grenzwertsatz** begründet das häufige Auftreten der Normalverteilung.

Die **Wahrscheinlichkeit**, dass ein normalverteilter Merkmalswert zwischen  $a$  und  $b$  liegt, ist gleich dem **Inhalt der Fläche unter der Glockenkurve** von  $a$  bis  $b$ . Der Inhalt der Fläche bis zu einem Wert  $x$  wird mit  $G(x; \mu, \sigma)$  bezeichnet und heißt **Verteilungsfunktion** der Normalverteilung. Ihr Graph ist im **Wahrscheinlichkeitsnetz** eine Gerade. Fast alle Werte eines normalverteilten Merkmals liegen zwischen  $\mu - 3\sigma$  und  $\mu + 3\sigma$ .

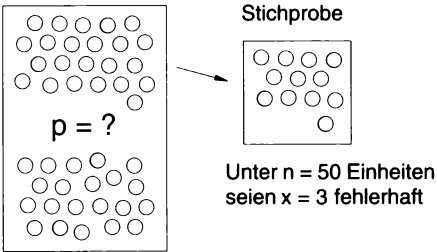
Rechentechisch wichtig ist die so genannte **standardisierte Normalverteilung** oder **u-Verteilung**, deren Erwartungswert  $\mu = 0$  und deren Standardabweichung  $\sigma = 1$  ist. Auf diese spezielle Verteilung kann das Rechnen mit jeder anderen Normalverteilung in einfachster Weise zurückgeführt werden:  $G(x; \mu, \sigma) = G\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ .

Die Normalverteilung kann unter gewissen Voraussetzungen eine **Näherungsverteilung** für die hypergeometrische Verteilung, die Binomialverteilung und die Poisson-Verteilung sein.

Vielfach von Bedeutung in der Statistik ist die Kenntnis der **Verteilung verschiedener Kenngrößen** von Stichproben normalverteilter Merkmalswerte. Besitzt die Normalverteilung die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ , so sind etwa die Mittelwerte  $\bar{x}$  aus Stichproben des Umfangs  $n$  ebenfalls normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu$ , ihre Standardabweichung ist jedoch nur  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Dagegen unterliegen die Werte  $(n - 1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$  einer so genannten  $\chi^2$ -Verteilung, wenn  $s$  die Standardabweichungen aus Stichproben des Umfangs  $n$  sind.

## 7 Schließende Statistik

### 7.1 Einleitung



Fehleranteil  $p$

Abb. 7.1 Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit

Einem Prüflös (oder auch einem Fertigungsprozess) werde *zufällig* eine (Zufalls-)Stichprobe des Umfangs  $n = 50$  entnommen (Abb. 7.1). Darunter seien  $x = 3$  fehlerhafte Einheiten, also 6%.

Es stellt sich nun die Frage, **welche Rückschlüsse auf den unbekanntem Fehleranteil  $p$  aus diesem Stichprobenergebnis** gezogen werden können. Dieses Schließen oder "Hochrechnen" von einer Zufallsstichprobe ist Aufgabe der **schließenden** oder **induktiven Statistik**.

Unter einer **Grundgesamtheit** versteht man allgemein eine bestimmte Menge von Einheiten, die ein oder mehrere Merkmale besitzen. Z.B.: alle Personen eines Landes, die Elemente eines Lieferloses, die in einem Produktionsprozess gefertigten Teile usw. Durch eine Vollerhebung (100%-Prüfung) oder über eine entnommene Stichprobe versucht man sich über die Grundgesamtheit Kenntnisse zu verschaffen.

Der Wert  $\hat{p} = \frac{x}{n} = 6\%$  ist ein **Schätzwert für den Anteil**  $p = \frac{d}{N}$  von fehlerhaften Einheiten im Prüflös (in der Grundgesamtheit). Dabei ist  $N$  der Prüflösumfang und  $d$  die Anzahl fehlerhafter Einheiten im Prüflös. Man spricht von einer **Punktschätzung**. Im Allgemeinen wird  $\hat{p}$  nicht mit der geschätzten Größe  $p = \frac{d}{N}$  zusammenfallen. Eine solche Punktschätzung ist *unbefriedigend*.

- Es wird keine Information über die mögliche Abweichung mitgeliefert.
- Hätte man eine Stichprobe des Umfangs  $n = 500$  entnommen und dabei  $x = 30$  fehlerhafte Einheiten vorgefunden, so wäre der Schätzwert  $\hat{p}$  ebenfalls 6%. Es leuchtet ein, dass ein aus einer größeren Stichprobe ermittelter Schätzwert mehr Gewicht hat. Führt man also nur eine Punktschätzung aus, so schöpft man die vorhandene Information offenbar ungenügend aus.

Besser ist daher die Angabe eines *Bereiches*, in dem der unbekanntem Fehleranteil  $p$  mit einer gewählten Wahrscheinlichkeit *erwartet* werden kann. Diese Wahrscheinlichkeit sollte natürlich hoch sein, etwa 95%. Dies würde bedeuten, dass mit Wahrscheinlichkeit 5% der angegebene Bereich den Fehleranteil  $p$  nicht einschließt, was natürlich einen Irrtum bedeutet. Daher heißt diese (kleine) Wahrscheinlichkeit in diesem Zusammenhang **Irrtumswahrscheinlichkeit**; sie wird üblicherweise mit  $\alpha$  bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit 95% wird dann dementsprechend mit  $1 - \alpha$  bezeichnet. Sie heißt **Vertrauensniveau**. Der angegebene Bereich für  $p$  wird  **$(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich** oder  **$(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall** genannt.

*Beispiel:* Wir werden herleiten, dass bei  $x = 3$  fehlerhaften Einheiten unter  $n = 50$  Einheiten für den unbekanntem Fehleranteil  $p$  der 95%-Vertrauensbereich lautet:  $1,3\% \leq p \leq 16,5\%$ . D.h. der unbekanntem Fehleranteil  $p$  wird mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 95\%$  durch das Intervall  $[1,3\%; 16,5\%]$  eingegrenzt. Mit  $\alpha = 5\%$  ist zu erwarten, dass dies nicht der Fall ist. Der hier sicherlich große Vertrauensbereich bedeutet eine beträchtliche Unsicherheit über den Fehleranteil  $p$ . Der Grund liegt im kleinen Stichprobenumfang  $n = 50$ . Dieser liegt bei Meinungsumfragen oft über 1 000.

Wir haben die Frage nach dem "zweiseitigen" Vertrauensbereich gestellt. Man kann auch fragen, mit welchem höchsten Fehleranteil man bei  $x = 3$  unter  $n = 50$  Einheiten bei einem bestimmten Vertrauensniveau noch rechnen muss. Auf diese Weise erhält man "einseitige" Vertrauensbereiche, auf die aber nicht eingegangen wird.

Eine andere Fragestellung der schließenden Statistik behandelt den **statistischen Test**. Häufig hat man schon eine Vermutung oder einen Verdacht ("Alternativhypothese" zu einer bestehenden "Nullhypothese") beispielsweise über die Lage des Mittelwertes  $\mu$  bei einer Normalverteilung. Dann kann man versuchen, den Verdacht durch eine Stichprobenuntersuchung indirekt zu bestätigen.

**Wie soll eine Stichprobe ausgewählt werden?**

Von einer Stichprobe erwartet man, dass sie Aufschluss über ein Merkmal der Grundgesamtheit (Lieferlos, Fertigungsprozess, ...) gibt. Wesentlich für alle Schlüsse von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit als Aufgabe der schließenden Statistik ist, dass jede Einheit mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus der Grundgesamtheit in die Stichprobe gewählt werden kann. Man kann dies erreichen, indem man die Einheiten der Grundgesamtheit durchnummeriert und mit einer Tafel von Zufallszahlen arbeitet. Bei der computergestützten Zufallsauswahl wird ein Zufallszahlengenerator verwendet. Daher spricht man in diesem Fall von einer **Zufallsstichprobe**.

Eine nicht zufällige Stichprobenentnahme liegt vor, wenn man besonders bequem zu erreichende Einheiten auswählt (etwa die Einheiten ganz oben in einem Behälter).

**7.2 Vertrauensbereich für einen unbekanntem Anteil**

Im Sinne der Qualitätssicherung ist der interessierende Anteil  $p$  in der Regel ein Fehleranteil, im Besonderen der Anteil fehlerhafter Einheiten in einem Prüflos oder die konstante Ausschussrate einer Fertigung. Darüber hinaus können freilich auch andere Anteile interessieren, etwa der Anteil der Befürworter eines Vorhabens in einer Bevölkerungsgruppe.

Als Schätzwert für den unbekanntem Fehleranteil  $p$  wird nochmals festgehalten, was schon auf Seite 270 angeführt wurde:

Ist  $n$  der Stichprobenumfang und  $x$  die in ihr vorgefundene Anzahl fehlerhafter Einheiten, so ist  $\hat{p} = \frac{x}{n}$  ein **Schätzwert für den unbekanntem Fehleranteil  $p$**  der Grundgesamtheit.

Es soll nun die in Abb. 7.2 dargestellte Situation weiterverfolgt werden: Unter  $n = 50$  Einheiten wurden  $x = 3$  fehlerhafte Einheiten gefunden. Es wird dabei angenommen, dass die Anzahl  $x$  fehlerhafter Einheiten wenigstens näherungsweise binomialverteilt ist. Wir fragen, *bis zu welchem Fehleranteil  $p$  im Prüflos eine solche Stichprobe "üblicherweise" zu erwarten ist*. Was "üblicherweise" bedeutet, muss allerdings genauer gesagt werden.

Wir präzisieren dies dadurch, dass wir ein Intervall um  $\hat{p} = 6\%$  suchen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von beispielsweise  $1 - \alpha = 95\%$  den unbekanntem Fehleranteil  $p$  einschließt (Abb. 7.2). Die untere Grenze  $p_{un}$  sowie die obere Grenze  $p_{ob}$  sind so festgelegt, dass  $p < p_{un}$  bzw.  $p > p_{ob}$  nur noch mit je einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{\alpha}{2} = 2,5\%$  zutrifft, in der Summe also  $\alpha = 5\%$ .

Dieses Intervall schließt mit einer Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 95\%$  den unbekanntem Fehleranteil  $p$  ein

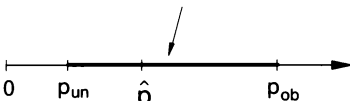


Abb. 7.2 Vertrauensbereich für  $p$

Abb. 7.3 zeigt zuerst ein Stabdiagramm für die binomialverteilte Anzahl fehlerhafter Einheiten bei  $p = 12\%$  und  $n = 50$ . Bei diesem Fehleranteil  $p$  hätte unsere Stichprobe noch eine Wahrscheinlichkeit von etwa  $8\%$ , weshalb  $p = 12\%$  noch durchaus möglich sein sollte. Erhöht man  $p$  weiter, so ist für  $p = 16,5\%$  (auf Zehntelprozent genau) die Wahrscheinlichkeit, höchstens  $x = 3$  fehlerhafte Einheiten in der Stichprobe vorzufinden, letztmalig über  $2,5\%$ , bei  $p = 16,6\%$  ist diese Wahrscheinlichkeit schon unter  $2,5\%$  gesunken. Mit einer Wahrscheinlichkeit  $97,5\%$  ist für  $x = 3$  bei  $n = 50$  der Fehleranteil der Grundgesamtheit mit höchstens  $p_{ob}$  zu erwarten.

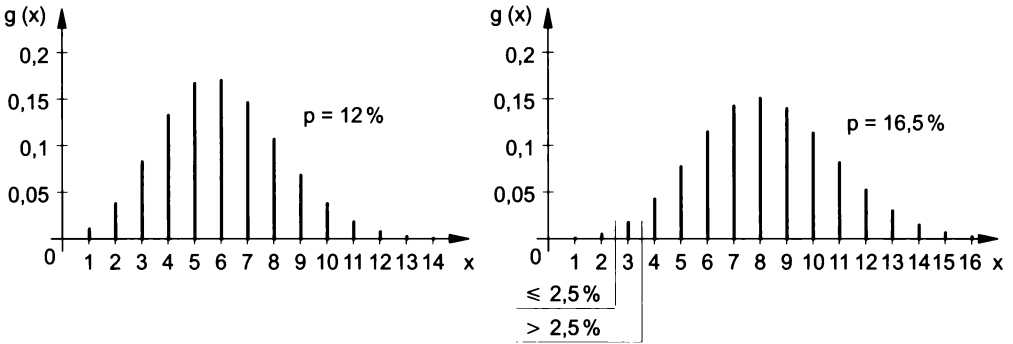


Abb. 7.3 Stabdiagramme von Binomialverteilungen für  $n = 50$

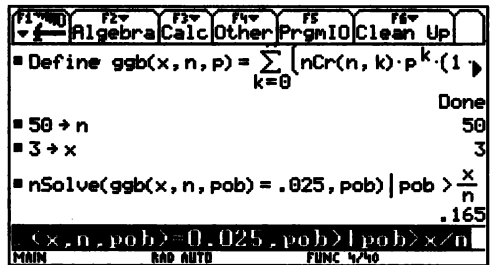
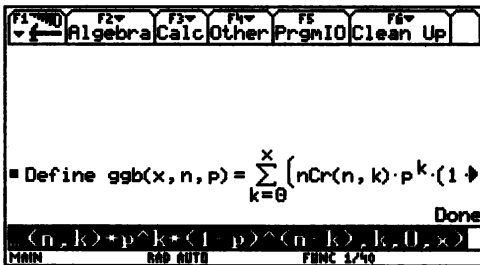
Der obere Randwert  $p_{ob}$  ist eine Lösung der Gleichung

$$G(3; 50, p) = \sum_{k=0}^3 \binom{50}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{50-k} = 0,025$$

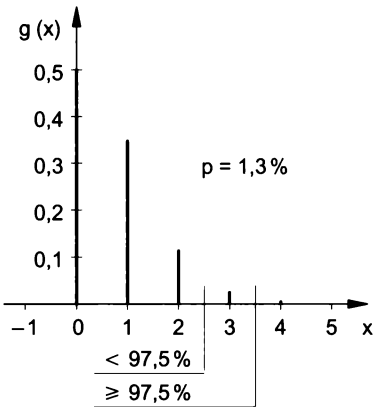
nach  $p$ . Dies ist eine algebraische Gleichung vom Grad  $n = 50$  in der Variablen  $p$ . Die gesuchte Lösung muss größer als  $\hat{p} = \frac{3}{50} = 0,06$  sein.

Die praktische Lösung dieser Gleichung kann mit Hilfe von Nomogrammen oder dem Gleichungslöser leistungsfähiger Taschenrechner erfolgen.

Voyage 200



Es empfiehlt sich, zuerst die Verteilungsfunktion  $G(x; n, p)$  der Binomialverteilung im Rechner zu definieren. Zur Lösung der Gleichung verwendet man  $nSolve()$ , wodurch iterativ eine Näherungslösung gesucht wird. Die Suche wird auf das Intervall  $p > \hat{p} = \frac{x}{n}$  eingeschränkt. Es kann zu längeren Rechenzeiten kommen.

Abb. 7.4 Ermittlung von  $p_{un}$ 

Die Suche nach der Lösung wird für  $x > 0$  auf das Intervall  $p > 0$  und  $p < \hat{p} = \frac{x}{n}$  eingeschränkt. Auch hier kann es zu längeren Rechenzeiten kommen.

Gleichermaßen kann man fragen, wie weit man den Fehleranteil verkleinern muss, damit die Wahrscheinlichkeit, höchstens  $x = 3$  fehlerhafte Einheiten bei  $n = 50$  vorzufinden, noch mindestens 97,5 % ist, während sie für  $x = 2$  schon unter 97,5 % ist. D.h. es bestehen die Forderungen:

$G(3; 50, p) \geq 0,975$  und  $G(2; 50, p) < 0,975$ .  
Das kleinstmögliche  $p$ , wir nennen es  $p_{un}$ , erhält man aus der Gleichung  
 $G(2; 50, p) = 0,975$ .

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
50 → n					50
3 → x					3
nSolve(ggb(x, n, pob) = .925, pob)   pob > $\frac{x}{n}$					
					.165
nSolve(ggb(x - 1, n, pun) = .975, pun)   pun >					
					.013
0.975, pun >   pun > 0 and pun < x/n					
MAIN      MOD AUTO      FINEC 5/40					

Damit lautet der Vertrauensbereich für  $p$ :  $1,3\% \leq p \leq 16,5\%$ .

Wir können daher sagen: Wenn man in einer Stichprobe des Umfangs  $n = 50$  drei fehlerhafte Einheiten vorfindet, wird bei einem Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 95\%$  der unbekannt Fehleranteil  $p$  zwischen 1,3% und 16,5% zu erwarten sein.

Nur in  $\alpha = 5\%$  aller Fälle wird damit  $p$  nicht erfasst sein. Ob gerade einer dieser Fälle vorliegt, kann nicht entschieden werden. Der Vorteil dieser Bereichsschätzung gegenüber der ausschließlichen Angabe eines Schätzwertes  $\hat{p}$  besteht darin, dass eine Aussagegenauigkeit verbunden mit einer "Sicherheit" (= Vertrauensniveau  $1 - \alpha$ ) der Aussage angegeben wird. Neben dem Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 95\%$  sind weitere übliche Werte 99% oder 90%.

### Näherung durch die Normalverteilung

Bei der Berechnung der Randwerte eines Vertrauensbereichs für  $p$  als Parameter der Binomialverteilung kann von der Näherungsmöglichkeit dieser Verteilung durch die Normalverteilung Gebrauch gemacht werden, was vielfach erfolgt. Die Näherung ist brauchbar, wenn  $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$  ist. Die Näherungsformel wird in der folgenden Zusammenfassung ohne Herleitung angegeben.

**$(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für den Fehleranteil  $p$  einer Grundgesamtheit**, ermittelt aus einer Stichprobe des Umfangs  $n$ , in der  $x$  fehlerhafte Einheiten vorgefunden wurden:  $p_{un} \leq p \leq p_{ob}$  mit

- Genaue Berechnung:

$$G(x - 1; n, p_{un}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{für } x > 0$$

$$G(x; n, p_{ob}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{für } x < n.$$

- Näherung durch die Normalverteilung:

$$p_{ob,un} = \hat{p} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \quad \text{mit } \hat{p} = \frac{x}{n}.$$

**Die Vertrauensgrenzen  $p_{un}$  und  $p_{ob}$  sind Zufallsgrößen.** Entnimmt man aus einer Grundgesamtheit eine Stichprobe, so ändern sich bei gegebenem Umfang  $n$  die Vertrauensgrenzen  $p_{un}$  und  $p_{ob}$  mit der Anzahl  $x$  fehlerhafter Einheiten, einer Zufallsgröße der Stichprobe. Dies ist der Fall, obwohl natürlich der Anteil  $p$  fehlerhafter Einheiten in der Grundgesamtheit immer gleich ist.

### Beispiel 7.1 : Vertrauensbereiche bei unterschiedlichen Vertrauensniveaus

Aus einer Fertigung mit gleichbleibender Ausschussrate wird eine Zufallsstichprobe des Umfangs  $n = 80$  entnommen; darunter werden  $x = 4$  fehlerhafte Einheiten gefunden.

Ermittle den zweiseitigen Vertrauensbereich für die Ausschussrate  $p$  der Fertigung zum Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  gleich **a) 90%** **b) 95%** **c) 99%**.

#### Lösung

Schätzwert  $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{4}{80} = 5\%$ .

Zu **a)** Da  $1 - \alpha = 90\% = 0,9$ , ist  $\alpha = 0,1$  und daher  $\frac{\alpha}{2} = 0,05$ .

$G(3; 80, p_{un}) = 0,95 \Rightarrow p_{un} = 1,7\%$ ;  $G(4; 80, p_{ob}) = 0,05 \Rightarrow p_{ob} = 11,1\%$ .  
Somit:  $1,7\% \leq p \leq 11,1\%$ .

Zu **b)**  $G(3; 80, p_{un}) = 0,975 \Rightarrow p_{un} = 1,4\%$ ;  $G(4; 80, p_{ob}) = 0,025 \Rightarrow p_{ob} = 12,3\%$ .  
Somit:  $1,4\% \leq p \leq 12,3\%$ .

Zu **c)** Da  $1 - \alpha = 99\% = 0,99$ , ist  $\alpha = 0,01$  und daher  $\frac{\alpha}{2} = 0,005$ .

$G(3; 80, p_{un}) = 0,995 \Rightarrow p_{un} = 0,9\%$ ;  $G(4; 80, p_{ob}) = 0,005 \Rightarrow p_{ob} = 14,9\%$ .  
Somit:  $0,9\% \leq p \leq 14,9\%$ .

Es zeigt sich: Je höher das Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  vorgegeben wird (also je vorsichtiger die Schätzung durchzuführen ist), desto länger ist der Vertrauensbereich (Abb. 7.5). Mehr Sicherheit führt zu ungenaueren Aussagen. Will man bei gleicher Aussagegenauigkeit mehr Sicherheit, so muss man den Stichprobenumfang erhöhen!

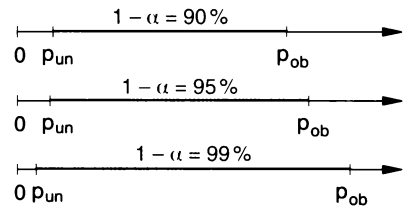


Abb. 7.5

### Beispiel 7.2 : Vertrauensbereiche bei unterschiedlichem Stichprobenumfang

Ermittle den zweiseitigen Vertrauensbereich für die konstante Ausschussrate  $p$  einer Fertigung zum Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 95\%$ , wenn eine Zufallsstichprobe des Umfangs

- a)**  $n = 80$  entnommen wird, darunter  $x = 4$  fehlerhafte Einheiten,  
**b)**  $n = 320$ , darunter  $x = 16$  fehlerhafte Einheiten.

#### Lösung

Zu **a)** Siehe Beispiel 7.1:  $1,4\% \leq p \leq 12,3\%$ .

Zu **b)** Der Anteil fehlerhafter Einheiten *in der Stichprobe* ist wieder 5%, wie in a).

$G(15; 320, p_{un}) = 0,975 \Rightarrow p_{un} = 2,9\%$ ;  $G(16; 320, p_{ob}) = 0,025 \Rightarrow p_{ob} = 8,0\%$ .  
Somit:  $2,9\% \leq p \leq 8,0\%$ .

Ein Stichprobenanteil von 5% ergibt erwartungsgemäß einen kleineren Vertrauensbereich und damit eine höhere Aussagegenauigkeit, wenn er aus einer größeren Stichprobe stammt.

### Beispiel 7.3 : Vertrauensbereich für $p$ – Näherung durch die Normalverteilung

Aus einem größeren Prüflot wird eine Zufallsstichprobe von  $n = 1\,200$  Einheiten entnommen; davon erweisen sich  $x = 30$  fehlerhaft. Ermittle den zweiseitigen 99%-Vertrauensbereich für den Fehleranteil  $p$  im Prüflot.

#### Lösung

Eine Näherung durch die Normalverteilung erscheint wegen des großen Stichprobenumfangs möglich.  $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{30}{1200} = 2,5\%$ ;  $u_{1-\alpha/2} = u_{0,995} = 2,576$ .

$$p_{\text{ob}} = 0,025 + 2,576 \sqrt{\frac{0,025 \cdot (1 - 0,025)}{1200}} = 0,037.$$

$$p_{\text{un}} = 0,025 - 2,576 \sqrt{\frac{0,025 \cdot (1 - 0,025)}{1200}} = 0,013.$$

Überprüfung der Berechtigung der Näherung:

$$n \cdot p_{\text{ob}} (1 - p_{\text{ob}}) \approx 42 > 9 \quad \text{sowie} \quad n \cdot p_{\text{un}} (1 - p_{\text{un}}) \approx 16 > 9.$$

Somit gilt näherungsweise:  $1,3\% \leq p \leq 3,7\%$ . Aufgrund der Näherungsformel liegt  $\hat{p}$  in der Mitte des Vertrauensbereiches; daher kann auch geschrieben werden:  $p = 2,5\% \pm 1,2\%$ .

Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis:  $1,5\% \leq p \leq 3,9\%$ .

#### Länge des Vertrauensbereiches und notwendiger Stichprobenumfang

Ist es möglich, die Binomialverteilung durch die Normalverteilung zu nähern, kann die Länge  $L$  des  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereiches für  $p$  wie folgt angegeben werden:

$$L = 2 \cdot u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}. \quad \text{Man erkennt:}$$

- $L$  ist kleiner, je größer  $n$  ist.
- $L$  hängt vom Schätzwert  $\hat{p}$  ab. Das Produkt  $\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$  hat seinen größten Wert  $\frac{1}{4}$  wenn  $\hat{p} = \frac{1}{2}$  ist.

Hat man etwa aus einer Voruntersuchung einen ungefähren Schätzwert  $\hat{p}$ , so kann man aus der Formel für  $L$  den notwendigen Stichprobenumfang abschätzen, der für eine bestimmte Größe von  $L$  notwendig ist. Ist dies nicht der Fall, so muss dafür pessimistisch  $\hat{p} = \frac{1}{2}$  gesetzt werden.

### Beispiel 7.4 : Annehmen oder Verwerfen einer Behauptung über $p$

Ein Betrieb stellt besonders geformte Gläser für die Pharmaindustrie her. Dabei kommt es immer wieder vor, dass ein Glas in Bruch geht. Der Bruchanteil beträgt nahezu gleichbleibend 4%. Nach einem längeren Stillstand wird die Produktion wieder aufgenommen. Dabei wird die Behauptung angezweifelt, dass der Bruchanteil gegenüber dem früheren Wert  $p = 4\%$  gleich geblieben ist. Zur Klärung entnimmt man der wieder angelaufenen Fertigung eine Stichprobe. Wie ist zu urteilen, wenn man

- a)** bei 40 Gläsern 4 Brüche,    **b)** bei 100 Gläsern 10 Brüche feststellt? Verwende ein Vertrauensniveau von 95%.



**Lösung**

Wir gehen von der Stichprobe aus und ermitteln den 95%-Vertrauensbereich für den momentanen Bruchanteil  $p$ .

Zu a)  $2,8\% \leq p \leq 23,7\%$ .

Da der "alte" Wert  $p = 4\%$  von diesem Vertrauensbereich eingeschlossen wird, kann die Behauptung, dass der Bruchanteil gleich geblieben ist, nicht verworfen werden. Der Stichprobenbefund: " $x = 4$  bei  $n = 40$ " ist noch zufällig erklärbar.

Zu b)  $4,9\% \leq p \leq 17,6\%$ .

Nun wird der Wert  $p = 4\%$  nicht mehr vom Vertrauensbereich eingeschlossen. Die Behauptung, dass sich der Bruchanteil gleich geblieben ist, kann verworfen werden.

*Anmerkung zu b)* Ist  $1 - \alpha = 99\%$ , so gilt  $3,8\% \leq p \leq 20,2\%$ . Bei der nun kleineren Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  zuungunsten der Behauptung "Der Bruchanteil ist gleich geblieben", kann die Behauptung nicht mehr verworfen werden. Der Befund ist auf diesem höheren Vertrauensniveau noch zufällig deutbar.

Diese über einen Vertrauensbereich gelöste Aufgabe kann auch durch einen so genannten **Binomialtest** gelöst werden, worauf aber nicht eingegangen wird.

### Im Überblick: Vertrauensbereich für einen Anteil $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)

Entnimmt man einer Grundgesamtheit mit dem unbekanntem Fehleranteil  $p$  eine Zufallsstichprobe von  $n$  Einheiten, darunter  $x$  Einheiten fehlerhaft, so ist der Stichprobenanteil  $\hat{p} = \frac{x}{n}$  ein **Schätzwert** für  $p$ .

Der  **$(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für  $p$**  ist ein Intervall, das mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dem Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  den unbekanntem Anteil  $p$  einschließt. Der Vertrauensbereich ist bei einem festem Stichprobenumfang umso größer, je größer  $1 - \alpha$  ist. Das bedeutet, dass **die Aussagegenauigkeit umso kleiner ist, je "sicherer" die Aussage** ist. Will man bei wachsendem Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  die Aussagegenauigkeit gleich halten, so muss der Stichprobenumfang entsprechend erhöht werden.

**Aufgaben**

- 7.1 Was ist richtig? Bei einem vorgegebenen Stichprobenumfang  $n$  führt ein höheres Vertrauensniveau zu einem **a)** größeren, **b)** kleineren Vertrauensbereich?
- 7.2 Schreibe ein kleines Programm für den TI-92/89, das die Ermittlung der Vertrauensgrenzen  $p_{un}$  und  $p_{ob}$  zusammenfasst. Eingabe:  $x$ ,  $n$  und  $1 - \alpha$ .
- 7.3 Angenommen, der Anteil  $p$  fehlerhafter Einheiten in einem großen Prüflös beträgt 8%. Man entnimmt nun eine Zufallsstichprobe des Umfangs  $n = 50$ . Ermittle nun für die Anzahlen  $x$  fehlerhafter Einheiten von 0 bis 10 den 95%-Vertrauensbereich. Für welche  $x$ -Werte enthält der zugehörige Vertrauensbereich den Anteil  $p = 8\%$ ? Wie wahrscheinlich sind diese Werte zusammengenommen?  
*Hinweis:* Für  $x = 0$  ist  $p_{un} = 0$ ; es braucht nur  $p_{ob}$  berechnet zu werden.

- 7.4 Ein Würfel wird 60 mal geworfen, darunter gab es nur 5 Sechser. Steht dieses Ergebnis auf dem Vertrauensniveau 95% noch im Einklang damit, dass der Würfel fair ist?
- 7.5 Aus einem umfangreichen Los von Spritzgussteilen werden 80 Teile entnommen und geprüft. Man findet 7 fehlerhafte. Mit welchem Fehleranteil ist im Los zu rechnen, wenn das Vertrauensniveau 95% ist?
- 7.6 Auf einer Anlage werden Kunststoffteile gefertigt. Vor Übergabe jeder Tagesproduktion an eine weiterverarbeitende Anlage erfolgt eine Zwischenprüfung. Dazu wurden eben 70 Teile zufällig entnommen und darunter 3 fehlerhafte Teile gefunden. Mit welchem Anteil fehlerhafter Teile muss in dieser Tagesproduktion gerechnet werden ( $1 - \alpha = 99\%$ )?
- 7.7 Aus einem genügend großen Los von Kondensatoren werden  $n$  Stück zufällig entnommen und geprüft. Dabei erweisen sich vier Stück als nicht brauchbar. Mit welchem Anteil unbrauchbarer Kondensatoren ist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$  in diesem Los zu rechnen, wenn a)  $n = 50$ , b)  $n = 100$ ?

#### Näherung durch Normalverteilung

- 7.8 Unter 800 bei gleichen Bedingungen gefertigten elektronischen Bauelementen werden 46 Bauelemente gefunden, die fehlerhaft sind und daher eine Nachbearbeitung erfordern. Mit welchem Anteil fehlerhafter Einheiten ist in der Fertigung dieser Bauelemente zu rechnen, wenn  $1 - \alpha$  gleich ist a) 90%, b) 95%, c) 99%?
- 7.9 In einer umfangreichen Lieferung von Stanzteilen soll der Ausschussanteil untersucht werden. Eine Stichprobe des Umfangs  $n = 500$  ergab  $x = 28$  fehlerhafte Teile. In welchen Grenzen ist die Ausschussrate  $p$  der Lieferung auf einem Vertrauensniveau a) 95%, b) 99% zu erwarten?
- 7.10 A manufacturer of helmets used by motorcycle riders is interested in estimating the fraction of defective helmets produced. A random sample of 900 helmets contains 24 defectives. Compute a 95%-confidence interval of the fraction defective.
- 7.11 Ein Stanzautomat besitzt eine gleichbleibende Fehlerrate von 4,0%. Nach einer Reparatur musste eine Neueinstellung vorgenommen werden. Um zu klären, ob sich dadurch die Fertigungsqualität geändert hat, werden 500 Einheiten geprüft. Darunter werden 33 fehlerhafte gefunden. Spricht dies für eine Änderung, wenn a)  $1 - \alpha = 95\%$  b)  $1 - \alpha = 99\%$  vorgegeben ist?
- 7.12 Eine von einer Zeitung durchgeführte Untersuchung ergab, dass jeder vierte Autofahrer nicht angegurtet fährt. Berechne unter der Voraussetzung, dass die Auswahl der Autofahrer zufällig erfolgte, den 95%-Vertrauensbereich für den wirklichen Anteil  $p$  der "Gurtenmuffel" bei einem Stichprobenumfang der Umfrage a)  $n = 100$ , b)  $n = 200$ , c)  $n = 500$ .
- 7.13 Ein Meinungsforschungsinstitut befragt zufällig 1 000 Haushalte. 5% davon gaben an, keinen Fernseher, 20% kein Auto und 40% keinen Geschirrspüler zu besitzen. Berechne den jeweiligen 95%-Vertrauensbereich.
- 7.14 Ein Marktforschungsinstitut soll bei einem Vertrauensniveau von 95% auf  $\pm 2\%$  genau herausfinden, ob für ein bestimmtes neues Produkt Kaufinteresse besteht. Wie viele Personen der Zielgruppe müssen befragt werden, wenn der Anteil der Kaufinteressenten mit a) 30%, b) 10%, c) 50% geschätzt wird?

### 7.3 Vertrauensbereich für $\mu$ bei Poisson-Verteilung

Wir nehmen an, dass die Anzahl der Fehler pro Einheit in einer Grundgesamtheit poissonverteilt mit der mittleren Fehleranzahl (dem Erwartungswert)  $\mu_0$  pro Einheit ist. Entnimmt man der Grundgesamtheit eine Stichprobe, so gilt als Schätzwert für  $\mu_0$ :

Ist  $x_i$  die Anzahl der Fehler auf der  $i$ -ten Einheit einer Stichprobe und ist  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  die Gesamtzahl der Fehler auf allen  $n$  Einheiten der Stichprobe, so ist  $\hat{\mu} = \frac{x}{n}$  **Schätzwert für die mittlere Fehleranzahl  $\mu$  pro Einheit** in der Grundgesamtheit.

*Anmerkung:* Hier wird im Sinne der Qualitätssicherung mit  $x$  bzw.  $x_i$  die Anzahl der Fehler bezeichnet. Allgemeiner werden damit die Anzahlen irgendwelcher Vorkommnisse auf Zählabschnitten bezeichnet.

Es gelten sinngemäß die gleichen Überlegungen wie beim Vertrauensbereich für einen Anteil  $p$  (Parameter  $p$  einer Binomialverteilung). Mit angegeben ist ohne Begründung eine Berechnungsmöglichkeit der Vertrauensgrenzen über die **Quantile der  $\chi^2$ -Verteilung**.

**$(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für den Parameter  $\mu_s$  einer Poisson-Verteilung** ermittelt aus einer Stichprobe des Umfangs  $n$ , in der  $x$  Fehler auf *allen* Stichprobeneinheiten vorgefunden wurden:  $\mu_{un} \leq \mu_s \leq \mu_{ob}$  mit

- $G(x - 1; \mu_{un}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$  für  $x > 0$   
 $G(x; \mu_{ob}) = \frac{\alpha}{2}$  für  $x < n$ .
- $\mu_{un} = \frac{1}{2} \chi_{f, \alpha/2}^2$  mit  $f = 2x$ ;  $\mu_{ob} = \frac{1}{2} \chi_{f, 1 - \alpha/2}^2$  mit  $f = 2(x + 1)$ .

Die so berechneten Vertrauensgrenzen  $\mu_{un}$  und  $\mu_{ob}$  beziehen sich auf den Erwartungswert  $\mu_s$  für die Anzahl der Fehler (mittlere Fehleranzahl) der *Stichprobe*. Nach dem Additionssatz (Seite 249) ergibt sich:

**Vertrauensbereich** für die mittlere Anzahl von Fehlern *pro Einheit*:  $\frac{\mu_{un}}{n} \leq \mu \leq \frac{\mu_{ob}}{n}$ .

#### Beispiel 7.5 : Vertrauensbereich für $\mu$ bei Poisson-Verteilung

In einer Eingangsprüfung wurden 10 Glasplatten auf punktförmige Fehlstellen geprüft; man fand insgesamt 12 Fehlstellen. Mit welcher mittleren Fehlstellenanzahl pro Glasplatte ist auf einem Vertrauensniveau von 95% zu rechnen?

#### Lösung

Wir ermitteln zuerst den Vertrauensbereich für die mittlere Fehlstellenanzahl  $\mu$  pro Stichprobe von 10 Glasplatten. Die Vertrauensgrenzen werden mit Hilfe der Quantile der  $\chi^2$ -Verteilung (Tabelle 3, Seite 357) berechnet:

$$1 - \alpha = 95\% = 0,95; \quad \alpha = 0,05; \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025; \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975.$$

$$\mu_{un} = \frac{1}{2} \chi_{f, \alpha/2}^2 \quad \text{mit } f = 2x; \quad \mu_{un} = \frac{1}{2} \chi_{24; 0,025}^2 = \frac{1}{2} \cdot 12,40 = 6,20.$$

$$\mu_{ob} = \frac{1}{2} \chi_{f, 1 - \alpha/2}^2 \quad \text{mit } f = 2(x + 1); \quad \mu_{ob} = \frac{1}{2} \chi_{26; 0,975}^2 = \frac{1}{2} \cdot 41,92 = 20,96.$$

Somit:  $6,20 \leq \mu_s \leq 20,96$  pro 10 Glasplatten;

Division dieser Vertrauensgrenzen durch 10 ergibt die Vertrauensgrenzen für die mittlere Fehlstellenanzahl pro Glasplatte:  $0,62 \leq \mu \leq 2,10$  pro Glasplatte.

Mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 95\%$  wird die unbekannte Fehlstellenanzahl  $\mu_0$  pro Glasplatte durch ein Intervall mit den Randwerten 0,62 und 2,10 eingeschlossen.

### Im Überblick: Vertrauensbereich für $\mu$ bei Poisson-Verteilung

Der  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für den Parameter  $\mu$  einer Poisson-Verteilung ist ein Intervall, das mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dem Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  den unbekanntem Erwartungswert für die Fehleranzahl (die mittlere Fehleranzahl) einschließt.

Die Berechnung des Vertrauensbereiches für die mittlere Fehleranzahl  $\mu$  pro Einheit geht im Allgemeinen von einer Stichprobe von  $n$  Einheiten aus. Man addiert die Fehler auf allen Stichprobeneinheiten zur Summe  $x$  und berechnet zu dieser Summe den Vertrauensbereich für die mittlere Fehleranzahl, also pro Stichprobe. Da nach dem Additionssatz der Poisson-Verteilung die mittlere Anzahl der Fehler proportional zur Größe der Prüfeinheit ist, werden die Vertrauensgrenzen aus der Stichprobe durch den Stichprobenumfang  $n$  dividiert. Dadurch erhält man die Vertrauensgrenzen für die mittlere Fehleranzahl pro Einheit.

### Aufgaben

- 7.15** Bei einer Eingangsprüfung wurden 8 Geräte genauer untersucht und darauf insgesamt 15 Fehler gefunden. Wie hoch kann die mittlere Fehleranzahl pro Gerät geschätzt werden? Innerhalb welchen Bereiches können die Fehleranzahlen pro Gerät auftreten (Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 95\%$ )?
- 7.16** Die Fehlstellenzahl pro Glasplatte einer bestimmten Art ist poissonverteilt. Auf 20 Glasplatten fand man insgesamt 14 Fehlstellen. Mit welcher mittleren Fehlstellenanzahl pro Glasplatte ist zu rechnen, wenn das Vertrauensniveau  
**a)** 80%,      **b)** 90%,      **c)** 95%,      **d)** 99% beträgt?
- 7.17** An 10 aufeinanderfolgenden Tagen wurden folgende Anzahlen für das Auftreten eines bestimmten Störfalles an einer Fertigungsanlage gefunden: 5, 2, 2, 6, 4, 8, 1, 4, 7 und 4. Die Anzahl der Störfälle pro Tag kann als poissonverteilt angenommen werden. Mit welcher mittleren Anzahl von Störfällen pro Tag ist bei einem Vertrauensniveau von 99% zu rechnen?
- 7.18** Beim Bedrucken von Karton für eine Verpackung war die Druckfehleranzahl bisher im Mittel 0,05 pro Karton. Nach einer Generalüberholung der Druckanlage wurden bei einer Durchsicht von 100 Kartons insgesamt 8 Druckfehler gefunden. Kann davon ausgegangen werden, dass die Druckqualität gleich geblieben ist? ( $1 - \alpha = 99\%$ ).
- 7.19** Ein Tuchhändler bezog bisher eine bestimmte Stoffart von einer Weberei, wobei die mittlere Webfehleranzahl pro Laufmeter Stoff gleichbleibend bei 0,1 lag. Um festzustellen, ob unlängst eine Änderung in der Lieferqualität eingetreten ist, wurde eine Lieferung stichprobenweise untersucht. Man fand  
**a)** 3 Webfehler auf 10 Laufmeter,      **b)** 30 Webfehler auf 100 Laufmeter.  
 Bekräftigt dies die Vermutung, dass ein Unterschied in der Lieferqualität eingetreten ist ( $1 - \alpha = 95\%$ )?

## 7.4 Vertrauensbereiche für die Parameter einer Normalverteilung

Wir gehen von einem normalverteilten Merkmal (Bolzendurchmesser, Abfüllmasse, ...) aus und nehmen vorerst an, dass die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  bekannt sind. Wir entnehmen nun ein Stichprobe des Umfangs  $n$  und berechnen ihren arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$ . Es soll nun jener symmetrisch um  $\mu$  gelegene Bereich  $[\mu - c, \mu + c]$  bestimmt werden, in dem  $\bar{x}$  mit der Wahrscheinlichkeit 95% liegt.

Da die Mittelwerte von Stichproben des stets gleichen Umfangs  $n$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  sind, kann diese Aufgabe leicht gelöst werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $\bar{x}$  höchstens gleich  $\mu + c$  ist, ist gleich 97,5%.

$$G(\mu + c; \mu_{\bar{x}}; \sigma_{\bar{x}}) = G\left(\frac{\mu + c - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 0,975 \Rightarrow \frac{\mu + c - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = u_{0,975} = 1,960.$$

Setzt man  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , so ergibt sich  $c = 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Damit gilt mit der Wahrscheinlichkeit 95%: (Abb. 7.6).

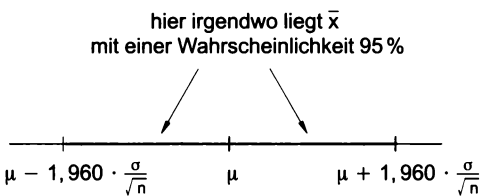


Abb. 7.6 Konstruktion eines Vertrauensbereiches für  $\mu$

Liegt nun aber ein  $\bar{x}$  in dem genannten Intervall (was mit einer Wahrscheinlichkeit 95% vorkommt), so ist  $\mu$  höchstens  $1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  von  $\bar{x}$  entfernt; d.h. mit der Wahrscheinlichkeit 95% enthält der Bereich  $\bar{x} - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  den Parameter  $\mu$ . Dies ist somit der (zweiseitige) 95%-Vertrauensbereich für  $\mu$ !

Dabei haben wir allerdings noch vorausgesetzt, dass die Standardabweichung  $\sigma$  der Normalverteilung bekannt ist. Ist allgemeiner der  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\mu$  gefragt, so ist  $u_{0,975}$  durch  $u_{1-\alpha/2}$  zu ersetzen.

### **$(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für $\mu$ , wenn $\sigma$ bekannt**

Gegeben ist eine Stichprobe des Umfangs  $n$  mit dem Mittelwert  $\bar{x}$ . Dann lautet der  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\mu$ :

$$\bar{x} - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{für } 1 - \alpha = 95\%$$

$$\bar{x} - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{für } 1 - \alpha = 99\%$$

$$\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{allgemein (Tabelle 1)}$$

**Beispiel 7.6: Vertrauensbereich für  $\mu$  bei Normalverteilung/  $\sigma$  bekannt**

Die Dosiermenge einer chemischen Substanz, die in eine Flüssigkeit eingeleitet wird, ist normalverteilt. Aus längerer Beobachtung weiß man, dass sich die Standardabweichung  $\sigma$  der Dosiermenge auch bei Änderungen der mittleren Dosiermenge  $\mu$  praktisch nicht ändert und ihr Wert mit  $\sigma = 1,0$  g angegeben werden kann. Eine Stichprobe ergab folgende Werte (Angabe in g):

49,2 50,0 51,4 52,3 50,6 50,3 49,6 51,2 51,7 50,8.

Bestimme den 95%- und den 99%-Vertrauensbereich für  $\mu$ .

**Lösung**

Stichprobe:  $n = 10$ ;  $\bar{x} = 50,71$  g

95%-Vertrauensbereich (in g):

$$50,71 - 1,960 \cdot \frac{1,0}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 50,71 + 1,960 \cdot \frac{1,0}{\sqrt{10}} \quad \text{oder} \quad 50,09 \text{ g} \leq \mu \leq 51,33 \text{ g}$$

99%-Vertrauensbereich (in g):

$$50,71 - 2,576 \cdot \frac{1,0}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 50,71 + 2,576 \cdot \frac{1,0}{\sqrt{10}} \quad \text{oder} \quad 49,90 \text{ g} \leq \mu \leq 51,52 \text{ g}$$

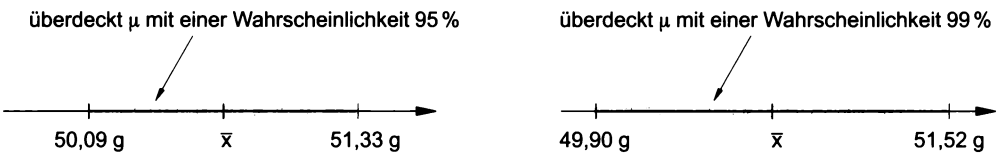


Abb. 7.7 95%- und 99%-Vertrauensbereich für  $\mu$

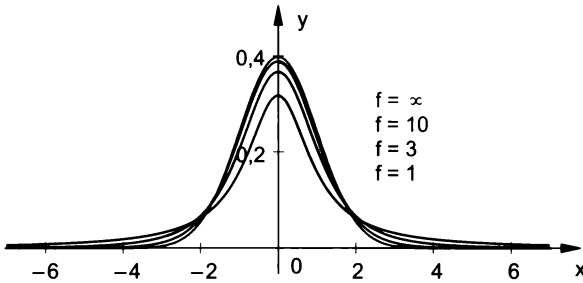
Vor Eingehen auf den praktisch wichtigeren Fall der Bestimmung des Vertrauensbereiches für  $\mu$ , wenn  $\sigma$  unbekannt ist, muss nach der  $\chi^2$ -Verteilung noch eine weitere Verteilung einer wichtigen Stichprobengröße, die so genannte **t-Verteilung** oder **STUDENT<sup>20</sup>-Verteilung**, besprochen werden.

Sind Merkmalswerte  $x$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ , so unterliegen bekanntlich die daraus gebildeten Werte  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  der u-Verteilung. Auf die Mittelwerte  $\bar{x}$  von Stichproben des stets gleichen Umfangs  $n$  angewendet bedeutet dies, dass die Werte  $\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$  ebenfalls u-verteilt sind. Man kann nun fragen, welcher Verteilung die Werte  $\frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$  gehorchen, bei denen  $\sigma$  durch  $s$  ersetzt wird. Es gilt, wie ohne Begründung angeführt wird:

Gegeben ist ein normalverteiltes Merkmal. Dann sind die Werte  $\frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$  **t-verteilt** mit dem Parameter  $f = n - 1$ .

<sup>20</sup> Student war das Pseudonym des englischen Statistikers W. S. GOSSET (1876 – 1935)

$f$  heißt wieder die **Anzahl der Freiheitsgrade** (df, degrees of freedom) und ist der einzige Parameter einer  $t$ -Verteilung. Beispiele für Dichtefunktionen  $g(x; f)$  von  $t$ -Verteilungen (Abb. 7.8):



$$g(x; 1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad (f = 1);$$

$$g(x; 3) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2} \quad (f = 3)$$

Für  $f \rightarrow \infty$  geht die  $t$ -Verteilung in die  $u$ -Verteilung über.

Abb. 7.8 Dichtefunktionen von  $t$ -Verteilungen und der  $u$ -Verteilung

Jener  **$x$ -Wert**, bis zu dem der Inhalt der Fläche unter der Dichtefunktion  $g(x, f)$  gleich  $p$  ist, wird mit  $t_{f;p}$  bezeichnet. Er heißt das  **$p$ -Quantil** der  $t$ -Verteilung mit  $f$  Freiheitsgraden. Die Quantile  $t_{f;p}$  sind für praktisch wichtige  $p$ -Werte tabelliert (Tabelle 2, Seite 356).

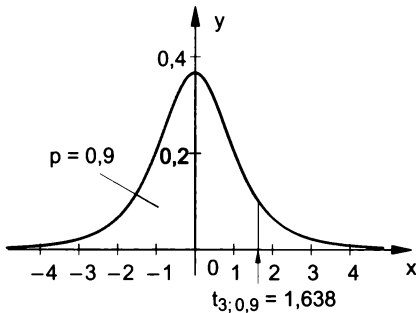


Abb. 7.9 Quantil  $t_{3;0,9}$  der  $t$ -Verteilung mit  $f = 3$

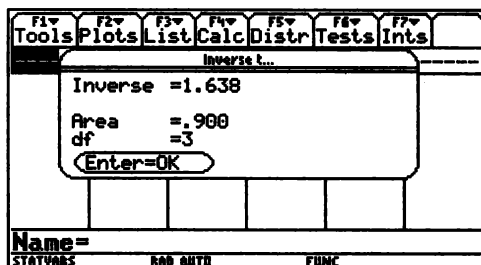
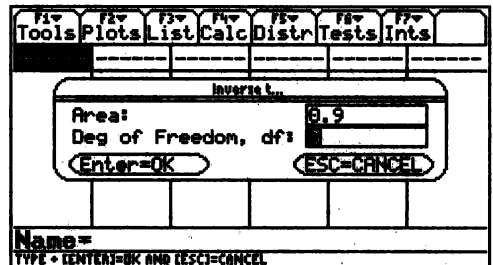
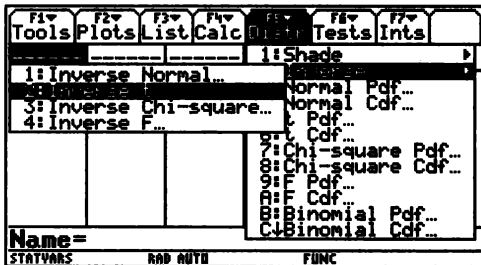
Abb. 7.9 zeigt beispielhaft die Ermittlung eines Quantils einer  $t$ -Verteilung mit 3 Freiheitsgraden. Es gilt:

$$\int_{-\infty}^b g(x; 3) dx = 0,9 \text{ mit}$$

$$g(x; 3) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2}$$

Das Quantil  $b$  wird mit  $t_{3;0,9}$  bezeichnet.

Voyage 200



Ein  $t$ -Quantil kann auch mit Hilfe der Flash-Applikation Statistik (siehe Kapitel 10, Moderne Hilfsmittel) ermittelt werden:

- 1 (1:Flash Apps...)
  - 2 (2:Inverse) 2 (2:Inverse t...)
- ergibt ein Dialogfenster zur Ermittlung eines  $t$ -Quantils.

Mit Hilfe der t-Verteilung kann nun auch ein Vertrauensbereich für  $\mu$  angegeben werden, wenn  $\sigma$  unbekannt ist. In den Formeln bei bekanntem  $\sigma$  ist nun  $\sigma$  durch  $s$  und der  $u$ -Wert durch den entsprechenden  $t$ -Wert zu ersetzen. Sie sind im Mittel etwas größer, da durch die Unkenntnis von  $\sigma$  eine zusätzliche Unsicherheit besteht.

### **(1 - $\alpha$ )-Vertrauensbereich für $\mu$ , wenn $\sigma$ unbekannt**

Gegeben ist eine Stichprobe des Umfangs  $n$  mit dem Mittelwert  $\bar{x}$  und der Standardabweichung  $s$ . Dann lautet der  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\mu$ ,

$$\bar{x} - t_{f,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{f,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{mit } f = n - 1 \quad (\text{t-Quantile: Tabelle 2, Seite 356})$$

### **Beispiel 7.7 : Vertrauensbereich für $\mu$ bei Normalverteilung/ $\sigma$ unbekannt**

Ein Abfüllgewicht ist praktisch ausreichend normalverteilt. Eine Stichprobe ergab folgende Werte (in g): 800,4 798,5 799,1 802,1 801,2 803,0 804,7 797,3.

Bestimme den 95%-Vertrauensbereich für  $\mu$ .

#### **Lösung**

Stichprobe:  $n = 8$ ;  $\bar{x} = 800,79$  g;  $s = 2,46$  g.

95%-Vertrauensbereich für  $\mu$ :  $1 - \alpha = 95\% = 0,95$ ,  $\alpha = 0,05$ ;  $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ ;  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$

$$\bar{x} - t_{f,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{f,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; f = n - 1 = 7; t_{f,1-\alpha/2} = t_{7,0,975} = 2,365$$

$$800,79 - 2,365 \cdot \frac{2,46}{\sqrt{8}} \leq \mu \leq 800,79 + 2,365 \cdot \frac{2,46}{\sqrt{8}} \quad \text{oder} \quad 798,73 \text{ g} \leq \mu \leq 802,85 \text{ g}$$

#### **Notwendiger Stichprobenumfang für den Vertrauensbereich für $\mu$**

Bei bekannter Standardabweichung  $\sigma$  der Normalverteilung ist der Vertrauensbereich für  $\mu$  gleich (Seite 280) gleich  $\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Daraus ergibt sich als Länge  $L$  des  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereiches für  $\mu$ :

$$L = 2 \cdot u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Daraus erkennt man, dass sich für ein festes Vertrauensniveau erst bei einer *Vervierfachung des Stichprobenumfangs  $n$  die Länge des Vertrauensbereiches für  $\mu$  halbiert.*

### **Beispiel 7.8 : Notwendiger Stichprobenumfang für einen Vertrauensbereich für $\mu$**

Ein Längenmaß ist normalverteilt mit  $\sigma = 0,2$  mm. Eine Stichprobe des Umfangs  $n = 25$  ergab  $\bar{x} = 20,4$  mm.

- Ermittle den 95%-Vertrauensbereich für  $\mu$ .
- Für welchen Stichprobenumfang besitzt der 99%-Vertrauensbereich für  $\mu$  die gleiche Länge wie jener aus a)?

#### **Lösung**

$$\text{Zu a)} \quad 20,4 - 1,960 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 20,4 + 1,960 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{25}} \quad \text{oder} \quad 20,32 \text{ mm} \leq \mu \leq 20,48 \text{ mm.}$$

Daraus folgt als Länge des Vertrauensbereiches:  $L = 0,1568 \text{ mm} \approx 0,16 \text{ mm}$ .



Zu b)  $2 \cdot 2,576 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{n}} = L \Rightarrow n = 43,2 \approx 43$ .

D.h. das höhere Vertrauensniveau 99% verlangt für eine gleich genaue Aussage einen deutlich größeren Stichprobenumfang.

Zur Bestimmung eines **Vertrauensbereiches für die Standardabweichung  $\sigma$**  geht man von der Größe mit den Werten  $(n - 1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$  aus, welche  $\chi^2$ -verteilt ist mit  $f = n - 1$  (Seite 267). Wie gezeigt werden kann, leitet man davon ausgehend ab:

**$(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\sigma$**   
 Gegeben ist eine Stichprobe des Umfangs  $n$  mit der Standardabweichung  $s$ . Dann lautet der  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\sigma$ :

$$s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f;1-\alpha/2}^2}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f;\alpha/2}^2}} \quad \text{mit } f = n - 1 \quad (\chi^2\text{-Quantile: Tabelle 3, Seite 357})$$

Ein Quantil  $\chi_{f;p}^2$  ist jener  $x$ -Wert, der von der Fläche unter der Dichtfunktion  $g(x; f)$  der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $f$  Freiheitsgraden den Flächenanteil  $p$  abschneidet. Die Quantile  $\chi_{f;p}^2$  sind für praktisch wichtige  $p$ -Werte tabelliert (Tabelle 3).

Abb. 7.10 zeigt beispielhaft die Ermittlung eines Quantils einer  $\chi^2$ -Verteilung mit 4 Freiheitsgraden. Es gilt:

$$\int_0^b g(x; 4) dx = 0,95 \text{ mit}$$

$$g(x; 4) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x}{4} \cdot e^{-x/2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Das Quantil  $b$  wird mit  $\chi_{4;0,95}^2$  bezeichnet.

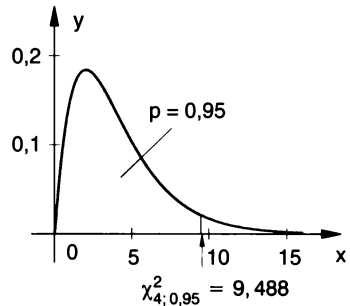
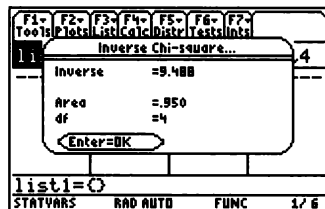
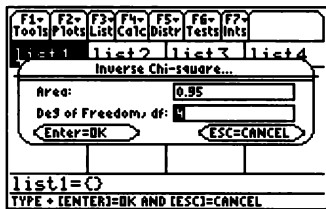


Abb. 7.10 Quantil einer  $\chi^2$ -Verteilung

7.9



Berechnung mit Hilfe der Flash-Applikation Statistik:

**APPS** **1** (1:Flash Apps...) **ENTER** **F5** **2** (2:Inverse) **3** (3:Inverse Chi square...) ergibt ein Dialogfenster zur Ermittlung eines  $\chi^2$ -Quantils.

**Beispiel 7.9 : Vertrauensbereich für  $\sigma$  bei Normalverteilung (Forts. von Beispiel 7.7)**

Ein Abfüllgewicht ist praktisch ausreichend normalverteilt. Eine Stichprobe ergab folgende Werte (in g): 800,4 798,5 799,1 802,1 801,2 803,0 804,7 797,3.

Bestimme den 95%-Vertrauensbereich für  $\sigma$ .

**Lösung**

Stichprobe:  $n = 8$ ;  $s = 2,46$  g.

95%-Vertrauensbereich für  $\sigma$ :  $1 - \alpha = 95\% = 0,95$ ,  $\alpha = 0,05$ ;  $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ ;  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$

$$s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f;1-\alpha/2}^2}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f;\alpha/2}^2}} \quad \text{mit } f = n - 1 = 7; \chi_{7;0,975}^2 = 16,01; \chi_{7;0,025}^2 = 1,690 \quad (\text{Tabelle 3})$$

$$2,46 \cdot \sqrt{\frac{7}{16,01}} \leq \sigma \leq 2,46 \cdot \sqrt{\frac{7}{1,690}} \quad \text{oder } 1,63 \text{ g} \leq \sigma \leq 5,01 \text{ g}$$

**Auswertung einer Messreihe**

Eine Messung ist stets mit "Fehlern" behaftet. Bei einer *wiederholten* Messung einer Größe unter gleichen Bedingungen erhält man im Allgemeinen voneinander abweichende Messwerte:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , die man als eine Messreihe bezeichnet. Man unterscheidet:

- (1) *Systematische Abweichungen* beruhen auf ungenauen Messmethoden oder fehlerhaften Messgeräten. Alle Werte fallen zu groß oder zu klein aus.
- (2) *Zufällige Abweichungen* entstehen durch eine Vielzahl von *unkontrollierbaren* Störeinflüssen und sind regellos verteilt. Zufallsabweichungen werden mit statistischen Methoden erfasst. Dabei wird die **Messgröße** in der Regel als (annähernd) **normalverteilt** betrachtet.

Jede Messung unterliegt vielen regellosen und nicht beherrschbaren kleineren Störeinflüssen, die als unabhängig voneinander angesehen werden können. Wenn keiner dieser Störeinflüsse dominiert, so addieren sich die von ihnen ausgelösten kleinen Messabweichungen zu einer gesamten Abweichung, die nach dem Zentralen Grenzwertsatz der Statistik (Seite 253) als normalverteilt betrachtet werden kann.

**Auswertung einer Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  durch Angabe des Vertrauensbereichs für  $\mu$  (nach ÖNORM DIN 1319/Teil 3)**

$$x = \bar{x} \pm u \quad \text{mit} \quad u = t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = t_{f;1-\alpha/2} \cdot s_{\bar{x}}$$

Dabei ist  $\bar{x}$  Schätzwert für den unbekanntem wahren Wert  $\mu$  der Messgröße.  $u$  wird als *Messunsicherheit* bezeichnet.

*Anmerkung:* Die Messunsicherheit  $u$  wird öfter auch so angegeben, dass man den Faktor  $t$  der Einfachheit halber durch 1 ersetzt, als Messunsicherheit also die Standardabweichung des Mittelwertes angibt. Man schreibt dann:  $x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ .  $s_{\bar{x}}$  heißt auch *Standardfehler* des Mittelwerts.

**Beispiel 7.10 : Auswertung einer Messreihe**

Die Schwingungsdauer  $T$  eines Fadenpendels wurde zehnmal gemessen (Werte in ms):  
1 943, 1 955, 1 933, 1 951, 1 925, 1 936, 1 942, 1 947, 1 939, 1 929

Systematische Messabweichungen können ausgeschlossen werden. Gib das Messergebnis für die Schwingungsdauer  $T$  an.

**Lösung**

$$\bar{T} = 1940,0 \text{ ms}; s = 9,5 \text{ ms.}$$

Bei einem Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 95\%$  ist  $t_{9;0,975} = 2,262$ ; damit:

$$T = \bar{T} \pm u \quad \text{mit } u = t_{9;0,975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,8 \text{ ms} \approx 7 \text{ ms};$$

Somit kann das Messergebnis geschrieben werden:  $T = (1940 \pm 7) \text{ ms} = 1940 \cdot (1 \pm 0,4\%)$ .

Der unbekannte "wahre" Wert  $\mu$  der Schwingungsdauer wird daher mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% durch das Intervall zwischen 1933 ms und 1947 ms erfasst.

Bei dem höheren Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 99\%$  ist  $t_{9;0,995} = 3,250$ . Damit ergibt sich:

$$T = \bar{T} \pm u \quad \text{mit } u = t_{9;0,995} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 9,8 \text{ ms} \approx 10 \text{ ms};$$

also  $T = 1940 \pm 10 \text{ ms} = 1940 \cdot (1 \pm 0,5\%)$ .

### Im Überblick: Vertrauensbereich für $\mu$ und $\sigma$ einer Normalverteilung

**Ausgehend von einer Stichprobe** von Werten eines normalverteilten Merkmals kann man sowohl den **(1 -  $\alpha$ )-Vertrauensbereich für den Erwartungswert  $\mu$**  wie auch jenen für die **Standardabweichung  $\sigma$**  der Normalverteilung ermitteln.

Der **(1 -  $\alpha$ )-Vertrauensbereich für  $\mu$**  ist ein Intervall, das dieses mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dem Vertrauensniveau  $1 - \alpha$ , einschließt. Seine Berechnung hängt ab, ob die Standardabweichung  $\sigma$  der Normalverteilung als bekannt angesehen werden kann oder nicht. Im letzteren Fall tritt die Stichprobenstandardabweichung  $s$  an die Stelle von  $\sigma$ ; weiters wird das zugehörige vom Stichprobenumfang  $n$  unabhängige Quantil der  $u$ -Verteilung durch jenes der **t-Verteilung** ersetzt, das von  $n$  abhängt. Für eine **Halbierung der Länge  $L$**  des Vertrauensbereichs für  $\mu$  ist bei bekanntem  $\sigma$  der **vierfache Stichprobenumfang** notwendig.

Der **(1 -  $\alpha$ )-Vertrauensbereich für  $\sigma$**  ist ein Intervall, das die Standardabweichung  $\sigma$  mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dem Vertrauensniveau  $1 - \alpha$ , einschließt. Seine Berechnung erfordert die Berechnung von Quantilen der  $\chi^2$ -Verteilung.

### Aufgaben

- 7.20** Ein Abfüllgewicht ist in guter Näherung normalverteilt. Aus längerer Beobachtung weiß man, dass sich die Standardabweichung  $\sigma$  auch bei Änderungen des Erwartungswertes  $\mu$  praktisch nicht ändert und ihr Wert mit  $\sigma = 2,0 \text{ g}$  angegeben werden kann. Eine Stichprobe ergab folgende Werte:  
102,5 g 97,1 g 99,2 g 100,3 g 98,5 g 101,3 g  
Bestimme den 95%- und 99%-Vertrauensbereich für  $\mu$ .
- 7.21** Einem Lieferlos von elektrischen Widerständen, deren Größe normalverteilt ist, werden 20 Widerstände entnommen. Als Mittel ergab sich 111,0  $\Omega$ , als Standardabweichung  $s = 3,4 \Omega$ .
- a) In welchem Bereich ist mit dem Erwartungswert  $\mu$  zu rechnen? ( $1 - \alpha = 95\%$ ).  
b) In welchem Bereich ist mit der Standardabweichung  $\sigma$  zu rechnen? ( $1 - \alpha = 95\%$ ).
- 7.22** Aus einer Charge Kondensatoren werden 25 Stück entnommen und ihre Kapazität gemessen. Ihr Mittel ergibt 52,40  $\mu\text{F}$  und ihre Standardabweichung 2,90  $\mu\text{F}$ . Die Kapazität der Kondensatoren kann als normalverteilt angenommen werden. In welchem Bereich sind die beiden Parameter dieser Normalverteilung anzunehmen, wenn das Vertrauensniveau a) 90%      b) 95%      c) 99% ist?

- 7.23** A machine produces metal rods. A random sample of 15 rods is selected and the diameter is measured (unit mm):  
 9,25 9,22 9,24 9,26 9,27 9,24 9,21 9,27  
 9,20 9,24 9,21 9,29 9,25 9,26 9,25.  
 Construct a 95% confidence interval on the mean rod parameter.
- 7.24** Bei der Herstellung elektrischer Widerstände ergibt sich die Notwendigkeit einer ständigen Überwachung. Dabei weiß man, dass die Werte recht gut normalverteilt sind mit  $\sigma = 5,2 \Omega$ . Welcher Stichprobenumfang ist nötig, um die Fertigungslage  $\mu$  auf  $\pm 1 \Omega$  genau zu schätzen? ( $1 - \alpha = 95\%$ )
- 7.25** Aus einer Charge elektrischer Widerstände werden 36 Stück entnommen. Man stellt einen Mittelwert  $\bar{x} = 98,40 \Omega$  fest. Die Widerstandswerte können als normalverteilt mit  $\sigma = 5,80 \Omega$  angenommen werden. Wie ist der Erwartungswert der Widerstandswerte bei einem Vertrauensniveau **a) 90%** **b) 95%** **c) 99%** einzuschätzen?  
**d)** Für welchen Stichprobenumfang kann man bei  $1 - \alpha = 99\%$  die gleiche Aussagegenauigkeit wie bei  $1 - \alpha = 95\%$  und  $n = 36$  erreichen?
- 7.26** Die Abfüllmenge von Marmelade ist normalverteilt mit  $\mu_0 = 450$  g. Nach einer Neueinstellung kann man eine Änderung der mittleren Abfüllmenge  $\mu$  nicht ausschließen. Zur Klärung entnimmt man eine Stichprobe (Angabe in g):  
 450,8 449,4 450,2 451,6 452,5 450,5 449,8 451,4 451,0 451,9  
 Ermittle den 95%- und 99%-Vertrauensbereich für  $\mu$ . Was kann nun über die vermutete Änderung der Lage  $\mu$  gesagt werden?
- 7.27** In einer Brauerei wird Bier in Fässern zu 1 hl als Sollmenge abgefüllt. Die Abfüllmengen können als normalverteilt mit der Standardabweichung  $\sigma = 0,35$  l angesehen werden.  
**a)** Ermittle den 99%-Vertrauensbereich für den Mittelwert  $\mu$  der Abfüllmenge, wenn in 50 Fässern eine mittlere Abfüllmenge von 100,3 l festgestellt wurde. Enthält dieses Intervall die Sollmenge  $\mu_0 = 100$  l? Welche Folgerung kann gezogen werden?  
**b)** Welcher Stichprobenumfang ist notwendig, wenn beim gleichen Vertrauensniveau die Länge des Vertrauensbereiches höchstens 0,2 l sein darf?
- 7.28** Die Reisslast eines speziellen Drahttyps ist normalverteilt. An 12 Drähten werden folgende Werte (in N) bestimmt:  
 82, 91, 88, 73, 85, 77, 81, 89, 75, 79, 80, 71.  
 Der Hersteller behauptet, dass die Standardabweichung der Reisslast 3,8 N beträgt. Ermittle den 99%-Vertrauensbereich für  $\sigma$  und bewerte damit die Aussage des Herstellers.
- 7.29** Auf einem CNC-Automaten werden Wellen gefertigt, deren Länge normalverteilt angenommen werden kann; dabei erfolgte eine Einstellung der Standardabweichung  $\sigma = \sigma_0 = 0,032$  mm. Zur Überprüfung, ob sich die Standardabweichung  $\sigma$  geändert hat, wurde nach einiger Zeit eine Stichprobe entnommen, wobei sich folgende Werte (in mm) ergaben: 49,93 50,03 49,99 50,08 49,96 50,03.  
 Ermittle den Vertrauensbereich für  $\sigma$ . Kann daraus eine Änderung von  $\sigma$  begründet werden? ( $\alpha = 5\%$  und  $\alpha = 1\%$ )
- 7.30** Eine Spannung  $U$  wurde unter gleichen Bedingungen gemessen. Es ergab sich folgende Messreihe (in V): ~~44,8~~ 45,3 46,0 ~~46,1~~ 46,4 47,0 47,3 47,8 48,1 48,4 49,2.  
 Wie lautet das Messergebnis ( $1 - \alpha = 95\%$ )?
- 7.31** Für die Masse  $m$  des schwingenden Körpers eines Pendels liegen folgende unter gleichen Versuchsbedingungen gemessene Werte vor (in g):  
 2,31 2,34 2,26 2,28 ( 2,30 2,35 ) 2,27 2,28 2,34 2,27.  
 Gib das Messergebnis für  $m$  an ( $1 - \alpha = 95\%$ ).

## 7.5 Test über den Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung

In der angewandten Statistik kommt es immer wieder zu typischen Fragestellungen wie etwa:

- Hat sich ein Fertigungsprozess geändert? Kann beispielsweise angenommen werden, dass nach einiger Zeit die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  einer Normalverteilung noch gleich ihren Sollwerten sind?
- Kann ein bestimmtes Merkmal normalverteilt angenommen werden?
- Besteht ein Unterschied in der Fertigung (im Mittelwert bei einem normalverteilten Merkmal, beim Fehleranteil, bei der mittleren Fehleranzahl pro Einheit) bei zwei oder mehr Lieferanten oder Verfahren?
- Besteht ein Unterschied in der Gleichmäßigkeit (Streuung) zweier Normalverteilungen?

Die Beantwortung dieser oder ähnlicher Fragen kann mit einem **statistischen Test** erfolgen. In allen statistischen Tests gibt es eine zu prüfende Hypothese, die so genannte **Nullhypothese  $H_0$**  (Hypothese = nicht bewiesene Behauptung). Der Nullhypothese gegenüber steht die **Alternativhypothese  $H_1$** . Sie ist die **Verneinung** der  $H_0$ -Hypothese und formuliert, dass der in der  $H_0$ -Hypothese ausgedrückte Sachverhalt gewissermaßen "null und nichtig" ist.

Beispielsweise kann die Nullhypothese  $H_0$  darin bestehen, dass der Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung gleich einem Sollwert  $\mu_0$  ist. Dagegen drückt die Alternativhypothese  $H_1$  die Vermutung aus, dass  $\mu$  nicht gleich  $\mu_0$  sind.

Ein statistischer Test entscheidet mit Hilfe einer **Zufallstichprobe** zwischen  $H_0$  und  $H_1$ .  $H_0$  wird nur dann als statistisch widerlegt angesehen und zugunsten von  $H_1$  verworfen, wenn der Stichprobenbefund in einem **signifikanten** (= kennzeichnenden oder bedeutenden) Gegensatz zu ihr steht, dieser "praktisch" nicht mehr mit  $H_0$  vereinbar ist. Man spricht daher bei einem derartigen Prüfverfahren von einem **Signifikanztest**.

### Beispiel 7.11 : Test über den Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung

Die Dosiermenge einer chemischen Substanz, die in eine Flüssigkeit eingeleitet wird, ist normalverteilt. Aus längerer Beobachtung weiß man, dass sich die Standardabweichung  $\sigma$  der Dosiermenge auch bei Änderungen der mittleren Dosiermenge praktisch nicht ändert und ihr Wert mit  $\sigma = 1,0$  g angegeben werden kann. Die mittlere Dosiermenge  $\mu$  wurde vor einiger Zeit auf den Sollwert  $\mu_0 = 50,0$  g eingestellt. Es soll nun überprüft werden, ob die mittlere Dosiermenge noch den Sollwert einhält. Dazu wird eine Stichprobe entnommen, die folgende Werte (Angabe in g) ergibt: 49,2 50,0 51,4 52,3 50,6 50,3 49,6 51,2 51,7 50,8. Kann bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  weiterhin angenommen werden, dass die mittlere Dosiermenge  $\mu$  unverändert gleich  $\mu_0$  ist?

#### Lösung

Die Durchführung eines statistischen Tests kann in mehrere Schritte aufgelöst werden. Dies soll ausführlich in diesem Beispiel geschehen.

#### u-Test zweiseitig

##### 1. Schritt: Aufstellen der Hypothesen

Wir gehen davon aus, dass nach wie vor " $\mu = \mu_0$ " zutrifft, wodurch diese Behauptung die Nullhypothese  $H_0$  ist. Ihre Verneinung, also " $\mu \neq \mu_0$ ", ist die Alternativhypothese  $H_1$ .

Kurzschreibweise:  $H_0: \mu = \mu_0$  gegen  $H_1: \mu \neq \mu_0$ .

*Der Test wird unter der Voraussetzung geführt, dass  $H_0$  zutrifft.*  $H_1$  wird nur akzeptiert, wenn ein Stichprobenergebnis  $H_0$  unglaubwürdig macht. Ist dies nicht der Fall, so bleibt die Nullhypothese mangels ausreichender Gegenargumente und nicht wegen nachgewiesener Richtigkeit aufrecht.

Die Hypothesen sind *vor* der Stichprobenentnahme festzulegen; sie dürfen nicht auf Grund des Stichprobenbefundes formuliert werden!

## 2. Schritt: Prüfgröße berechnen

Dazu geht man bei diesem Test vom arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  der Stichprobe aus und bestimmt durchaus naheliegend  $\bar{x} - \mu_0$ , die Differenz des gefundenen Stichprobenmittels  $\bar{x}$  zu  $\mu_0$ . Diese wird noch durch  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  dividiert, das Ergebnis ist die **Prüfgröße**  $u_{\text{prüf}}$  dieses

$$\text{Testes: } u_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

Die Mittelwerte  $\bar{x}$  von Stichproben des Umfangs  $n$  sind, wie auf Seite 266 ausgeführt, normalverteilt mit  $\mu_{\bar{x}} = \mu_0$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Die Verteilung der Prüfgröße  $u_{\text{prüf}}$  entsteht durch Standardisierung einer Normalverteilung. Die  $u_{\text{prüf}}$ -Werte sind daher  $u$ -verteilt. Dies ist auch der Grund, warum die Prüfgröße mit  $u_{\text{prüf}}$  bezeichnet wird und der hier angewandte Test ein **u-Test** heißt, genauer ein **Einstichproben-u-Test**. Ein anderer Name für diesen Test ist Einstichproben-z-Test oder Einstichproben-GAUß-Test.

Der Wert der Prüfgröße beträgt bei der vorliegenden Stichprobe ( $\bar{x} = 50,71$  g,  $n = 10$ ):

$$u_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{50,71 - 50,00}{1,00} \cdot \sqrt{10} = 2,245.$$

Da man die Verteilung der Prüfgröße kennt, kann man nun ihren aus der Stichprobe berechneten Wert auf Plausibilität bewerten.

## 3. Schritt: Kritischen Wert ermitteln

Natürlich sind bei Zutreffen der  $H_0$ -Hypothese Abweichungen der Mittelwerte  $\bar{x}$  von  $\mu_0$  zu erwarten. Fallen sie gering aus, so sind sie unbedenklich für die  $H_0$ -Hypothese. Es gilt nun eine Grenze zu ziehen zu den größeren Abweichungen, die man nicht mehr durch den Zufall erklären will. Man sagt auch, dass sie "kritisch", d.h. unwahrscheinlich, für  $H_0$  sind. Die Abweichungen der Mittelwerte  $\bar{x}$  von  $\mu_0$  werden durch die Prüfgröße  $u_{\text{prüf}}$  erfasst. Um festzustellen, dass der gefundene Wert  $u_{\text{prüf}}$  in einem für  $H_0$  **kritischen Bereich** liegt, ist der Vergleich mit einem **kritischen Wert** nötig. Seine Angabe setzt ein bestimmtes **Signifikanzniveau**  $\alpha$  voraus: dieses ist die (kleine) Wahrscheinlichkeit dafür, die Prüfgröße bei zutreffender  $H_0$ -Hypothese im kritischen Bereich vorzufinden, was man gegen die Richtigkeit der  $H_0$ -Hypothese und damit für die  $H_1$ -Hypothese deutet.

**Das Signifikanzniveau  $\alpha$  ist somit die maximal tolerierte Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  zu Unrecht verworfen wird.**

Man ist bestrebt, diese Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  zuungunsten von  $H_0$  klein zu halten. Ihre Wahl erfolgt vor Testbeginn. Übliche Werte für  $\alpha$  sind 5%, 1% oder 0,1%. Man wird  $\alpha = 5\%$  wählen, wenn man  $H_0$  schon bei eher schwacher "Beweislast" verwerfen will; dagegen wird man  $\alpha = 1\%$  oder sogar nur 0,1% wählen, wenn man  $H_0$  nur bei klaren oder sehr klaren Anzeichen gegen diese verwerfen will, wenn also ein unberechtigtes Verwerfen von  $H_0$  entsprechend schwerwiegend ist.

Da die Prüfgröße  $u$ -verteilt ist, ist es für eine zutreffende  $H_0$ -Hypothese kritisch, wenn  $u_{\text{prüf}}$  kleiner als  $u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$  oder größer als  $u_{1-\alpha/2}$  ausfällt, wenn also  $|u_{\text{prüf}}| > u_{1-\alpha/2}$  ist (Abb. 7.11). Die Wahrscheinlichkeit dafür ist jedesmal gleich  $\frac{\alpha}{2}$ , zusammen also gleich  $\alpha$ .

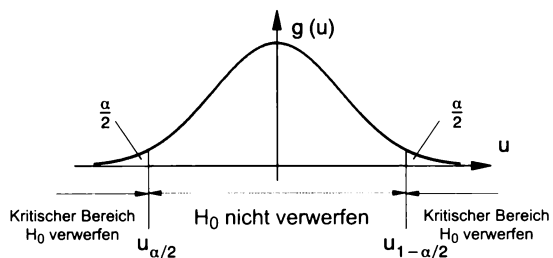


Abb. 7.11 Für  $H_0$  kritisch:  $u_{\text{prüf}} < u_{\alpha/2}$  oder  $u_{\text{prüf}} > u_{1-\alpha/2}$

$u_{1-\alpha/2}$  ist der **kritische Wert** für die auf  $\sigma_{\bar{x}}$  bezogenen Abweichungen der Mittelwerte  $\bar{x}$  von  $\mu_0$ . Die beiden Intervalle mit  $u < u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$  bzw.  $u > u_{1-\alpha/2}$  bilden zusammen den so genannten **kritischen Bereich**.

Beachte, dass die Prüfgröße  $u_{\text{prüf}}$  negativ ist, wenn  $\mu$  kleiner als  $\mu_0$  ist. Da ein Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  vorgegeben ist, ist  $\frac{\alpha}{2} = 2,5\% = 0,025$ ,  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ . Der kritische Wert ist daher  $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,960$ .

#### 4. Schritt: Entscheidung

Die Entscheidungsregel lautet somit:

$|u_{\text{prüf}}| > u_{1-\alpha/2}$ : Die  $H_0$ -Hypothese ist zugunsten von  $H_1$  zu verwerfen, die Abweichung von  $\bar{x}$  gegenüber  $\mu_0 = 50,00$  g ist beim Signifikanzniveau  $\alpha$  so groß, dass sie bei Zutreffen der  $H_0$ -Hypothese praktisch kaum mehr vorkommt (genauer mit einer Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ ); eine Abweichung von  $\mu$  gegenüber  $\mu_0$  gilt als statistisch "nachgewiesen". Man sagt auch, dass die Abweichung bei diesem Signifikanzniveau  $\alpha$  **signifikant** oder auch "überzufällig" ist.

$|u_{\text{prüf}}| \leq u_{1-\alpha/2}$ : Die  $H_0$ -Hypothese bleibt aufrecht, die Abweichung ist beim Signifikanzniveau  $\alpha$  noch zufallsbedingt erklärbar.

Der kritische Wert, hier  $u_{1-\alpha/2}$ , ist also die vom Signifikanzniveau  $\alpha$  abhängige Grenze für die Glaubwürdigkeit der  $H_0$ -Hypothese. Die Anwendung dieser Entscheidungsregel auf unser Beispiel lautet:  $H_0$  wird zugunsten von  $H_1$  verworfen, da  $|u_{\text{prüf}}| > u_{0,975} = 1,960$  ist.

Führt man einen Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  bei zutreffender  $H_0$ -Hypothese oftmals durch, so wird man durchschnittlich in 100 Fällen fünfmal die  $H_0$ -Hypothese verwerfen, also einen Fehlalarm begehen.

Bei  $\alpha = 1\%$  könnte jedoch auf Grund der vorliegenden Stichprobe  $H_0$  nicht verworfen werden, da  $|u_{\text{prüf}}| \leq u_{0,995} = 2,576$  ist.

Da die Alternativhypothese  $H_1$  eine Vermutung auf **Änderung** von  $\mu$  ausspricht, was eine Vergrößerung wie auch eine Verkleinerung einschließt, spricht man bei dem durchgeführten Test von einem **zweiseitigen Test**.

#### Anmerkungen

- (1) Null- und Alternativhypothese werden beim Signifikanztest nicht gleich behandelt. *Das Hauptanliegen ist,  $H_0$  möglichst selten irrtümlich abzulehnen* und dies nur mit kontrollierter Wahrscheinlichkeit.
- (2) Zur Signifikanzprüfung kann man statt des u-Testes auch den Vertrauensbereich für  $\mu$  heranziehen, der aufgrund der vorliegenden Stichprobe ermittelt wird. Ist der Test signifikant auf dem Niveau  $\alpha$ , so schließt der  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\mu$  den Wert  $\mu_0$  nicht mehr ein. Siehe dazu Beispiel 7.6, Seite 281.
- (3) Der Name "Einstichprobentest" kommt daher, weil hier eine Stichprobe mit einer Grundgesamtheit verglichen wird und nicht etwa zwei oder mehrere Stichproben miteinander.



#### Achtung!

**Ein statistischer Test kann eine Vermutung nie mit Sicherheit bestätigen oder widerlegen, da er auf einem Stichprobenergebnis beruht!**

So kann im Beispiel 7.11, Seite 288, bei Gleichheit von  $\mu$  und  $\mu_0$ , also zutreffender  $H_0$ -Hypothese, das Mittel der Stichprobenwerte, wenn auch wenig wahrscheinlich, so weit von  $\mu_0$  abweichen, dass die  $H_0$ -Hypothese fälschlich verworfen wird. Dieses Fehlurteil bezeichnet man als **Fehler 1. Art** oder auch als "Fehlalarm". Seine Wahrscheinlichkeit ist durch das Signifikanzniveau  $\alpha$  gegeben, weshalb dieser Fehler auch  $\alpha$ -Fehler genannt wird.

Andererseits könnte es passieren, dass bei einem großen Unterschied von  $\mu$  und  $\mu_0$  zufälligerweise  $\bar{x}$  kaum von  $\mu_0$  abweicht. Dies kommt natürlich umso mehr vor, wenn  $\mu$  nicht viel von  $\mu_0$  abweicht. Die Folge ist, dass die  $H_0$ -Hypothese fälschlich beibehalten würde. Dieses Fehlurteil heißt **Fehler 2. Art** oder "unterlassener Alarm".

Je kleiner  $\alpha$ , desto "nullhypothesenfreundlicher" geht man vor. Ist  $\alpha = 0$ , so darf man die Nullhypothese überhaupt nie verwerfen, weil erst dadurch jede fälschliche Verwerfung ausgeschlossen ist! "Wenig falsche" Nullhypothesen sind durch einen statistischen Test kaum zu erkennen. Auch durch einen kleinen Stichprobenumfang wird die  $H_0$ -Hypothese begünstigt. Die folgende Tabelle stellt grundsätzlich alle vier Entscheidungsmöglichkeiten zusammen.

Testentscheidung	In Wirklichkeit ist	
	$H_0$ wahr	$H_0$ falsch
$H_0$ verwerfen (zugunsten $H_1$ )	Falsche Entscheidung: Fehler 1. Art, Fehlalarm	Richtige Entscheidung
$H_0$ nicht verwerfen	Richtige Entscheidung	Falsche Entscheidung: Fehler 2. Art, unterlassener Alarm

**P-Wert (P-value) eines Tests**

Darunter versteht man das Signifikanzniveau, bei dem der Test die  $H_0$ -Hypothese *aufgrund der entnommenen Stichprobe* gerade noch verwerfen würde.

Man erhält den P-Wert durch Gleichsetzen der aus der Stichprobe berechneten Prüfgröße mit dem kritischen Wert. Der P-Wert ist nicht mit dem vor Testbeginn festgelegten Signifikanzniveau  $\alpha$  zu verwechseln.  $H_0$  wird verworfen, wenn  $P < \alpha$ .

*Beispiel:* P-Wert zum Test in Beispiel 7.11, Seite 288

$$u_{\text{prüf}} = u_{1-P/2} = \frac{50,71 - 50,00}{1,00} \cdot \sqrt{10} = 2,245 \Rightarrow 1 - \frac{P}{2} = 0,9876 \text{ oder } P = 2,48\%.$$

Da  $2,48\% < 5\%$ , ist  $H_0$  auf dem Niveau  $\alpha = 5\%$  zu verwerfen.

**P-Wert und Sternsymbolik**

Die Kenntnis des P-Wertes lässt folgende Bewertung bei der Testentscheidung je nach Stichprobenergebnis zu, wenn kein Signifikanzniveau vorgegeben ist:

P-Bereich	Interpretation	Symbol
$P \geq 5\%$	Zufälliges Ergebnis. $H_0$ bleibt aufrecht.	-
$1\% \leq P < 5\%$	Schwach signifikantes Ergebnis. Das Zutreffen von $H_1$ ist wahrscheinlich, aber noch wenig abgesichert.	*
$0,1\% \leq P < 1\%$	Signifikantes Ergebnis: Es kann davon ausgegangen werden, dass $H_1$ zutrifft.	**
$P < 0,1\%$	Hochsignifikantes Ergebnis: $H_1$ trifft praktisch sicher zu.	***



Man kann einen **u-Test** auch **einseitig** führen, wenn nur die Abweichungen nach einer Seite interessieren. In diesem Fall lautet die  $H_1$ -Hypothese entweder  $\mu > \mu_0$  oder  $\mu < \mu_0$ . Ob ein Test zweiseitig oder einseitig zu führen ist, erkennt man, wie die Frage gestellt ist, die der Test beantworten soll.

*Beispiele:*

- "Kann weiterhin angenommen werden, dass die mittlere Dosiermenge  $\mu$  keine Änderung erfahren hat?" Das Wort "Änderung" schließt eine mögliche Vergrößerung oder Verkleinerung ein, die interessierende Frage ist also *zweiseitig* formuliert.
- Aber: "Ist mit einer *Vergrößerung* der mittleren Dosiermenge zu rechnen?" In diesem Fall ist die Frage *einseitig* formuliert.

### Beispiel 7.12 : Einseitiger Einstichproben-u-Test

Die Reisslast eines bestimmten Drahttyps ist in guter Näherung normalverteilt mit der Standardabweichung  $\sigma = 2,0$  N. Gefordert wird ein Mindestwert  $\mu_0 = 100,0$  N für die mittlere Reisslast. Ein Abnehmer vermutet, dass diese Forderung nicht eingehalten wird, dass also  $\mu$  kleiner als  $\mu_0$  ist. Eine zur Klärung genommene Zufallsstichprobe ergibt folgende Werte (in N): 100,8 99,2 97,7 100,0 96,7 99,5 97,4 96,0 101,5 95,1 98,3 98,8.

Bestätigt diese Stichprobe bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  die Vermutung des Abnehmers, dass  $\mu$  kleiner als  $\mu_0$  ist?

**Lösung**

#### u-Test einseitig nach unten

##### 1. Schritt: Aufstellen der Hypothesen

Die befürchtete Vermutung lautet, dass  $\mu$  *kleiner* als  $\mu_0$  ist. Dadurch wird eine Einseitigkeit ausgedrückt. Diese Vermutung ist die  $H_1$ -Hypothese, ihre Verneinung ist die  $H_0$ -Hypothese:  $H_0: \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1: \mu < \mu_0$ .

Da die  $H_0$ -Hypothese als kleinstmöglichen Mittelwert noch  $\mu = \mu_0$  zulässt, wird der Test unter der Voraussetzung geführt, dass  $\mu = \mu_0$  ist. Oft wird daher bei einem einseitigen Test dieser Art die  $H_0$ -Hypothese auch nur in der Form  $H_0: \mu = \mu_0$  formuliert.

##### 2. Schritt: Prüfgröße berechnen

Arithmetischer Mittelwert der Stichprobe:  $\bar{x} = 98,42$  N. Als **Prüfgröße** wird wieder die

u-verteilte Größe  $u_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$  verwendet:

$$u_{\text{prüf}} = \frac{98,42 - 100}{2} \cdot \sqrt{12} = -2,742.$$

##### 3. Schritt: Kritischen Wert ermitteln

Der **kritische u-Wert** auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  ist gleich

$u_\alpha = u_{0,01} = -2,326$ , da die Prüfgröße  $u_{\text{prüf}}$  bei  $\mu = \mu_0$  nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  kleiner als  $-2,326$  ist.

##### 4. Schritt: Entscheidung

Die Entscheidungsregel lautet somit:

$u_{\text{prüf}} < u_\alpha$  Die  $H_0$ -Hypothese ist zugunsten von  $H_1$  zu verwerfen.

$u_{\text{prüf}} \geq u_\alpha$  Die  $H_0$ -Hypothese bleibt aufrecht.

Da  $u_{\text{prüf}} = -2,74 < -2,326$ , ist die Vermutung des Abnehmers, dass  $\mu$  kleiner als 100,0 N ist, auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  bestätigt.

**Anmerkung**

Der u-Test kann auch "einseitig nach oben" geführt werden:  $H_0: \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1: \mu > \mu_0$ . In diesem Fall ist  $H_1$  bestätigt, wenn  $u_{\text{prüf}} > u_{1-\alpha}$  ist.

Ist  $\sigma$  **nicht bekannt**, so kann ein dem u-Test vergleichbarer Test geführt werden. Da nun die Prüfgröße  $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$  einer t-Verteilung unterliegt (siehe Seite 281), spricht man nun von einem **Einstichproben-t-Test** und bezeichnet die Prüfgröße mit  $t_{\text{prüf}}$ . Ansonsten verläuft der Test wie der u-Test.

**Beispiel 7.13 : Zweiseitiger Einstichproben-t-Test**  
(siehe Beispiel 7.7, Seite 283)

Ein Abfüllgewicht ist praktisch ausreichend normalverteilt. Sollwert des mittleren Abfüllgewichtes ist  $\mu = \mu_0 = 800$  g. Zur Überprüfung, ob dieser Wert noch eingehalten wird, wird eine Stichprobe entnommen. Es ergeben sich folgende Werte (in g):  
800,4 798,5 799,1 802,1 801,2 803,0 804,7 797,3.

Kann noch davon ausgegangen werden, dass der Sollwert eingehalten wird? Verwende ein Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ .

**Lösung****Einstichproben-t-Test zweiseitig**

Stichprobe:  $n = 8$ ;  $\bar{x} = 800,79$  g;  $s = 2,464$  g.

## 1. Schritt: Aufstellen der Hypothesen

Da die Testfrage zweiseitig gestellt ist ("Wird der Sollwert eingehalten?" Nicht etwa: "Hat sich  $\mu$  gegenüber dem Sollwert vergrößert?"), lauten die Hypothesen:

$H_0: \mu = \mu_0$  gegen  $H_1: \mu \neq \mu_0$ .

## 2. Schritt: Prüfgröße berechnen

$$\text{Prüfgröße } t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{800,79 - 800}{2,464} \cdot \sqrt{8} = 0,904.$$

## 3. Schritt: Kritischen Wert ermitteln

Da die Prüfgröße t-verteilt ist mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden, ist es für eine zutreffende  $H_0$ -Hypothese kritisch, wenn  $t_{\text{prüf}}$  kleiner als  $t_{f, \alpha/2} = -t_{f, 1-\alpha/2}$  oder größer als  $t_{f, 1-\alpha/2}$  ausfällt, wenn also  $|t_{\text{prüf}}| > t_{f, 1-\alpha/2}$  ist.  $t_{f, 1-\alpha/2}$  ist somit der **kritische Wert**.

Da ein Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  vorgegeben ist, ist  $\frac{\alpha}{2} = 2,5\% = 0,025$ ,  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ . Wegen  $f = 8 - 1$  lautet daher der kritische Wert:

$$t_{f, 1-\alpha/2} = t_{7, 0,975} = 2,365.$$

## 4. Schritt: Entscheidung

Die Entscheidungsregel lautet somit:

$|t_{\text{prüf}}| > t_{f, 1-\alpha/2}$ : Die  $H_0$ -Hypothese ist zugunsten von  $H_1$  zu verwerfen

$|t_{\text{prüf}}| \leq t_{f, 1-\alpha/2}$ : Die  $H_0$ -Hypothese bleibt aufrecht.

Da  $|t_{\text{prüf}}| = 0,904 \leq 2,365$ , bleibt die  $H_0$ -Hypothese aufrecht; es kann weiterhin angenommen werden, dass  $\mu$  den Sollwert  $\mu_0$  einhält. Das Stichprobenergebnis kann noch als zufallsbedingt erklärt werden.

## Im Überblick: Test über den Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung

Ein **statistischer Test** ist ein grundlegendes wissenschaftliches Verfahren, um mit Hilfe einer **Zufallstichprobe** zwischen zwei Hypothesen, der **Nullhypothese  $H_0$**  und ihrer Verneinung, der **Alternativhypothese  $H_1$** , zu entscheiden. Dabei besteht wesentlich das Interesse,  $H_0$  möglichst selten irrtümlich abzulehnen und dies nur mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dem **Signifikanzniveau  $\alpha$**  des Testes. Daher wird der Test auch unter der Voraussetzung geführt, dass  $H_0$  zutrifft. Ihre Verneinung  $H_1$  wird nur akzeptiert, wenn das Stichprobenergebnis  $H_0$  ausreichend unglaubwürdig macht. Zum Unterschied von logischen Schlüssen können **statistische Tests nicht zu sicherem Wissen** führen, da sie auf Stichprobenbefunden beruhen.

Der **Vergleich des Mittelwertes  $\mu$  einer Normalverteilung mit einem Sollwert  $\mu_0$**  kann mit dem **Einstichproben-u-Test** durchgeführt werden, wenn die Standardabweichung  $\sigma$  der Normalverteilung **bekannt** ist. Ist  $\sigma$  **unbekannt**, so ist der **Einstichproben-t-Test** zu verwenden. Er wird ganz gleich wie der u-Test durchgeführt, jedoch tritt die Stichprobenstandardabweichung  $s$  an die Stelle von  $\sigma$  und die kritischen Werte lauten  $t_{f; 1-\alpha/2}$  bzw.  $t_{f; 1-\alpha}$  statt  $u_{1-\alpha/2}$  bzw.  $u_{1-\alpha}$ .

In beiden Fällen kann auch mit Hilfe des entsprechenden Vertrauensbereiches für  $\mu$  die gleiche Entscheidung erreicht werden.

Die beiden angeführten Tests können **zweiseitig** oder auch **einseitig** geführt werden. Im zweiseitigen Fall interessiert man sich, ob es zu einer beliebigen Verschiebung von  $\mu$  gekommen ist:  $H_1: \mu \neq \mu_0$ . Im einseitigen Fall interessiert es nur, ob es zu einer Verschiebung von  $\mu$  *entweder* nach oben *oder* nach unten gekommen ist:

$H_1: \mu > \mu_0$  oder  $H_1: \mu < \mu_0$ .

### Aufgaben

**7.32** Ein Unternehmen fertigt elektronische Bauteile einer bestimmten Art mit einem OHM'schen Widerstand, der als normalverteilt mit  $\sigma = 2 \Omega$  angesehen werden kann. Um zu prüfen, ob der Mittelwert  $\mu$  den vorgeschriebenen Wert  $\mu_0 = 100 \Omega$  besitzt, wird eine Stichprobe des Umfangs  $n = 12$  entnommen. Dabei ergab sich ein Stichprobenmittelwert  $\bar{x} = 101,6 \Omega$ . Kann noch angenommen werden, dass der vorgeschriebene Wert eingehalten wird? Eine Änderung von  $\sigma$  kann ausgeschlossen werden.

a) Beantworte die Frage

(1) durch einen u-Test bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ ,

(2) über den Vertrauensbereich für  $\mu$  bei einem Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 99\%$ .

b) Wie groß ist der P-Wert?

**7.33** Angenommen, der Mittelwert  $\mu$  in Aufgabe 7.32 verschiebt sich auf  $102 \Omega$ . Erzeuge rechnerunterstützt (TI 92/89, Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/ Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...)  $n = 12$  normalverteilte Zufallszahlen mit  $\mu = 102 \Omega$  und  $\sigma = 2 \Omega$ . Damit wird eine Stichprobe mit dem Mittelwert  $\mu = 102 \Omega$  simuliert. Führe jetzt einen zweiseitigen u-Test  $H_0: \mu = 100$  gegen  $H_1: \mu \neq 100$  bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  durch. Wiederhole die Simulation mehrmals!

- 7.34** Bleche werden galvanisch verzinkt, wobei die Schichtstärke normalverteilt mit  $\mu = 83,0 \mu\text{m}$  und  $\sigma = 5,0 \mu\text{m}$  angenommen werden kann. Nach einer Überholung der Galvanisieranlage wird eine Änderung der Lage  $\mu$  für möglich gehalten. Eine Prüfung von 10 verzinkten Blechen ergab eine mittlere Schichtstärke von  $81,9 \mu\text{m}$ . Weist dies auf eine Änderung der Schichtstärke hin? Die Standardabweichung kann als gleichbleibend betrachtet werden. Gib die Antwort
- mit Hilfe eines statistischen Tests bei einem Signifikanzniveau von 5%,
  - mit Hilfe des entsprechenden Vertrauensbereiches für  $\mu$ .
- 7.35** Der Ausstoß eines bestimmten Schadstoffes kann als normalverteilt angenommen werden. Man ging bisher davon aus, dass dieser im Mittel 204 mg pro Betriebsstunde bei einer Standardabweichung von 12 mg ausmacht. Eine aufgrund von Beschwerden durchgeführte Überprüfung ergab bei 10 Messungen den Mittelwert 210 mg. Kann dies den Verdacht auf Erhöhung des mittleren Schadstoffausstoßes stützen? Beantworte die Frage auf dem Signifikanzniveau 5%. Die Standardabweichung kann als gleichbleibend betrachtet werden. Wie groß ist der P-Wert des Testes?
- 7.36** A manufacturer produces piston rings for an automobile engine. The ring diameter is known to be approximately normally distributed with a standard deviation  $\sigma = 0,001 \text{ mm}$ . A random sample of 14 rings has a mean parameter of  $\bar{x} = 81,041 \text{ mm}$ . Test the hypothesis that the mean piston ring parameter is  $81,042 \text{ mm}$ . Use the level of significance  $\alpha = 1\%$ .
- 7.37** Bei der automatischen Abfüllung von Wein ist die Abfüllmenge auf den Sollwert 750,0 ml eingestellt. Bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  soll geklärt werden, ob die Abfüllmenge im Mittel darunterliegt. Dazu wird bei 12 Flaschen die Abfüllmenge gemessen und der Mittelwert 748,8 ml festgestellt. Die Abfüllmenge kann als normalverteilt mit  $\sigma = 2,0 \text{ ml}$  angenommen werden.
- Bestätigt dies den Verdacht, dass die Flaschen nicht nur zufällig zu gering befüllt werden?
  - Wie lautet die Antwort, wenn derselbe Mittelwert in einer Stichprobe des Umfangs 20 festgestellt wird?
- 7.38** In der statistischen Prozesslenkung werden Qualitätsregelkarten eingesetzt. Dabei werden in kurzen Zeitabständen kleine Stichproben zur Überwachung beispielsweise des Durchmessers eines Drehteils bei einer automatischen Fertigung entnommen. Für den normalverteilten Durchmesser gilt:  $H_0: \mu = 20,00 \text{ mm}$  gegen  $H_1: \mu \neq 20,00 \text{ mm}$ . Muss bei der folgenden Stichprobe "eingegriffen" werden, d.h.  $H_0$  verworfen werden, wenn  $\alpha = 1\%$  und  $\sigma = 0,1 \text{ mm}$  gilt (Werte in mm)?
- a) 20,03 19,89 20,13 19,96 20,07      b) 20,31 19,98 20,11 20,05 20,16
- 7.39** Die Abfüllmenge von Marmelade ist normalverteilt mit  $\mu_0 = 450 \text{ g}$ . Nach einer Neueinstellung kann man eine Änderung der mittleren Abfüllmenge  $\mu$  nicht ausschließen. Zur Klärung entnimmt man eine Stichprobe (Angabe in g):  
450,8 449,4 450,2 451,6 452,5 450,5 449,8 451,4 451,0 451,9.  
Was kann nun über die vermutete Änderung der Lage  $\mu$  gesagt werden? Beantworte die Frage mit einem statistischen Test bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ .  
*Hinweis:* Siehe auch Aufgabe 7.26, Seite 287.

- 7.40** In einer Zuckerraffinerie wird Zucker automatisch abgefüllt. Das Abfüllgewicht ist in guter Näherung normalverteilt. Der Mittelwert  $\mu$  soll 1000 g betragen. Um zu prüfen, ob der Mittelwert zur Zeit davon abweicht, wird eine Stichprobe des Umfangs  $n = 25$  entnommen. Dabei wird ein arithmetischer Mittelwert  $\bar{x} = 1004,3$  g und eine Standardabweichung  $s = 8,8$  g bestimmt. Spricht dies für eine Abweichung des Mittelwertes  $\mu$  vom Sollwert? Gib die Antwort
- mit Hilfe eines statistischen Tests bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ ,
  - mit Hilfe des entsprechenden Vertrauensbereiches für  $\mu$ .
- 7.41** Ein Betrieb stellt eine bestimmte Drahtart her, dessen Reissfestigkeit aufgrund langer Beobachtung als normalverteilt mit  $\mu_0 = 59,8$  N betrachtet werden kann. Durch ein neues Herstellungsverfahren erwartet man eine Vergrößerung der Reissfestigkeit. Zur Klärung entnimmt man eine Stichprobe des Umfangs  $n = 80$ , aus der sich  $\bar{x} = 61,5$  N und  $s = 6,8$  N ergibt. Bestätigt dies die Erwartung bei einem Signifikanzniveau von 5%?
- 7.42** Die Ermittlung des Fettgehaltes von Milch soll auf ein einfacheres Verfahren umgestellt werden. Im Zuge der längeren Umstellungsphase sollen beide Verfahren, das alte und das neue, nebeneinander Verwendung finden. Um die Gleichwertigkeit der beiden Verfahren zu prüfen, werden jeweils 10 Vergleichsmessungen vorgenommen: dabei wird jede Milchprobe halbiert und jede Hälfte nach einem der beiden Verfahren gemessen. Es ergab sich (Fettgehalt in %):

Probe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altes Verfahren	3,9	4,9	5,9	6,9	6,1	4,1	3,1	4,5	5,1	5,5
Neues Verfahren	4,0	4,6	5,0	5,6	5,1	4,1	3,6	4,3	4,6	4,9

Besteht zwischen den beiden Verfahren ein Unterschied ( $\alpha = 5\%$ )?

*Hinweis:* Man kann für jede Probe die Differenz "alt – neu" bilden. Es soll angenommen werden, dass diese Differenzen aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammen. Im Falle der *Gleichwertigkeit* der beiden Verfahren besitzt diese Normalverteilung verständlicherweise den Mittelwert  $\mu = 0\%$ . Daher kann nun der Einstichproben-t-Test  $H_0: \mu = 0\%$  gegen  $H_1: \mu \neq 0\%$  angewendet werden. Dieser Test heißt in diesem Zusammenhang t-Test für abhängige Stichproben, weil er zwei Stichproben vergleicht, die paarweise verbunden sind.

## 7.6 Prüfung auf Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz

Die Frage, ob für ein Merkmal die Normalverteilungsannahme möglich ist, kann ebenfalls mit einem statistischen Test beantwortet werden. Es gibt eine Reihe von solchen Tests auf "Normalität". Beispiele dafür sind der  $\chi^2$ -Anpassungstest, der KOLMOGOROFF-SMIRNOV-Test, der EPPS-PULLEY-Test oder der SHAPIRO-WILK-Test.

Im Folgenden soll nur ein graphischer "Test" besprochen werden. Die beiden Hypothesen lauten:

$H_0$ : Die Stichprobe stammt aus einer Normalverteilung.                      gegen                       $H_1$ : Die Stichprobe stammt nicht aus einer Normalverteilung.

Diese Überprüfung auf Normalverteilung besitzt kein Signifikanzniveau und wird daher nicht nach dem üblichen Test-Schema geführt. Sie hat aber den Vorteil, dass sie manchmal auch die Art der Abweichung von der Normalverteilung erkennen lässt. Es handelt sich um die **graphische Darstellung einer Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz**. Dabei ist zu unterscheiden, ob eine Stichprobe ohne Klasseneinteilung ("*kleine*" Stichprobe) oder mit Klasseneinteilung ("*große*" Stichprobe) vorliegt. Die dabei jeweils angewandte Vorgangsweise ist im Folgenden knapp angegeben.

### Graphische Darstellung einer kleinen Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz

1. **Ordnen** der Stichprobenwerte  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  aufsteigend nach der Größe.
2. x-Achse des Wahrscheinlichkeitsnetzes so beschriften, dass alle Stichprobenwerte aufgetragen werden können.
3. Über jedem Stichprobenwert  $x_i$  der *geordneten* Werteliste wird nun ein Punkt mit der

Ordinate  $H(x_i) = \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}}$  aufgetragen. Dabei ist  $i$  der Index des  $i$ -ten Stichprobenwertes *nach der Sortierung*. Kommt ein Stichprobenwert mehrfach vor, so werden über diesem Wert alle zugehörigen Punkte aufgetragen.

*Begründung:* Wir stellen uns mehrere Stichproben des gleichen Umfangs beispielsweise  $n = 10$  zu einem normalverteilten Merkmal vor und betrachten stets den Kleinstwert  $x_1$  dieser Stichproben. Es ist verständlich, dass diese Kleinstwerte im Allgemeinen nicht gleich sein werden, sie streuen. Wir fragen nach dem Mittelwert (Erwartungswert)  $\mu_{x_1}$  der Kleinstwerte und wo dieser auf der x-Achse unter der Glockenkurve liegt. Man kann zeigen, dass bis  $\mu_{x_1}$  die Fläche unter der Glocke näherungs-

weise gleich  $\frac{1 - \frac{3}{8}}{10 + \frac{1}{4}} = \frac{5}{82} = 0,061$  ist. Der Wert  $x_1$  unserer vorliegenden Stichprobe ist ein Schätzwert

für  $\mu_{x_1}$ , einen anderen haben wir nicht. Daher wird  $x_1$  dort auf der x-Achse eingetragen, wo die Fläche unter der Glocke gleich 0,061 ist. In diesem Sinne geht es weiter mit dem zweitkleinsten Wert usw.

4. Durch die so erhaltene "Punktwolke" im Wahrscheinlichkeitsnetz versucht man nach Augenmaß mit Hilfe eines durchsichtigen Lineals die "beste" Gerade zu legen. Den Punkten zwischen  $P = 30\%$  und  $P = 70\%$  wird besonderes Gewicht beigemessen. Punkte unter  $P = 5\%$  oder über  $P = 95\%$  werden kaum berücksichtigt, da sich hier durch die Teilung des Wahrscheinlichkeitsnetzes kleine Abweichungen von der Normalverteilung stark auswirken.

Ist es nicht möglich, auf diese Weise "ohne Zwang" eine ausgleichende Gerade zu legen, (die Abweichungen der Punkte von der Geraden erscheinen nicht zufällig), so ist die Annahme einer Normalverteilung zu verwerfen. Andernfalls kann die  $H_0$ -Hypothese, die Annahme einer Normalverteilung, beibehalten werden.

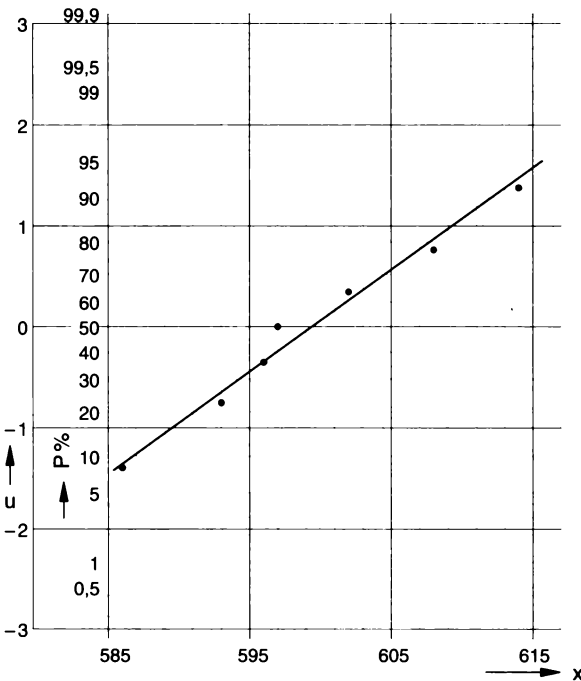
**Beispiel 7.14 : Kleine Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz**

Aus einer Lieferung von Stahl werden 7 Proben genommen und die Festigkeit gemessen. Folgende Werte ergeben sich (in N/mm<sup>2</sup>): 597 596 593 608 602 614 586. Kann angenommen werden, dass die Festigkeit normalverteilt ist?

**Lösung**

Aufsteigend geordnet lauten die Werte: 586, 593, 596, 597, 602, 608, 614. Wir nummerieren auch um, sodass nun  $x_1 = 586$ ,  $x_2 = 593$  usw. statt bisher  $x_1 = 597$ ,  $x_2 = 596$  usw. und tragen die Stichprobenwerte auf der x-Achse des Wahrscheinlichkeitsnetzes ein (Abb. 7.12). Danach werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeitssummen berechnet. Beispielsweise ist

$$H(x_1) \approx \frac{1 - \frac{3}{8}}{7 + \frac{1}{4}} = 0,086 = 8,6\%, \quad H(x_2) \approx \frac{2 - \frac{3}{8}}{7 + \frac{1}{4}} = 0,224 = 22,4\%.$$



Nach dem Zeichnen der Punkte ( $x_i/H(x_i)$ ) legt man nach Augenmaß eine Ausgleichsgerade. Es gelingt, die Gerade so zu legen, dass die Punkte nahe der Geraden liegen und die Abweichungen zufällig erscheinen. Daher wird die Annahme bekräftigt, dass die Festigkeit der betreffenden Stahlsorte normalverteilt ist.

$x_i$	$H(x_i)$ in %
586	8,6
593	22,4
596	36,2
597	50,0
602	63,8
608	77,6
614	91,4

Abb. 7.12 Kleine Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz

**Graphische Darstellung einer großen Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz**

1. Falls nicht schon der Fall, werden die Stichprobenwerte in Klassen gruppiert (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 276).
2. Es werden alle Klassengrenzen auf der x-Achse des Wahrscheinlichkeitsnetzes eingetragen.
3. Mit  $n_1, n_2, n_3, \dots$ , den absoluten Häufigkeiten der Stichprobenwerte in der ersten, zweiten, dritten, ... Klasse, werden die Summen der absoluten Häufigkeiten  $K_j$  bis zur j-ten Klasse gebildet. Danach werden die prozentuellen Häufigkeitssummen  $H_j = \frac{K_j}{n} \cdot 100\%$  bestimmt und jeweils an den **oberen** Klassengrenzen aufgetragen.
4. Wie bei den kleinen Stichproben.

**Beispiel 7.15 : Große Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz**

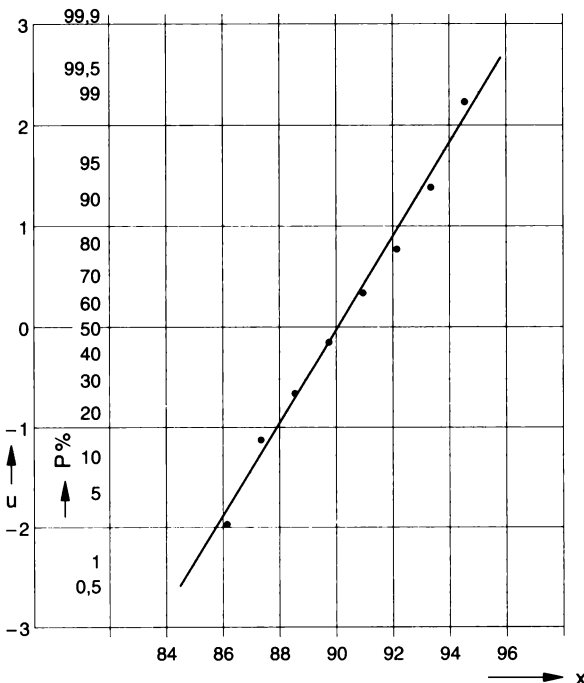
An 80 Werkstücken wurde eine Längenmessung durchgeführt (Beispiel 10.4, "Ingenieur-Mathematik 2, Seite 276); die Stichprobenwerte wurden anschließend in Klassen gruppiert. Es ergab sich (Grenzen in mm):

Klasse	$n_j$	$K_j$	$H_j$ (in %)
84,95 ... 86,15	2	2	2,50
86,15 ... 87,35	8	10	12,50
87,35 ... 88,55	10	20	25,00
88,55 ... 89,75	14	34	42,50
89,75 ... 90,95	16	50	62,50
90,95 ... 92,15	13	63	78,75
92,15 ... 93,35	10	73	91,25
93,35 ... 94,55	6	79	98,75
94,55 ... 95,75	1	80	100,00

Kläre durch eine Darstellung der Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz, ob das Längenmaß als normalverteilt angenommen werden kann.

**Lösung**

$H_1 = 2,5\%$  wird an der Stelle 86,15,  $H_2 = 12,5\%$  an der Stelle 87,35,  $H_8 = 98,75\%$  an der Stelle 94,55 aufgetragen ( $H_9$  kann nicht aufgetragen werden, da auf der y-Achse der Wert 100% nicht vorhanden ist).



Nach dem Zeichnen der Ausgleichsgerade (Abb. 7.13) erkennt man, dass die Annahme einer Normalverteilung des Längenmaßes nahegelegt wird. Abweichungen von der Geraden erscheinen zufällig.

Abb. 7.13 Große Stichprobe im Wahrscheinlichkeitsnetz



## Im Überblick: Prüfung auf Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz

Viele statistische Verfahren setzen normalverteilte Merkmalswerte voraus. Daher ist die Überprüfung auf "Normalität" von Bedeutung. Das Wahrscheinlichkeitsnetz ermöglicht eine rasche **graphische Überprüfung**, ob eine Stichprobe **normalverteilter Werte** vorliegt. Dabei ist zu unterscheiden, ob eine Stichprobe ohne Klasseneinteilung ("*kleine*" Stichprobe) oder mit Klasseneinteilung ("*große*" Stichprobe) vorliegt. Neben dieser graphischen Prüfung auf Normalverteilung gibt es auch eine Reihe von rechnerischen Signifikanztests.

### Aufgaben

- 7.43** Kann angenommen werden, dass die Werte 0,546; 0,539; 0,542; 0,535; 0,538; 0,543 eine Stichprobe von Werten eines normalverteilten Merkmals sind?
- 7.44** Prüfe durch Darstellung im Wahrscheinlichkeitsnetz, ob aufgrund der Stichprobe (Werte in g) 49,2 50,0 51,4 52,3 50,6 50,3 49,6 51,2 51,7 50,8 von Beispiel 7.6 bzw. 7.11, davon ausgegangen werden kann, dass die Dosiermenge normalverteilt ist?
- 7.45** Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels (Beispiel 7.10, Seite 285) wurde zehnmal gemessen. Es ergab sich (Werte in ms): 1943, 1955, 1933, 1951, 1925, 1936, 1942, 1947, 1939, 1929. Kann davon ausgegangen werden, dass die Schwingungsdauer normalverteilt ist? Prüfe mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes.
- 7.46** Prüfe, ob die Voraussetzung einer Normalverteilung für die Abfüllmenge in Aufgabe 7.39, Seite 295, durch die dort angeführte Stichprobe gestützt wird.
- 7.47** Simuliere rechnergestützt (TI-92/89, Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/ Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...) normalverteilte Zufallszahlen einer bestimmten Anzahl  $n$  und prüfe auf Normalverteilung durch Darstellung im Wahrscheinlichkeitsnetz.
- 7.48** Untersuche im Wahrscheinlichkeitsnetz, ob die folgende Stichprobe für eine normalverteilte Grundgesamtheit spricht:

a) Elektrische Widerstände (in  $\Omega$ )

Klasse	$n_j$
73,45 ... 75,15	3
75,15 ... 76,85	7
76,85 ... 78,55	11
78,55 ... 80,25	12
80,25 ... 81,95	12
81,95 ... 83,65	7
83,65 ... 85,35	5
83,35 ... 87,05	3

b) Abfüllmasse von Marmelade (in g)

Klasse	$n_j$
436,5 ... 439,3	1
439,3 ... 442,1	4
442,1 ... 444,9	6
444,9 ... 447,7	11
447,7 ... 450,5	17
450,5 ... 453,3	17
453,3 ... 456,1	15
456,1 ... 458,9	4
458,9 ... 461,7	4
461,7 ... 464,5	1

## 7.7 Zweistichprobentests bei normalverteilten Merkmalen

In der Praxis steht man öfter vor der Aufgabe, zwei verschiedene Fertigungsprozesse zu vergleichen. So kann man fragen, ob sich zwei Abfüllanlagen in der Abfüllmenge unterscheiden oder ob sich Betonarten, die nach zwei verschiedenen Verfahren hergestellt wurden, in der Druckfestigkeit unterscheiden. Nimmt man an, dass das interessierende Merkmal (Abfüllmenge, Betonfestigkeit, ...) normalverteilt ist, so sind die Mittelwerte und/oder die Standardabweichungen der Normalverteilungen zu vergleichen. In diesem Sinne folgen nun zwei wichtige statistische Tests:

- (1) **Zweistichproben-F-Test:** Vergleich der Standardabweichungen von zwei Normalverteilungen.
- (2) **Zweistichproben-t-Test bei unabhängigen Stichproben** (auch **doppelter t-Test** genannt): Vergleich der Mittelwerte von zwei Normalverteilungen bei unabhängigen Stichproben.

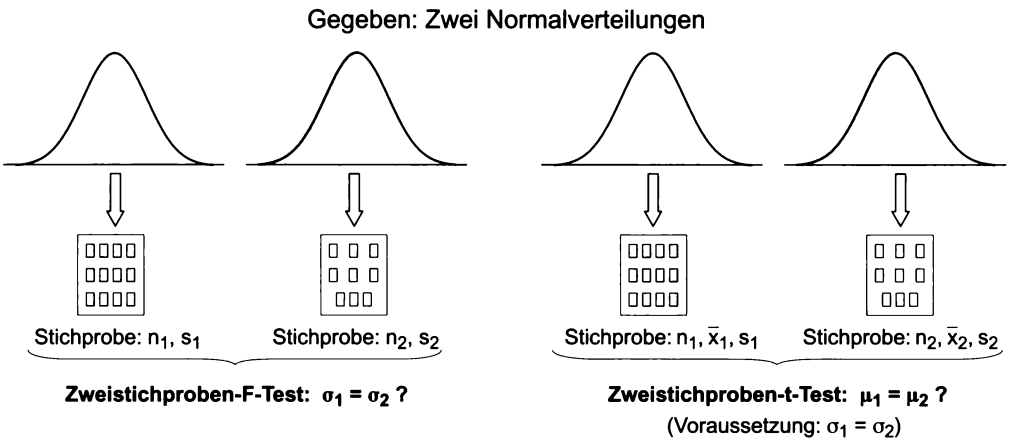


Abb. 7.14 Wichtige Zweistichprobentests

Will man beispielsweise zwei Abfüllanlagen vergleichen, so entnimmt man von jeder Anlage eine gewisse Anzahl von Packungen und misst die Füllmengen. Durch Vergleich der so gegebenen **zwei** Stichproben versucht man zu entscheiden, ob sich die Anlagen in der Gleichmäßigkeit (Streuung) oder in der mittleren Füllmenge unterscheiden. Da die Entscheidung auf zwei Stichproben beruht, spricht man von **Zweistichprobentests**.

**Anmerkung:** Statt "Zweistichproben-F-Test" und "Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben" sagt man oft kürzer "F-Test" bzw. "t-Test für unabhängige Stichproben".

Der F-Test verwendet eine Prüfgröße, die einer bisher noch nicht besprochenen Verteilung, der sogenannten **F-Verteilung** oder **FISHER<sup>21</sup>-Verteilung** gehorcht. Entnimmt man einer normalverteilten Grundgesamtheit zwei Stichproben des Umfangs  $n_1$  und  $n_2$ , so kann das Verhältnis  $s_1^2/s_2^2$  der Varianzen dieser beiden Stichproben alle Werte von null bis unendlich annehmen. Abb. 7.15 zeigt eine Simulation dazu (Microsoft Excel, Extras/Analyse-Funktionen/Zufallszahlengenerierung bzw. zur Klasseneinteilung Extras/Analyse-Funktionen/Histogramm). Dabei wurden 250-mal zwei Stichproben des Umfangs  $n_1 = n_2 = 10$  aus ein- und derselben normalverteilten Grundgesamtheit entnommen, die Varianzen  $s_1^2$  und  $s_2^2$  berechnet, die Verhältnisse  $s_1^2/s_2^2$  gebildet und schließlich eine Klasseneinteilung vorgenommen. Die Abbildung zeigt das zugehörige Histogramm.

<sup>21</sup> Ronald Aylmer FISHER (1890 – 1962), englischer Genetiker und Statistiker

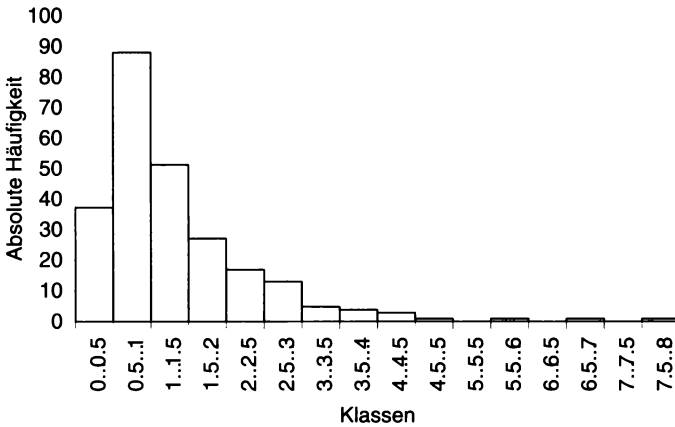


Abb. 7.15 Simulation zur F-Verteilung

Das Histogramm ergibt sich aus einer charakteristischen Verteilung der Zufallsgröße  $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ . Es gilt:

Das Verhältnis der Varianzen zweier Stichproben  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$  ist **F-verteilt** mit den Parametern  $f_1 = n_1 - 1$  und  $f_2 = n_2 - 1$ , die so genannten **Freiheitsgrade** der F-Verteilung.

$f_1$  heißt auch Zählerfreiheitsgrad,  $f_2$  Nennerfreiheitsgrad. Abb. 7.16 zeigt beispielhaft die Dichtefunktion  $y = g(x; f_1, f_2)$  der F-Verteilung mit  $f_1 = 9$  und  $f_2 = 9$ . Es handelt sich dabei gerade um jene F-Verteilung, der die Verhältnisse  $\frac{s_1^2}{s_2^2}$  der Simulation in Abb. 7.15 unterliegen.

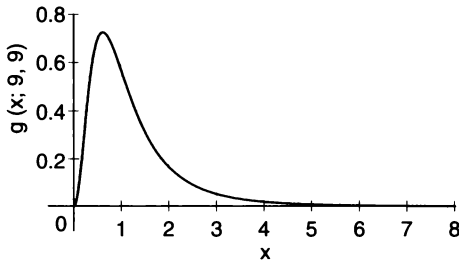


Abb. 7.16 Dichtefunktion der F-Verteilung mit  $f_1 = f_2 = 9$

Da der Flächeninhalt des Histogramms in Abb. 7.15 gleich  $250 \cdot 0,5 = 125$  ist, sind die Dichtefunktionswerte für einen Vergleich mit dem Histogramm mit 125 zu multiplizieren.

Abb. 7.17 zeigt weitere Dichtefunktionen von F-Verteilungen. Es kann nun der F-Test besprochen werden.

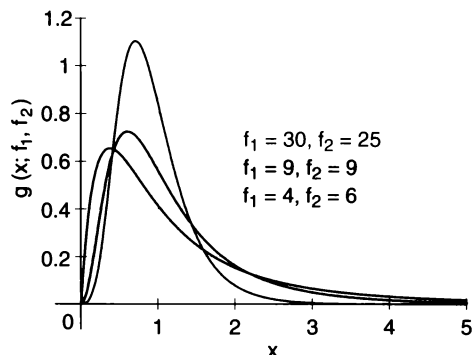


Abb. 7.17 Dichtefunktionen von F-Verteilungen

**Beispiel 7.16 : (Zweiseitiger) F-Test**

Zwei Abfüllautomaten unterschiedlicher Art werden zur Abfüllung von Mineralwasser in 1-Liter-Flaschen eingesetzt. In beiden Fällen kann die Füllmenge normalverteilt angenommen werden. Um die Gleichmäßigkeit (anders gesagt: die Streuung) der Füllmenge zu prüfen, wurde die Füllmenge von jeweils 10 an den beiden Automaten abgefüllten Flaschen gemessen. Es ergab sich (Füllmengen in ml):

Automat 1: 1008 1004 1001 1012 1002 1004 1006 999 1009 996

Automat 2: 995 992 998 1000 995 1002 1004 997 999 1002.

Lassen die beiden Stichproben auf einen Unterschied der beiden Automaten bezüglich der Streuung der Abfüllmenge schließen? Das Signifikanzniveau betrage 5%.

**Lösung****Zweiseitiger F-Test****1. Schritt:** Aufstellen der Hypothesen

Da die Fragestellung nach einem Unterschied in den Parametern  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  lautet (nicht nach einer Vergrößerung oder Verkleinerung) ist ein zweiseitiger Test zu führen. Hierbei formuliert man üblicherweise mit den Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden Normalverteilungen:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  gegen  $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ .

**2. Schritt:** Prüfgröße berechnen

Als **Prüfgröße** wählt man:  $F_{\text{prüf}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ ,

also das Verhältnis  $\frac{s_1^2}{s_2^2}$  der Stichprobenvarianzen. Es ist verständlich, dass dieses Verhältnis auch bei zutreffender  $H_0$ -Hypothese (also  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ) in der Regel nicht gleich sein wird; kleinere zufällige Abweichungen sind zu erwarten; es darf aber nicht zu groß, aber auch nicht zu klein sein. Steht die **größere Stichprobenvarianz im Zähler**, so braucht man nur zu testen, ob dieses Verhältnis nicht zu groß ist, was die Testdurchführung vereinfacht:

$$s_1 = 4,84; s_2 = 3,75; F_{\text{prüf}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{4,84^2}{3,75^2} = 1,67.$$

Ist nicht von vornherein  $s_1^2 > s_2^2$ , so erreicht man dies durch Vertauschung der Stichproben.

**3. Schritt:** Kritischen Wert ermitteln

Wir wissen, dass die Prüfgröße  $F_{\text{prüf}}$  bei zutreffender  $H_0$ -Verteilung einer F-Verteilung mit  $f_1 = n_1 - 1 = 9$  und  $f_2 = n_2 - 1 = 9$  unterliegt. Mit der nur noch kleinen Wahrscheinlichkeit  $\frac{\alpha}{2}$  ist sie größer als das Quantil  $F_{f_1, f_2; 1 - \alpha/2}$  dieser F-Verteilung, was für die  $H_0$ -Hypothese bei  $\alpha = 5\%$  nicht mehr als glaubwürdig betrachtet wird (Abb. 7.18).

**Kritischer Wert:**  $F_{f_1, f_2; 1 - \alpha/2}$  mit  $f_1 = n_1 - 1$ ,  
 $f_2 = n_2 - 1$  (Tab. 5).

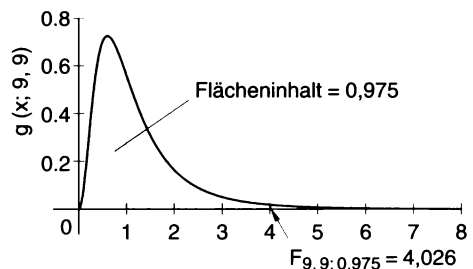


Abb. 7.18  $(1 - \alpha/2)$ -Quantil: x-Wert, bis zu dem der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion gleich  $1 - \alpha/2$  ist.

**Achtung!**

Ist  $f_1 \neq f_2$ , so ist  $f_1$  der Freiheitsgrad jener Stichprobe, deren Varianz im Zähler der Prüfgröße steht ("Zählerfreiheitsgrad").

$$F_{f_1, f_2; 1-\alpha/2} = F_{9, 9; 0,975} = 4,026.$$

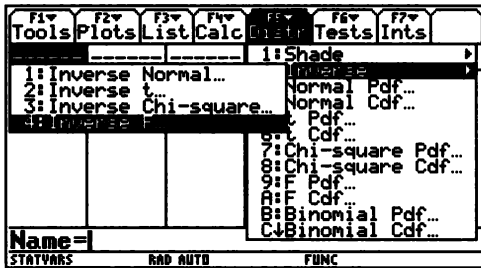
**4. Schritt:** Entscheidung

$F_{\text{prüf}} > F_{f_1, f_2; 1-\alpha/2}$ :  $H_0$  ist zugunsten von  $H_1$  zu verwerfen

$F_{\text{prüf}} \leq F_{f_1, f_2; 1-\alpha/2}$ :  $H_0$  wird nicht verworfen.

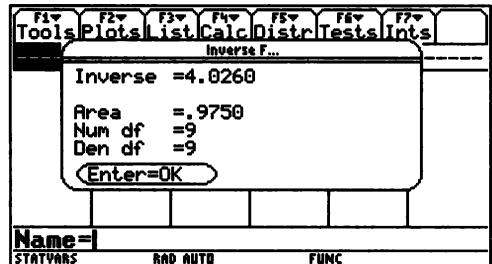
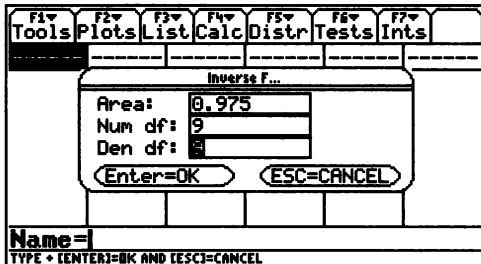
Da  $F_{\text{prüf}} \leq F_{f_1, f_2; 1-\alpha/2} = 4,026$ , ist bei dem gewählten Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  kein Unterschied in der Gleichmäßigkeit der Streuung der beiden Automaten ableitbar; der Unterschied in den Stichprobenstandardabweichungen kann als zufällig erklärt werden.

**Anmerkung:** Der F-Test kann auch einseitig geführt werden:  $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$  gegen  $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ . D.h. es besteht nun die Befürchtung, dass  $\sigma_1 > \sigma_2$  ist.  $H_0$  ist nun zugunsten  $H_1$  zu verwerfen, wenn  $F_{\text{prüf}} > F_{f_1, f_2; 1-\alpha}$



Ein F-Quantil kann auch mit Hilfe der Flash-Applikation Statistik (siehe Kapitel 10, Moderne Hilfsmittel) ermittelt werden:

1 (1:Flash Apps... )  
2 (2:Inverse) 4 (4:Inverse F... ) ergibt ein Dialogfenster zur Ermittlung eines F-Quantils.



Für den folgenden Zweistichproben-t-Test setzen wir voraus, dass die beiden Stichproben gleichen Umfang  $n$  haben, dass also  $n_1 = n_2 = n$  ist. In diesem Fall ist der Test am wirksamsten im Aufzeigen eines möglichen Unterschiedes zwischen  $\mu_1$  und  $\mu_2$ .

### Beispiel 7.17 : (Zweiseitiger) t-Test bei unabhängigen Stichproben

Zwei Abfüllautomaten unterschiedlicher Art werden zur Abfüllung von Mineralwasser in 1-Liter-Flaschen eingesetzt. In beiden Fällen kann die Füllmenge normalverteilt angenommen werden. Da befürchtet wird, dass die Abfüllmengen im Mittel nicht übereinstimmen, wurde die Füllmenge von jeweils 10 Flaschen der beiden Automaten gemessen. Es ergab sich (Füllmengen in ml):

Automat 1: 1008 1004 1001 1012 1002 1004 1006 999 1009 996

Automat 2: 995 992 998 1000 995 1002 1004 997 999 1002.

Lassen die beiden Stichproben auf einen Unterschied in der mittleren Füllmenge schließen? Antworte bei einem Signifikanzniveau von 1 %.

### Lösung

#### Zweiseitiger t-Test für unabhängige Stichproben

Dieser Test setzt die Gleichheit der unbekannt Standardabweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  der beiden normalverteilten Füllmengen der Abfüllautomaten voraus. Kann diese Gleichheit nicht vorausgesetzt werden, so sollte der hier angeführte t-Test nur durchgeführt werden, wenn zuvor mit dem F-Test die Gleichheit der Standardabweichungen nicht verworfen werden musste.

In Beispiel 7.16, Seite 303, wurde die Gleichheit der Standardabweichungen bei dem verhältnismäßig großen Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  statistisch nachgewiesen (umso mehr auch bei dem kleineren Niveau  $\alpha = 1\%$ ).

#### 1. Schritt: Aufstellen der Hypothesen

Aufgrund der Fragestellung ist der Test zweiseitig zu führen.

$H_0: \mu_1 = \mu_2$  gegen  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ ,

d.h.  $H_0$  besteht in der Behauptung, dass die Mittelwerte der beiden Normalverteilungen, aus denen die Stichproben stammen, gleich sind. Die Alternativhypothese  $H_1$  spricht die Befürchtung aus, dass dies nicht so ist.

#### 2. Schritt: Prüfgröße berechnen

Die **Prüfgröße** geht von der Differenz der Mittelwerte  $\bar{x}_1$  und  $\bar{x}_2$  aus:

$$t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d} \text{ mit } s_d = \sqrt{\frac{1}{n} (s_1^2 + s_2^2)}.$$

	1. Stichprobe	2. Stichprobe
Stichprobenumfang	$n = 10$	$n = 10$
Mittelwert	$\bar{x}_1 = 1004,1 \text{ ml}$	$\bar{x}_2 = 998,4 \text{ ml}$
Standardabweichung	$s_1 = 4,84 \text{ ml}$	$s_2 = 3,75 \text{ ml}$
Schätzwert für die Standardabweichung der Differenz der Stichprobenmittelwerte	$s_d = \sqrt{\frac{1}{n} (s_1^2 + s_2^2)} = 1,94 \text{ ml}$	

Der Term für  $s_d$  ist ohne Begründung angegeben. Dabei macht man Gebrauch, dass  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Nennt man den gemeinsamen Wert  $\sigma$ , so wird  $\sigma^2$  durch "Poolen" (pool, engl. zusammenlegen) der beiden Stichproben durch  $s_p^2 = \frac{1}{2} \cdot (s_1^2 + s_2^2)$  geschätzt und daher gepoolte Varianz genannt.

Wert der Prüfgröße:  $t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d} = \frac{1004,1 - 998,4}{1,94} = 2,94.$

#### 3. Schritt: Kritischen Wert ermitteln

Es lässt sich zeigen, dass die Prüfgröße t-verteilt ist mit  $f = 2 \cdot n - 2$  Freiheitsgraden.

**Kritischer Wert:**  $t_{f, 1-\alpha/2}$  mit  $f = 2n - 2$  (Tab. 2).

Wegen  $\alpha = 0,01$  und  $\frac{\alpha}{2} = 0,005$ , ist  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$ .  $t_{f, 1-\alpha/2} = t_{18; 0,995} = 2,878$

4. Schritt: Entscheidung

$|t_{\text{prüf}}| > t_{f, 1-\alpha/2}$ :  $H_0$  wird zugunsten von  $H_1$  verworfen

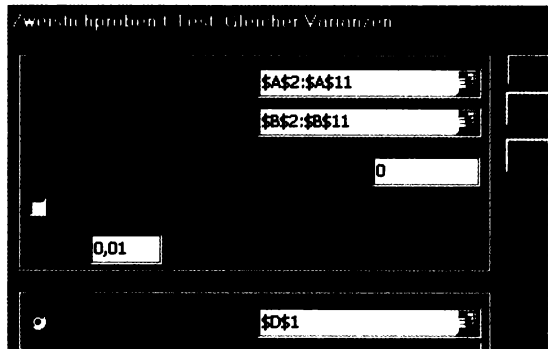
$|t_{\text{prüf}}| \leq t_{f, 1-\alpha/2}$ :  $H_0$  wird nicht verworfen

Da  $|t_{\text{prüf}}| > 2,878$ , ist  $H_0$  beim Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  zu verwerfen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die mittleren Füllmengen der beiden Automaten nicht gleich sind.

**Der Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben mit Microsoft Excel:**

Nach Eingabe der beiden Stichproben ("Variablen") wird im Menü Extras Analyse-Funktionen... gewählt (sollte dies nicht möglich sein, kann diese Option mit Hilfe des Add-in-Managers eingebaut werden). Danach wird "Zweistichproben-t-Test: Gleicher Varianzen" ausgewählt. Es ergibt sich ein Dialogfenster, das ausgefüllt wird.

	1.Stichprobe	2.Stichprobe
	1008	995
	1004	992
	1001	998
	1012	1000
	1002	995
	1004	1002
	1006	1004
	999	997
	1009	999
	996	1002



Zweistichproben t-Test unter der Annahme gleicher Varianzen		
	Variable 1	Variable 2
Mittelwert	1004,1	999,4
Varianz	23,43	14,04
Beobachtungen	10	10
Gepoolte Varianz	18,74	
Hypothetische Differenz der Mittelwerte	0,00	
Freiheitsgrade (df)	18	
t-Statistik	2,94	
P(T<=t) einseitig	0,0043	
Kritischer t-Wert bei einseitigem t-Test	2,5524	
P(T<=t) zweiseitig	0,0087	
Kritischer t-Wert bei zweiseitigem t-Test	2,8784	

Unter der t-Statistik ist der Wert der Prüfgröße  $t_{\text{prüf}}$  zu verstehen. Angegeben sind die kritischen Werte sowohl für den zweiseitigen Test als auch für den einseitigen Test. Zusätzlich sind auch die jeweiligen P-Werte angeführt.

**Anmerkungen:**

- (1) Man kann zeigen, dass der hier angeführte t-Test ziemlich robust gegenüber einer Verletzung der Gleichheit der Standardabweichungen ist, wenn die beiden Stichproben von gleicher Größe sind.
- (2) Der t-Test für unabhängige Stichproben kann auch *einseitig* geführt werden.
- (3) Der Vergleich von mehr als zwei Mittelwerten über unabhängige Stichproben führt zur **Varianzanalyse**.

- (4) Es gibt auch einen approximativen Zweistichproben-t-Test, der bei *Ungleichheit der Standardabweichungen* durchgeführt werden kann. In diesem Fall dürfen die Varianzen der beiden Stichproben nicht "gepoolt" werden.
- (5) Beim besprochenen t-Test wird vorausgesetzt, dass die beiden Stichproben **unabhängig** voneinander erhoben wurden. Es kommt jedoch öfter vor, dass die Elemente der beiden Stichproben *paarweise* miteinander verbunden sind. In diesem Fall spricht man von **abhängigen Stichproben**.

*Beispiele:* Vergleich des Gesundheitszustandes von Personen vor und nach einer Behandlung, Vergleich des Energieverbrauchs von Geräten bei zwei Messverfahren, Vergleich der Festigkeit von Textilfasern bei Anwendung zweier Färbemethoden, .... Ob im Mittel ein Unterschied im interessierenden Merkmal besteht, wird angemessener mit dem so genannten **t-Test für abhängige Stichproben** (eigentlich ein Einstichproben-t-Test) untersucht. Siehe dazu Aufgabe 7.42, Seite 296.

### Im Überblick: Zweistichprobentests bei normalverteilten Merkmalen

Durch einen **Einstichprobentest** bei einem normalverteilten Merkmal wird aufgrund **einer** Stichprobe geprüft, ob beispielsweise die Gleichheit des Mittelwertes  $\mu$  mit einem vorgegebenen Wert  $\mu_0$  angenommen werden kann. Dagegen wird durch einen **Zweistichprobentest** geprüft, ob die Mittelwerte bzw. Standardabweichungen **zweier** Normalverteilungen als gleich angenommen werden können. Dazu werden **zwei** Stichproben verwendet, die zu jeweils einer der beiden Normalverteilungen gehören.

Entnimmt man einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der Standardabweichung  $\sigma$  immer wieder zwei Stichproben des Umfangs  $n_1$  bzw.  $n_2$  und bildet das Verhältnis  $\frac{s_1^2}{s_2^2}$  der Varianzen der ersten Stichprobe und der zweiten Stichprobe, so sind diese Verhältnisse **F-verteilt** mit den Parametern  $f_1 = n_1 - 1$  und  $f_2 = n_2 - 1$ .

Liegen zwei unbekannte Normalverteilungen vor, so prüft man mit dem **Zweistichproben-F-Test** auf **Gleichheit** ihrer **Standardabweichungen**.

Kann die Gleichheit der Standardabweichungen von zwei unbekanntem Normalverteilungen angenommen werden, so prüft man mit dem **Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben** auf **Gleichheit** ihrer **Mittelwerte**.

### Aufgaben

- 7.49 Bilde rechnergestützt (TI 92/89, MS Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/ Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...) folgende zwei Stichproben normalverteilter Zufallszahlen vom Umfang  $n = 12$ :

Stichprobe A zu  $\mu_1 = 50$ ,  $\sigma_1 = 1$

Stichprobe B zu  $\mu_1 = 50$ ,  $\sigma_1 = 2$ .

Kann eine Ungleichheit der Standardabweichungen der Normalverteilungen mit dem F-Test aufgrund der Stichproben A und B bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  bestätigt werden?

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean	Up
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ randNorm(50, 1) 48.17</li> <li>■ randNorm(50, 1) 51.33</li> <li>■ randNorm(50, 1) 50.36</li> </ul>					
randNorm(50, 1)					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/40					



- 7.50** Zwei Garne sollen hinsichtlich der Gleichmäßigkeit (Streuung) ihrer Festigkeit verglichen werden. Dazu werden je 25 Garnstücke entnommen und die Standardabweichungen zu 0,30 N und 0,43 N gefunden. Kann bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  von einem Unterschied in der Gleichmäßigkeit gesprochen werden? Die Garnfestigkeit kann als normalverteilt betrachtet werden.
- 7.51** Drehteile werden parallel an zwei Automaten A und B gefertigt. Wegen der Bedeutung der Gleichmäßigkeit der normalverteilten Durchmesser sollen die Standardabweichungen der an den beiden Automaten gefertigten Drehteile überprüft werden. Es ergibt sich folgender Stichprobenbefund:  
Automat A:  $s_A = 0,093$  mm; Automat B:  $s_B = 0,153$  mm.  
Kann daraus bei  $\alpha = 5\%$  ein Unterschied in den Varianzen der zugrundeliegenden Normalverteilungen abgeleitet werden, wenn die beiden Standardabweichungen aus Stichproben von je **a)** 15 Teilen, **b)** 25 Teilen stammen?
- 7.52** Ermittle rechnergestützt (TI 92/89, MS-Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...) folgende Stichproben normalverteilter Zufallszahlen vom Umfang  $n = 12$ :  
Stichprobe A zur Normalverteilung mit  $\mu_1 = 50$ ,  $\sigma_1 = 1$   
Stichprobe B zur Normalverteilung mit  $\mu_2 = 51$ ,  $\sigma_2 = 1$ .  
Kann die Ungleichheit der Mittelwerte der Normalverteilungen mit dem t-Test auf Grund der Stichproben A und B bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  bestätigt werden?
- 7.53** Ein Abnehmer bezieht Drähte eines bestimmten Typs von zwei Lieferanten. Um zu prüfen, ob beide Lieferanten gleichwertige Drähte herstellen, wird die Reisslast der Drähte stichprobenweise untersucht. Folgende Stichprobenergebnisse liegen vor (in N):  
Lieferant A: 98 101 100 91 103 95 100 94 105 97  
Lieferant B: 100 92 88 90 97 95 92 93 95 98.  
Die Reisslast kann in beiden Fällen als normalverteilt angenommen werden. Können die Drähte der beiden Lieferanten hinsichtlich ihrer mittleren Reisslast bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  als gleichwertig betrachtet werden?
- 7.54** The diameter of steel rods manufactured on two different machines is being investigated. Assume that the diameter is known to follow a normal distribution. Two random samples each of size 15 are selected. The sample means and standard deviations are  $\bar{x}_1 = 12,48$  mm,  $s_1 = 0,031$  mm and  $\bar{x}_2 = 12,52$  mm,  $s_2 = 0,043$  mm. Do the data support the claim that the mean diameter is the same on the two machines? Use  $\alpha = 1\%$ .
- 7.55** Für einen Vergleich von Ziegeln, die von verschiedenen Herstellern A und B stammen, wird die Festigkeit an jeweils 8 zufällig ausgewählten Ziegeln gemessen (Angaben in  $N/mm^2$ ):  
A: 14,5 13,4 15,5 14,2 16,5 14,8 15,3 16,0  
B: 15,2 12,3 14,0 13,5 14,1 16,1 14,8 13,2.  
**a)** Stelle die beiden Stichproben im Wahrscheinlichkeitsnetz dar. Wird dadurch die Annahme gestützt, dass die Festigkeit der Ziegel von A und von B normalverteilt ist?  
**b)** Ist ein Unterschied in der mittleren Festigkeit bei A und B ableitbar ( $\alpha = 5\%$ )?

## 7.8 Vergleich zweier Anteile

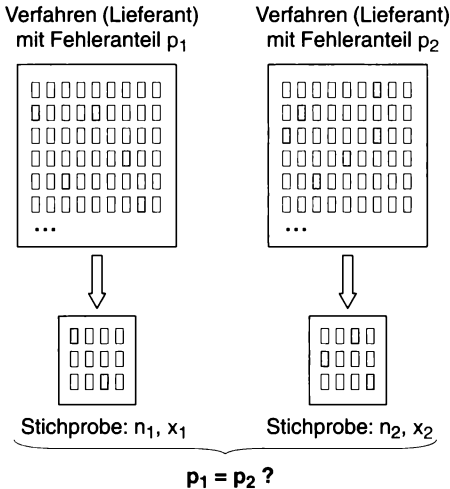


Abb. 7.19 Vergleich zweier Anteile

Ein gleiches Produkt wird häufig nach verschiedenen Verfahren hergestellt oder von verschiedenen Lieferanten bezogen. Dabei kann ein Vergleich der dabei auftretenden Anteile fehlerhafter Einheiten bedeutsam sein. Im Folgenden soll sich der Vergleich auf **zwei** Anteile  $p_1$  und  $p_2$  fehlerhafter Einheiten beschränken (Abb. 7.19). Dazu entnimmt man aus jedem der beiden Grundgesamtheiten (Verfahren oder Prüflosen) eine Stichprobe und zählt darin die Anzahl  $x_1$  bzw.  $x_2$  fehlerhafter Einheiten. Es handelt sich also wieder um einen Zweistichprobentest.

Der Vergleich der Anteile  $p_1$  und  $p_2$  ist ein Vergleich der Grundwahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2$  zweier Binomialverteilungen. Der folgende Test beruht auf der Näherung der Binomialverteilung durch die Normalver-

teilung und ist daher nur für genügend **große Stichproben** (etwa Stichprobenumfänge  $> 40$ ) zulässig. Wir setzen voraus, dass die beiden Stichproben gleichen Umfang  $n$  haben, dass also  $n_1 = n_2 = n$  ist. In diesem Fall ist der Vergleich am wirksamsten.

### Beispiel 7.18 : (Zweiseitiger) Vergleich von zwei Anteilen $p_1$ und $p_2$

Zwei Stanzautomaten A und B sollen auf Gleichwertigkeit untersucht werden. Eine Auswertung von Stanzteilen der beiden Automaten ergab:

Automat A:  $n = 200$  Teile, davon  $x_1 = 8$  fehlerhaft,

Automat B:  $n = 200$  Teile, davon  $x_2 = 16$  fehlerhaft.

Kann daraus bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  ein Unterschied in den Ausschussanteilen der beiden Automaten begründet werden?

#### Lösung

1. *Schritt*: Hypothesen aufstellen

Der Test wird zweiseitig geführt, da nur eine Ungleichheit der Ausschussanteile in Betracht gezogen wird.

$H_0: p_1 = p_2$  gegen  $H_1: p_1 \neq p_2$ ,

wobei  $p_1$  der Ausschussanteil des Automaten A und  $p_2$  jener des Automaten B ist.

2. *Schritt*: Prüfgröße berechnen

Als **Prüfgröße** dient:  $u_{\text{prüf}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{s_d}$  mit  $s_d = \sqrt{\frac{2\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$  und  $\hat{p} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)$

	1. Stichprobe	2. Stichprobe
Stichprobenumfang	$n = 200$	$n = 200$
Anzahl fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe	$x_1 = 8$	$x_2 = 16$
Anteil fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe (Schätzwert für $p_1$ bzw. $p_2$ )	$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n} = 0,04 = 4\%$	$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n} = 0,08 = 8\%$
Mittlerer Anteil fehlerhafter Einheiten in beiden Stichproben	$\hat{p} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) = 0,06 = 6\%$	
Schätzwert für die Standardabweichung der Differenzen $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$s_d = \sqrt{\frac{2\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} = 0,0237$	

Ein statistischer Test wird unter der Annahme geführt, dass  $H_0$  zutrifft, dass also hier  $p_1 = p_2 = p$  ist.  $\hat{p}$  ist Schätzwert für  $p$ . Der Schätzwert  $s_d$  ist ohne Begründung angegeben. Im Zähler der Prüfgröße  $u_{\text{prüf}}$  steht die Differenz der Fehleranteile in den beiden Stichproben, die für die Glaubwürdigkeit der  $H_0$ -Hypothese betragsmäßig nicht zu groß sein darf. Für die vorliegenden Stichproben ergibt sich  $u_{\text{prüf}} = -1,684$ .

### 3. Schritt: Kritischen Wert ermitteln

Die Prüfgröße ist für *große* Stichproben näherungsweise u-verteilt, wie nicht weiter begründet wird. Es liegt somit ein approximativer u-Test vor.

**Kritischer Wert:**  $u_{1-\alpha/2}$

$$u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,960 \text{ bei } \alpha = 5\%.$$

### 4. Schritt: Entscheidung

$|u_{\text{prüf}}| > u_{1-\alpha/2}$ :  $H_0$  wird zugunsten von  $H_1$  verworfen

$|u_{\text{prüf}}| \leq u_{1-\alpha/2}$ :  $H_0$  wird nicht verworfen

Da  $|u_{\text{prüf}}| \leq 1,960$ , wird  $H_0$  nicht verworfen, der Unterschied der Stichproben lässt sich noch zufällig erklären. Praktisch heißt dies, dass man  $H_0$  beibehält, also davon ausgeht, dass die Ausschussanteile der beiden Automaten gleich sind.

Berechnung des P-Wertes:  $u_{1-p/2} = |-1,684| \Rightarrow 1 - \frac{p}{2} = 0,954$  oder  $P = 0,092$ .

### Anmerkungen:

- (1) Der Test kann auch einseitig geführt werden:  $H_0: p_1 \leq p_2$  gegen  $H_1: p_1 > p_2$ , d.h. es besteht der Verdacht, dass  $p_1 > p_2$  ist.  $H_0$  ist nun zugunsten  $H_1$  zu verwerfen, wenn  $u_{\text{prüf}} > u_{1-\alpha}$ .
- (2) Man kann mit einem statistischen Test auch einen Vergleich von mehr als zwei Anteilen fehlerhafter Einheiten vornehmen.
- (3) Es soll noch erwähnt werden, dass mit statistischen Tests nicht nur Anteile fehlerhafter Einheiten, sondern auch mittlere Anzahlen von Fehlern (Parameter  $\mu_i$  bei Poissonverteilungen) verglichen werden können.

**Im Überblick: Vergleich zweier Anteile**

Der **Vergleich zweier Anteile** ist ein Vergleich der Grundwahrscheinlichkeiten ( $p$ -Werte) zweier Binomialverteilungen. Dieser ist von praktischer Bedeutung bei der Bewertung zweier Verfahren oder Lieferanten.

Ein für genügend große Stichproben geeigneter einfacher Zweistichprobentest zum Vergleich zweier Anteile ist ein **approximativer u-Test**. Er geht von der Differenz der Anteile fehlerhafter Einheiten in den beiden Stichproben aus.

**Aufgaben**

- 7.56** Es sollen wieder die Fehleranteile der beiden Stanzautomaten des Beispiels 7.18, Seite 309, auf Unterschiedlichkeit verglichen werden. Nun aber werden je 400 Stanzteile von beiden Automaten ausgewertet, wobei man  $x_1 = 16$  und  $x_2 = 32$  fehlerhafte Teile erhält. Dies bedeutet wieder, wie in Beispiel 7.18, 4% bzw. 8% fehlerhafte Teile in den Stichproben. Bedeutet dies bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  eine Änderung in der Entscheidung über die Gleichwertigkeit der Automaten?
- 7.57** Um einen möglichen Unterschied in der Fertigungsqualität von Gussteilen an zwei aufeinander folgenden Tagen festzustellen, werden die Ausschussanteile durch Prüfung von je 1000 Stück verglichen:  
1. Tag: 24 fehlerhafte Teile, 2. Tag: 36 fehlerhafte Teile.  
Muss von ein Unterschied in der Fertigungsqualität dieser beiden Tage bei  $\alpha = 5\%$  in Betracht gezogen werden?  
Wie groß ist der P-Wert des Tests?
- 7.58** Bauteile zweier möglicher Lieferanten A und B sollen auf Gleichwertigkeit überprüft werden. Man möchte sich von einem einzigen Lieferanten nur dann abhängig machen, wenn es überzeugende Anzeichen von unterschiedlichen Lieferqualitäten gibt. Deshalb wählt man  $\alpha = 1\%$ . Unter 300 von A gelieferten Teilen findet man 10 fehlerhafte Teile. Die von B gelieferten 300 Teile enthalten zwei fehlerhafte Teile. Ist dies mit der Gleichwertigkeit der Lieferanten auf dem gewählten Signifikanzniveau  $\alpha$  vereinbar? Wie groß ist der P-Wert?
- 7.59** In zwei verschiedenen Ländern A und B sollen Kaufgewohnheiten verglichen werden. Dabei interessiert unter anderem, ob die Anteilswerte der Personen, die schon einmal per Internet eingekauft haben, unterschiedlich ist. Unter jeweils 500 befragten Personen findet man im Land A einen Anteil von 4%, im Land B einen solchen von 7%. Kann daraus ein Unterschied bei einem Signifikanzniveau 1% abgeleitet werden?

## 7.9 Einführung in die Varianzanalyse

Die Durchführung von Versuchen zur **Produktverbesserung** ist grundlegend in den Ingenieurwissenschaften. Dabei ist die **Varianzanalyse** (ANOVA, Analysis of Variance) das wichtigste Analyseverfahren zur Auswertung solcher Versuche. Während der **Zweistichproben-t-Test** für unabhängige Stichproben *zwei* normalverteilte Grundgesamtheiten auf Gleichheit ihrer Mittelwerte untersucht, ist die Varianzanalyse eine Methode, auch *drei oder mehr* normalverteilte Grundgesamtheiten gleicher Standardabweichung auf **Gleichheit ihrer Mittelwerte** zu testen (Abb. 7.20). Sie bedient sich dabei einer **Untersuchung der Varianzen der Stichproben**.

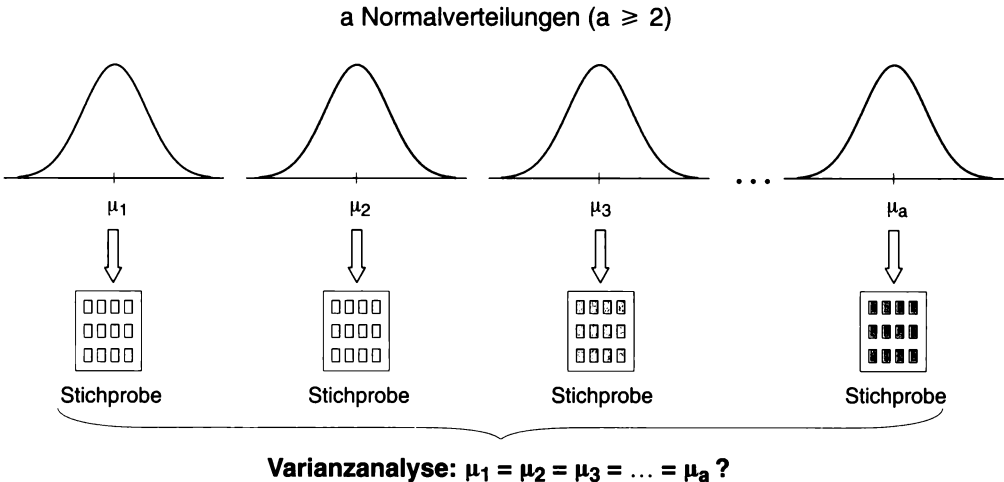


Abb. 7.20 Anwendung der Varianzanalyse

Die Varianzanalyse ermöglicht die Bearbeitung einer Vielzahl von Fragestellungen wie etwa:

- (1) Wie wirken sich verschiedene Werbeformen (Zeitung, Fernsehen, ...) auf den Absatz eines Produktes aus?
- (2) Wie wirkt sich der Hartholzanteil im Papier auf die Reißfestigkeit von Papiersäcken aus?
- (3) Wie wirken sich verschiedene Unterrichtsmethoden auf den Lernerfolg aus?
- (4) Wie wirken sich Bodenbeschaffenheit und Dünger auf den Ernteertrag aus?

Stets treten eine oder mehrere Einflussgrößen auf, die man **Faktoren** nennt. Sie wirken auf eine **Zielgröße** (Absatz, Reißfestigkeit, ...). In (1) bis (3) gibt es nur eine Einflussgröße: Man spricht von einer **einfaktoriellen** oder **einfachen Varianzanalyse**. In (4) treten die zwei Einflussgrößen "Bodenbeschaffenheit" und "Dünger" auf: Man spricht hier von einer **zweifaktoriellen** oder **doppelten Varianzanalyse**. Faktoren werden üblicherweise mit den Buchstaben A, B, ... bezeichnet.

Charakteristisch für die Varianzanalyse ist, dass die Faktoren nur auf gewissen "Stufen", den **Faktorstufen** untersucht werden. In (1) sind etwa "Zeitung" und "Fernsehen" zwei Stufen des Faktors "Werbeform". In (2) würde die Größe "Hartholzanteil" nur auf einigen Stufen, etwa 5%, 10% und 15%, untersucht werden. Auf jeder dieser Faktorstufen liegt eine Stichprobe, auch "Gruppe" genannt, vor. Man möchte wissen, ob aus ihnen einen Mittelwertunterschied der zugehörigen Normalverteilungen ableitbar ist, also ein Einfluss des Faktors bzw. der Faktoren. Die Zielgröße wird als die abhängige Variable mit dem Buchstaben  $y$  bezeichnet.

### Beispiel 7.19 : (Einfaktorielle) Varianzanalyse

Es soll untersucht werden, ob der Lernerfolg (gemessen in maximal 20 Punkten) in vier gleichartigen Gruppen von Personen von der angewandten Unterrichtsmethode abhängt. Dabei sollen  $a = 4$  verschiedene Unterrichtsmethoden zum Einsatz kommen. Für jede dieser Methoden wird zufällig eine Gruppe von  $n = 6$  Personen ausgewählt. Dabei ergab sich:

Gruppe	Lernerfolg $y_{ij}$ (in Punkten)					
1	6	12	8	4	10	8
2	7	1	5	3	8	6
3	12	5	8	14	10	11
4	9	12	5	10	7	11

Kann daraus bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  ein Einfluss der Unterrichtsmethode auf den Lernerfolg abgeleitet werden?

#### Lösung

Der Faktor "Unterrichtsmethode", der auf  $a = 4$  Stufen auftritt, wird mit dem Buchstaben A bezeichnet. Jede Gruppe bildet eine Stichprobe für die betreffende Faktorstufe. Mit  $y_{ij}$  werde der Lernerfolg der  $j$ -ten Person in der  $i$ -ten Gruppe bezeichnet.

1. Schritt: Hypothesen aufstellen

Bezeichnen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  und  $\mu_4$  die Mittelwerte des Lernerfolgs der vier Unterrichtsmethoden, so wird getestet:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$  gegen  $H_1$ : Nicht alle  $\mu_i$  sind gleich (d.h. mindestens zwei Mittelwerte sind ungleich).

Voraussetzung: Der Lernerfolg ist bei Anwendung jeder der vier Unterrichtsmethoden normalverteilt mit der gleichen Standardabweichung.

Anmerkung: Man kann sich vorstellen, dass der Lernerfolg eine kontinuierliche Größe ist, deren Werte ganzzahlig gerundet wurden. Auf diese Weise entstehen die "Punkte".

2. Schritt: Prüfwert berechnen

Zuerst wird ein Maß für die **Gesamtunterschiedlichkeit** aller vorliegenden Einzelwerte bestimmt. Dazu dient die Summe  $Q_{\text{tot}}$  der quadratischen Abweichungen *aller*  $a \cdot n = 4 \cdot 6 = 24$  Einzelwerte von ihrem Mittelwert  $\bar{y} = 8$ :

$$Q_{\text{tot}} = (y_{11} - \bar{y})^2 + (y_{12} - \bar{y})^2 + \dots + (y_{46} - \bar{y})^2 = (6 - 8)^2 + (12 - 8)^2 + \dots + (11 - 8)^2 = 242$$

*Entscheidend* ist nun, dass sich  $Q_{\text{tot}}$  in zwei Summanden aufteilen lässt.

Der **erste Summand** erfasst die Unterschiedlichkeit der Einzelwerte, die möglicherweise auf den **Faktor A**, die Unterrichtsmethode, zurückgeht. Wären für die unterschiedlichen Lernerfolgswerte *nur* die vier Unterrichtsmethoden verantwortlich und nicht auch andere zufällige Resteinflüsse (wie beispielsweise Motivierung, Aufmerksamkeit, Begabung, Vorwissen), so müssten die Personen in derselben Gruppe den gleichen Lernerfolgswert haben. Als bester Schätzwert für diesen Wert ist der jeweilige Gruppenmittelwert  $\bar{y}_i$  anzusehen. Man erhält so wegen  $\bar{y}_1 = 8, \bar{y}_2 = 5, \bar{y}_3 = 10, \bar{y}_4 = 9$ :

Gruppe	Geschätzter nur durch die Unterrichtsmethode bestimmter Lernerfolg					
1	8	8	8	8	8	8
2	5	5	5	5	5	5
3	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	9	9	9

Eine Unterschiedlichkeit dieser 24 Werte besteht nur *zwischen den Gruppen*. Wir berechnen sie als die Summe ihrer quadratischen Abweichungen vom Gesamtmittelwert  $\bar{y}$ :

$$Q_A = (8 - 8)^2 + \dots + (8 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + \dots + (5 - 8)^2 + (10 - 8)^2 + \dots + (10 - 8)^2 + (9 - 8)^2 + \dots + (9 - 8)^2 = 84.$$

Der **zweite Summand** gibt das Ausmaß der Unterschiedlichkeit des Lernerfolgs *innerhalb der Gruppen* an, das den **Resteinflüssen** zugeschrieben werden kann. Da die Gruppenmittelwerte die Wirksamkeit der Unterrichtsmethode am besten beschreiben, schätzen wir die von der Unterrichtsmethode unabhängige Unterschiedlichkeit durch die Summe der quadrierten Abweichungen der Einzelwerte von ihren Gruppenmittelwerten:

$$Q_R = (6 - 8)^2 + \dots + (8 - 8)^2 + (7 - 5)^2 + \dots + (6 - 5)^2 + (12 - 10)^2 + \dots + (11 - 10)^2 + (9 - 9)^2 + \dots + (11 - 9)^2 = 158.$$

Zusammenfassend gilt (S.d.q.A. = Summe der quadrierten Abweichungen):

Unterschiedlichkeit	S.d.q.A.
Zwischen den Gruppen, durch den <b>Faktor A</b> erklärbar	$Q_A = 84$
Innerhalb der Gruppen, durch von A unabhängige <b>Resteinflüsse</b> erklärbar	$Q_R = 158$
Total	$Q_{\text{tot}} = 242$

Wir stellen fest, dass  $Q_{\text{tot}} = Q_A + Q_R$  ist! Dies gilt allgemein, wie sich zeigen lässt. Man kann daher sagen: *Die Gesamtunterschiedlichkeit der Versuchswerte lässt sich in zwei Teile zerlegen: Der eine Teil kann durch den Faktor A erklärt werden, der andere durch von A unabhängige Resteinflüsse.*

Zum Aufbau einer Prüfgröße werden nun aus den Werten  $Q_A$  und  $Q_R$  durch Division durch die Anzahl ihrer "Freiheitsgrade" **Varianzen** gebildet. Die Freiheitsgrade geben jeweils die Anzahl der Werte an, die bei der Berechnung von  $Q_A$  bzw.  $Q_R$  frei gewählt werden können. Bei der Berechnung von  $Q_A$  sind der Gesamtmittelwert  $\bar{y}$  vorgegeben, bei jener von  $Q_R$  die Gruppenmittelwerte  $\bar{y}_i$ . Es ergeben sich mit den Freiheitsgraden  $f_A$  und  $f_R$ :

$$f_A = a - 1 = 4 - 1 = 3; \quad s_A^2 = \frac{Q_A}{f_A} = \frac{84}{3} = 28$$

$$f_R = a \cdot (n - 1) = 4 \cdot (6 - 1) = 20; \quad s_R^2 = \frac{Q_R}{f_R} = \frac{158}{20} = 7,9.$$

Die Streuung *zwischen* den Gruppen erscheint deutlich größer als die Streuung *innerhalb* der Gruppen. Dies deutet auf einen Einfluss der Unterrichtsmethode hin. Es fragt sich, ob  $s_A^2$  wirklich groß genug ist im Vergleich zu  $s_R^2$ . Denn auch wenn es keinen Einfluss der Unterrichtsmethode gibt, sind doch kleine Unterschiede in den Gruppenmittelwerten zu erwarten, die zu einem Wert von  $s_A^2 > 0$  führen.

**Prüfgröße** für einen Test, ob ein Einfluss des Faktors A annehmbar:  $F_{\text{prüf}} = \frac{s_A^2}{s_R^2}$ .

Die Prüfgröße hat den Wert:  $F_{\text{prüf}} = \frac{s_A^2}{s_R^2} = \frac{28}{7,9} = 3,544$ .

3. Schritt: Kritischen Wert ermitteln

Die Prüfgröße ist als Verhältnis zweier Varianzen F-verteilt. Es liegt somit ein F-Test vor, der hier einseitig zu führen ist (Seite 304 f). Wenn  $H_0$  glaubwürdig bleiben soll, darf der Prüfwert beliebig kleine positive Werte annehmen, er darf aber nicht zu groß werden. Daher ist das  $(1 - \alpha)$ -Quantil zu bilden.

**Kritischer Wert:**  $F_{f_A, f_R; 1 - \alpha}$  mit  $f_A = a - 1$  und  $f_R = a \cdot (n - 1)$

$F_{f_A, f_R; 1 - \alpha} = F_{3, 20; 0,95} = 3,10$  (Tabelle 4a, Seite 358).

## 4. Schritt: Entscheidung

$F_{\text{prüf}} > F_{f_A, f_R; 1-\alpha}$ :  $H_0$  ist zugunsten von  $H_1$  zu verwerfen.

$F_{\text{prüf}} \leq F_{f_A, f_R; 1-\alpha}$ :  $H_0$  wird nicht verworfen.

Da  $F_{\text{prüf}} > 3,10$ , ist die Nullhypothese auf dem Niveau 5% zu verwerfen. Mindestens zwei der vier Unterrichtsmethoden unterscheiden sich auf dem Niveau 5%.

Bei einer Handrechnung benützt man zur Bestimmung von  $Q_A$  und  $Q_R$  einen einfacheren Weg, der von gewissen möglichen Umformungen bei ihrer Berechnung Gebrauch macht:

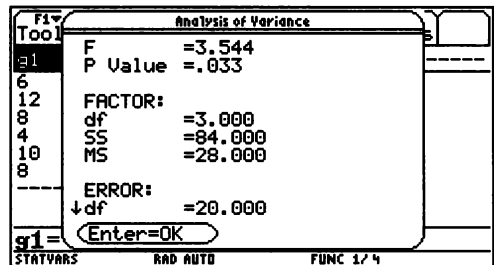
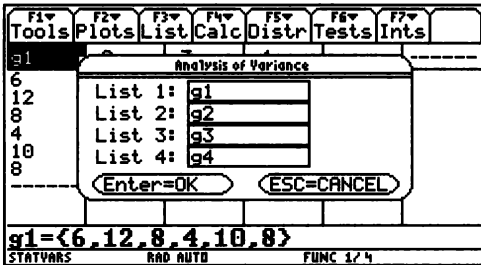
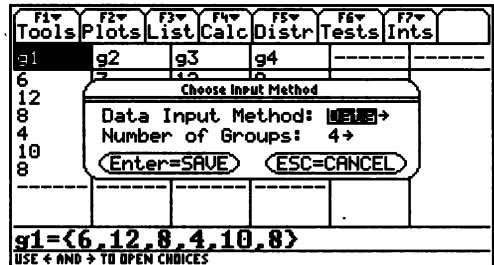
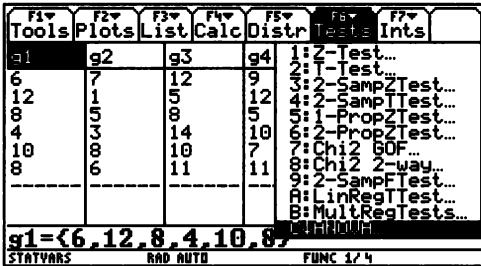
Gruppe	Einzelwerte	Gruppen- summe	Quadrat der Gruppensumme	Summe der quadrierten Einzelwerte der Gruppe
1	6 12 8 4 10 8	48	$48^2$	$6^2 + 12^2 + \dots + 8^2 = 424$
2	7 1 5 3 8 6	30	$30^2$	$7^2 + 1^2 + \dots + 6^2 = 184$
3	12 5 8 14 10 11	60	$60^2$	$12^2 + 5^2 + \dots + 11^2 = 650$
4	9 12 5 10 7 11	54	$54^2$	$9^2 + 12^2 + \dots + 11^2 = 520$
Spaltensumme:		$S_1 = 192$	$S_2 = 9720$	$S_3 = 1778$

Gruppenanzahl  $a = 4$ ; Gruppenumfang  $n = 6$ .

$$Q_A = \frac{S_2}{n} - \frac{S_1^2}{a \cdot n} = \frac{9720}{6} - \frac{192^2}{4 \cdot 6} = 84;$$

$$Q_R = S_3 - \frac{S_2^2}{n} = 1778 - \frac{9720^2}{6} = 158$$

$$\text{Kontrolle: } Q_{\text{tot}} = S_3 - \frac{S_1^2}{a \cdot n} = 1778 - \frac{192^2}{4 \cdot 6} = 242 = Q_A + Q_R.$$



Lösung mit Hilfe der Flash-Applikation Statistik:

Mit **APPS** **1** (1:Flash Apps... ) **ENTER** wird der StatsList Editor aufgerufen. Eingabe der 4 Gruppen etwa unter den Namen  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  und  $g_4$  wie gezeigt. **F2** **C** (C:ANOVA); Ausfüllen des Dialogfensters wie gezeigt. Nach **ENTER** erhält man ein weiteres Dialogfenster zur Eingabe der 4 Gruppen  $g_1$  bis  $g_4$ . Danach wird durch **ENTER** die Berechnung ausgelöst.



F bezeichnet die Prüfgröße. Der P-Wert ist kleiner als  $\alpha = 5\%$ , weshalb die  $H_0$ -Hypothese zu verwerfen ist.

Bezeichnungen: df = Degrees of Freedom (Freiheitsgrade), SS = Sum of Squares (Summe der quadrierten Abweichungen), MS = Mean Square (Varianz), ERROR bezeichnet den Rest(einfluss).

### Anmerkungen:

- (1) Die Durchführung der Varianzanalyse setzt wie der Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben voraus, dass die auf jeder Faktorstufe vorliegenden Grundgesamtheiten normalverteilt mit der gleichen Standardabweichung sind.
- (2) Wird nur ein auf zwei Stufen auftretender Faktor betrachtet, so kann die Gleichheit der Varianzanalyse mit dem Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben gezeigt werden (siehe Aufgabe 7.63).
- (3) Ist die  $H_0$ -Hypothese zu verwerfen, so interessiert natürlich, zwischen welchen Mittelwerten  $\mu_i$  Unterschiede bestehen. Auf diesbezügliche Tests wird nicht mehr eingegangen.
- (4) Gleich große Gruppen (Stichproben) auf jeder Faktorstufe sind nicht nötig, aber vorteilhaft. In diesem Fall ist der Test am wirksamsten und Abweichungen von der geforderten Varianzgleichheit auf den Faktorstufen sind nicht so schwerwiegend.
- (5) Werden k Faktoren betrachtet, so liegt hier der einfachste Fall vor, wenn alle Faktoren nur auf 2 Stufen auftreten. Es gibt dann insgesamt  $2^k$  verschiedene Faktorstufenkombinationen (überlege!). Man spricht von einem  $2^k$ -faktoriellen Versuch, der in der Praxis große Bedeutung besitzt.

## Im Überblick: Einführung in die Varianzanalyse

Die **Varianzanalyse** (ANOVA) ist eine Methode, auch *drei oder mehr* normalverteilte Grundgesamtheiten gleicher Standardabweichung auf **Gleichheit ihrer Mittelwerte** zu testen. Sie bedient sich dabei einer **Untersuchung der Stichprobenvarianzen**. Sie kann als eine Verallgemeinerung des Zweistichproben-t-Tests für unabhängige Stichproben für mehr als zwei Stichproben angesehen werden.

In der **einfaktoriellen Varianzanalyse** wird statistisch untersucht, ob ein auf verschiedenen **Stufen** auftretender Faktor, repräsentiert durch eine Stichprobe, im Mittel eine Wirkung auf die Zielgröße hat.

**Grundidee der (einfaktoriellen) Varianzanalyse:** Die Summe der quadrierten Abweichungen aller Einzelwerte vom Gesamtmittel kann in eine Summe von zwei Termen zerlegt werden. Daraus wird durch Mittelung **die Varianz zwischen den Stichproben** und die **Varianz innerhalb der Stichproben** gebildet. Durch Vergleich dieser Varianzen kommt man zu einer statistisch abgesicherten Aussage, ob die zu den Stichproben gehörigen Normalverteilungen gleiche Mittelwerte haben oder eine Ungleichheit besteht, was den Einfluss eines Faktors begründet.

### Aufgaben

**7.60** Gegeben sind drei Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten gleicher Standardabweichung. Teste auf Gleichheit der Mittelwerte auf dem Niveau  $\alpha = 5\%$ :

- a)**
1. Gruppe: 7 8 7 6
  2. Gruppe: 6 7 5 6
  3. Gruppe: 8 9 6 9

- b)**
1. Gruppe: 5 4 7 5 4 6
  2. Gruppe: 6 3 6 4 5 6
  3. Gruppe: 8 6 7 9 6 8

- 7.61** Ermittle rechnergestützt (TI 92/89, MS Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/ Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...) vier Stichproben normalverteilter Zufallszahlen des gleichen Umfangs  $n = 8$ . Nimm  $\mu_1 = 50$ ,  $\mu_2 = 50$ ,  $\mu_3 = 52$  und  $\mu_4 = 54$  an, wobei stets  $\sigma = 2$  sein soll. Runde einfachheitshalber die Zufallszahlen ganzzahlig. Teste nun auf Gleichheit der Mittelwerte bei einem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ .
- 7.62** Löse das Beispiel 7.19, Seite 313, mit Hilfe von Microsoft Excel. Im Menü Extras wählt man Analyse-Funktionen (wenn dort nicht vorhanden, den Add-In-Manager in diesem Menü aufrufen und die Analyse-Funktionen in das Menü Extras eingliedern). Danach Einfaktorielle Varianzanalyse wählen.
- 7.63** Löse Beispiel 7.17, Seite 304, zuerst mit dem Zweistichproben-t-Test und danach mit der Varianzanalyse jeweils auf dem gleichen Niveau  $\alpha = 5\%$ . Stelle fest, dass das Quadrat der Prüfgröße des t-Testes gleich der Prüfgröße bei der Varianzanalyse ist und dass dieser Zusammenhang auch für die kritischen Werte gilt.
- 7.64** Die Druckfestigkeit dreier Betonsorten soll verglichen werden. Dabei wird angenommen, dass die Druckfestigkeit jeder Sorte normalverteilt mit möglicherweise unterschiedlichen Erwartungswerten ist. Die Standardabweichung  $\sigma$  wird bei allen Normalverteilungen gleich angenommen. Eine stichprobenartige Messung der Druckfestigkeit bei den vier Betonsorten ergab folgende Werte:

Sorte	Druckfestigkeit						
1	2000	1930	2040	1960	1990	2070	2020
2	2080	1930	2060	1970	1980	2010	2020
3	2010	2090	2040	2060	2120	2070	2100

Kann ein Einfluss der Betonsorte angenommen werden? ( $\alpha = 5\%$ )

- 7.65** Es soll der Einfluss verschiedener Verpackungen  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  und  $V_4$  auf die Nachfrage eines Artikels untersucht werden. Dazu wird der Artikel in 10 Geschäften in allen 4 Verpackungen angeboten. An einem ausgesuchten Tag stellt man folgende Absatzmengen in Stück fest:

Verpackungsart	Absatz									
$V_1$	8	4	6	10	6	7	8	9	12	10
$V_2$	5	10	7	8	9	8	10	13	9	11
$V_3$	9	3	4	7	5	6	6	5	7	8
$V_4$	9	6	7	8	11	9	10	7	12	11

Kann ein Einfluss der Verpackung angenommen werden? ( $\alpha = 5\%$ )

- 7.66** Der Weizenertrag soll in Abhängigkeit von drei Düngemitteln untersucht werden, die auf jeweils 7 Versuchsfeldern eingesetzt wurden. Dabei ergaben sich folgende Erträge (in dz/ha):

Dünger	Ertrag						
1	57	55	59	63	60	61	58
2	59	58	59	55	64	61	63
3	61	58	66	62	63	60	65

Wirkt sich die Wahl des Düngers auf den Ertrag aus? ( $\alpha = 5\%$ )

## 8 Zusammenhanganalysen

### 8.1 Lineare Korrelation

Bisher wurde stets nur *ein* Merkmal (*eine* Größe) einer Einheit betrachtet. Misst man **zwei Merkmale** an derselben Einheit, so kann man fragen, ob zwischen diesen ein **Zusammenhang** besteht. Ein solcher kann von unterschiedlicher Art sein. So stehen Radius und Umfang eines Kreises in einem exakten Zusammenhang. Dagegen kann man wohl sagen, dass zwischen dem Körpergewicht und der Körpergröße einer Person ein statistischer Zusammenhang besteht (eine größere Person ist *eher* schwerer). Man kann jedoch keine genaue Gleichung zwischen diesen Merkmalen angeben.

Weitere Beispiele für Größen mit statistischem Zusammenhang:

- Alter und Blutdruck einer Person
- Tägliche Trainingszeit und Leistung eines Sportlers
- Werbeausgaben und Umsatz
- Außentemperatur und Heizkosten eines Hauses
- Geschwindigkeit und Bremsweg eines PKW
- Anzahl der gefahrenen Kilometer und Wassergehalt der Bremsflüssigkeit
- Kohlenstoffgehalt und Zugfestigkeit von Stahlstäben

#### Beispiel 8.1 : Zwei Merkmale, die erwartungsgemäß zusammenhängen

16 (erwachsene) Personen werden zufällig ausgewählt und deren Körpergröße  $x$  sowie deren Körpergewicht  $y$  festgestellt. Es ergibt sich (Größe in cm, "Gewicht" in kg):

Nr.	Größe $x$	Gewicht $y$	Nr.	Größe $x$	Gewicht $y$
1	171	75	9	161	60
2	163	62	10	168	70
3	172	69	11	172	74
4	179	82	12	163	66
5	176	74	13	180	77
6	164	63	14	171	76
7	170	72	15	174	72
8	174	74	16	169	73

Gesucht ist eine graphische Darstellung von Körpergröße  $x$  und zugehörigem Körpergewicht  $y$  der Personen der Stichprobe.

#### Lösung

Es ist naheliegend, für jede Person Körpergröße  $x$  und Körpergewicht  $y$  zu einem Paar  $(x,y)$  zusammenzufassen und dieses als Punkt in einem Koordinatensystem einzutragen. Wir erhalten dann Punkte mit dem Koordinatenpaaren  $(171,75)$ ,  $(163,62)$ , ...,  $(169,73)$ . Diese Darstellung als "Punktwolke" nennt man **Streudiagramm** (engl. scatter plot, Abb. 8.20)

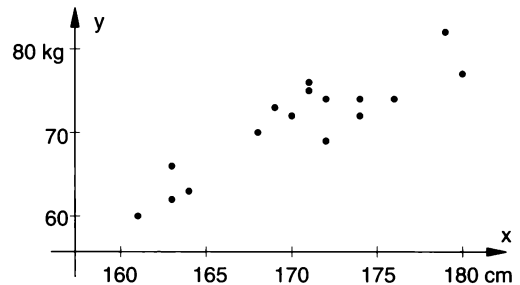


Abb. 8.1 Streudiagramm

Aus dieser Abbildung kann man leicht die *Tendenz* herauslesen, dass mit zunehmender Körpergröße  $x$  auch das Körpergewicht  $y$  zunimmt. Allerdings gilt nicht immer, dass eine größere Person schwerer als eine kleinere ist.

### Beispiel 8.2 : Zwei Merkmale, die erwartungsgemäß nicht zusammenhängen

Von den 16 ausgewählten Personen des vorigen Beispiels soll nun die Körpergröße  $x$  (in cm) mit der Fläche  $y$  ihrer Wohnung (in  $m^2$ ) verglichen werden. Es ergab sich:

Nr.	Größe $x$	Fläche $y$	Nr.	Größe $x$	Fläche $y$
1	171	40	9	161	59
2	163	32	10	168	75
3	172	94	11	172	46
4	179	56	12	163	77
5	176	97	13	180	45
6	164	63	14	171	51
7	170	55	15	174	44
8	174	72	16	169	63

Gesucht ist wieder eine graphische Darstellung von Körpergröße  $x$  und Wohnungsfläche  $y$  der Personen der Stichprobe.

#### Lösung

Das Streudiagramm vermittelt den Eindruck, dass die Punkte ziemlich regellos liegen; eine Tendenz oder irgendein Muster ist nicht erkennbar. Dies bestätigt die Vermutung, dass zwischen der Körpergröße und der Wohnungsgröße der betrachteten Personen kein Zusammenhang besteht.

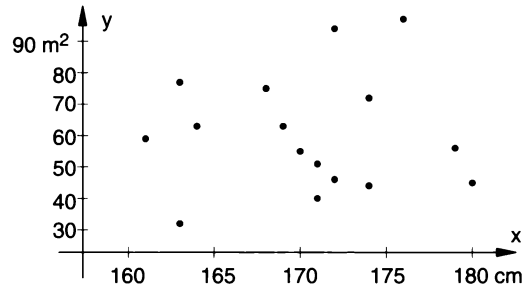


Abb. 8.2 Zwei Merkmale, die nicht zusammenhängen

### Beispiel 8.3 : Zwei Merkmale mit "gegenseinigem" Zusammenhang

Die Messung zweier Merkmale  $x$  und  $y$  an 8 Einheiten ergab folgende Wertepaare  $(x_i, y_i)$ :

Nr.	Größe $x$	Größe $y$	Nr.	Größe $x$	Größe $y$
1	10	6	5	40	2
2	20	3	6	50	3
3	30	6	7	60	2
4	40	4	8	70	3

Gesucht ist eine graphische Darstellung der Größen  $x$  und  $y$  der Stichprobe. Liegt zwischen den beiden Größen irgendeine Tendenz vor?

#### Lösung

Aus dem Streudiagramm erkennt man eine gewisse Tendenz, dass mit größer werdenden  $x$ -Werten die  $y$ -Werte kleiner werden. Dies ist hier nicht besonders stark ausgeprägt, aber doch erkennbar.

Beispiel eines gegenseinigen Zusammenhangs: Trainingszeit  $x$  und Laufzeit  $y$  eines Läufers

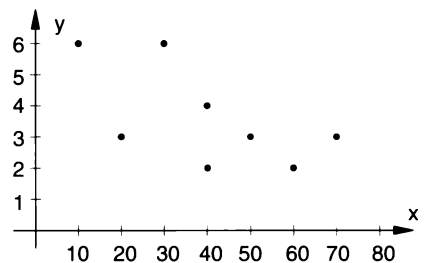


Abb. 8.3 Gegenseiniger Zusammenhang

Diese Beispiele lassen es wünschenswert erscheinen, durch eine Maßzahl Auskunft über die "Schlankheit" des Streudiagramms zu geben. Diese Zahl sollte dadurch mitteilen, wie die Merkmale "korrelieren" (korrelieren = in Wechselbeziehung stehen). Wir betrachten zwei quantitative Merkmale  $x$  und  $y$  an  $n$  Einheiten. Die jeweils zusammengehörigen Werte lauten als Paare geschrieben:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ .

Im Beispiel 8.1, Seite 318, sind dies die Paare  $(171, 75), (163, 62), (172, 69), \dots, (169, 73)$ . Man spricht von einer **zweidimensionalen Stichprobe**. Davon ausgehend vereinbart man:

**Empirischer Korrelationskoeffizient** (PEARSON'scher Korrelationskoeffizient, engl.

sample correlation coefficient  $R$ )  $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$

$$\text{mit } s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}), \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Das Wort "empirisch" drückt aus, dass die Berechnung aus beobachteten Werten erfolgt.  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  sind die arithmetischen Mittelwerte,  $s_x$  und  $s_y$  die Standardabweichungen der  $x_i$ -Werte bzw. der  $y_i$ -Werte. Neu ist der Term  $s_{xy}$ , der als **empirische Kovarianz** bezeichnet wird. Da  $s_x > 0$  und  $s_y > 0$ , wird das Vorzeichen von  $r$  durch  $s_{xy}$  bestimmt.

Nehmen wir an, dass das Streudiagramm wie im Beispiel 8.19, Seite 313, eine von links unten nach rechts oben steigende Tendenz hat. Dies führt zu einer positiven empirischen Kovarianz  $s_{xy}$ . Denn nun überwiegen in der Definitionsgleichung für  $s_{xy}$  die positiven Summanden  $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ . Bei positiven Summanden besitzen jedoch  $(x_i - \bar{x})$  und  $(y_i - \bar{y})$  gleiche Vorzeichen (beide positiv oder beide negativ). Also überwiegen Wertepaare  $(x_i, y_i)$ , bei denen ein überdurchschnittlich großer  $x$ -Wert auch mit einem überdurchschnittlich großen  $y$ -Wert oder ein unterdurchschnittlich kleiner  $x$ -Wert mit einem unterdurchschnittlich kleinen  $y$ -Wert verbunden ist.

Überlege analog, dass ein Streudiagramm wie im Beispiel 8.2, Seite 319, die eine von links oben nach rechts unten fallende Tendenz hat, zu einem negativen Wert  $s_{xy}$  führt.

Rechentechisch günstiger als die oben angeführten Formeln sind die folgenden Umformungen, die ohne Herleitung angeführt werden:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \bar{y} \right); \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2 \right)} \quad (*)$$

#### Beispiel 8.4 : Berechnung des empirischen Korrelationskoeffizienten

Berechne den Korrelationskoeffizienten der Stichprobe aus

- a) Beispiel 8.3, Seite 319      b) Beispiel 8.1, Seite 318      c) Beispiel 8.2, Seite 319

#### Lösung

Die Berechnung erfolgt nach den Formeln (\*). Dabei ist das folgende Schema vorteilhaft.

Zu a)

	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$
1	10	6	100	36	60
2	20	3	400	9	60
3	30	6	900	36	180
4	40	4	1600	16	160
5	40	2	1600	4	80
6	50	3	2500	9	150
7	60	2	3600	4	120
8	70	3	4900	9	210
$\Sigma$	320	29	15600	123	1020

$$\bar{x} = \frac{320}{8} = 40; \bar{y} = \frac{29}{8} = 3,625; s_{xy} = \frac{1}{7} \cdot (1020 - 8 \cdot 40 \cdot 3,625) = -20;$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot (15600 - 8 \cdot 40^2)} = 20; s_y = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot (123 - 8 \cdot 3,625^2)} = 1,598;$$

$$r = \frac{-20}{20 \cdot 1,598} = -0,626.$$

Der negative Korrelationskoeffizient weist darauf hin, dass mit zunehmenden x-Werten die y-Werte tendenzmäßig fallen.

Zu b) Aus dem Schema ergeben sich folgende Zwischenergebnisse:  $\sum x_i = 2727$ ,  
 $\sum y_i = 1139$ ,  $\sum x_i^2 = 465259$ ,  $\sum y_i^2 = 81609$ ,  $\sum x_i \cdot y_i = 194576$ ; daraus:

$$\bar{x} = \frac{2727}{16} = 170,4375; \bar{y} = \frac{1139}{16} = 71,1875; s_{xy} = \frac{1}{15} (194576 - 16 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}) = 29,8458$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{15} (465259 - 16 \cdot \bar{x}^2)} = 5,6329; s_y = \sqrt{\frac{1}{15} (81609 - 16 \cdot \bar{y}^2)} = 5,9242;$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0,894.$$

Der positive Korrelationskoeffizient weist darauf hin, dass mit zunehmenden x-Werten die y-Werte tendenzmäßig anwachsen.

Zwischenergebnisse werden nur zu Kontrollzwecken angeschrieben; sie sollten im Taschenrechner zwischengespeichert und mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit weiterverarbeitet werden! Ist dies nicht der Fall, müssen sie mit einer größeren Anzahl von "Schutzstellen" nach dem Komma angeschrieben werden, um Genauigkeitsverluste gering zu halten.

Zu c) Zwischenergebnisse:  $\sum x_i = 2727$ ,  $\sum y_i = 969$ ,  $\sum x_i^2 = 465259$ ,  $\sum y_i^2 = 63865$ ,  
 $\sum x_i \cdot y_i = 165216$ ; daraus:

$$\bar{x} = \frac{2727}{16} = 170,4375; \bar{y} = \frac{969}{16} = 60,5625; s_{xy} = \frac{1}{15} (165216 - 16 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}) = 4,1375;$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{15} (465259 - 16 \cdot \bar{x}^2)} = 5,6329; s_y = \sqrt{\frac{1}{15} (63865 - 16 \cdot \bar{y}^2)} = 18,5830;$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0,040.$$

Es fällt auf, dass nun r nahe bei 0 liegt.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
1	10	3				
2	20	3				
3	30	6				
4	40	4				
5	40	2				
6	50	3				
7	60	2				

r1c2=6  
MAIN RAD AUTO FUNC

```

main/vz Calculate
Calculation Type.. TwoVar →
x..... c1
y..... c2
Store RegEQ to... NONE→
Use Freq and Categories? NO→
Freq.....
Category.....
(Include Categories)
Enter=SAVE ESC=CANCEL
TYPE → [ENTER]=OK AND [ESC]=CANCEL
    
```

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	x	=40.			
1	10	Σx	=3.625			
2	20	Σx <sup>2</sup>	=320.			
3	30	Σy	=29.			
4	40	Σy <sup>2</sup>	=123.			
5	40	Σxy	=1020.			
6	50	Sx	√20.			
7	60					

r1c2=6  
MAIN RAD AUTO FUNC

6 (6: Data/Matrix Editor) 3 (3: New) öffnet eine Dialog-Box, in der ein Variablenname definiert wird, um die Wertepaare aufzunehmen. Nach 6 3 erscheint eine Tabelle; in der Spalte c1 werden die x-Werte, in der Spalte c2 die zugehörigen y-Werte eingetragen.

Jeder Eintrag wird mit 6 quittiert.

6 öffnet eine Dialogbox zur Vorbereitung der Berechnungen. Als Calculation Type wählen wir 2 (2:TwoVar), bei x und y wird c1 bzw. c2 angegeben, 6. 6 öffnet das Fenster STAT VARS, in dem alle Zwischensummen sowie die Mittelwerte und Standardabweichungen angeführt sind. Nach Berechnung von  $s_{xy}$  kann auch r bestimmt werden.

Man erhält unmittelbar r, wenn man Calculation Type 5 (5:LinReg) wählt.

Man kann zeigen, dass der empirische Korrelationskoeffizienten r nur zwischen -1 und +1 liegen kann:  $-1 \leq r \leq 1$ .

Je näher r bei +1 bzw. -1 liegt, desto näher liegen die Punkte um eine Gerade konzentriert. Der kleinstmögliche Wert  $r = -1$  tritt nur dann ein, wenn alle Punkte genau auf einer fallenden Geraden liegen; der größtmögliche Wert  $r = +1$  tritt nur ein, wenn alle Punkte genau auf einer steigenden Geraden liegen (Abb. 8.4). In diesen beiden Grenzfällen liegt der stärkste lineare Zusammenhang vor. Der empirische Korrelationskoeffizient r bewertet somit den linearen Zusammenhang zweier Merkmale.

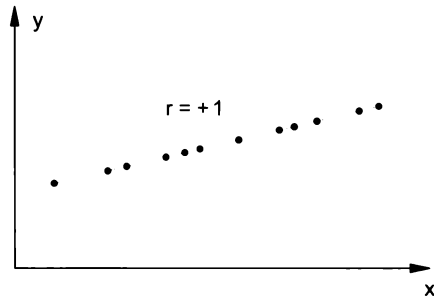
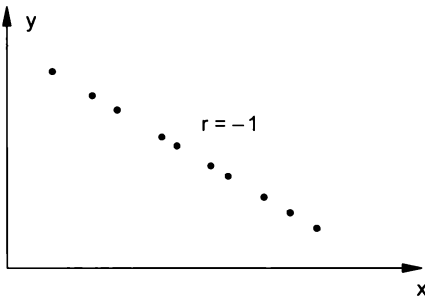


Abb. 8.4 Alle Punkte liegen auf einer Geraden

Der **empirische Korrelationskoeffizient**  $r$  ist ein Schätzwert für die **Stärke und Richtung** des **linearen Zusammenhangs** (der **linearen Korrelation**) der beiden in der Stichprobe erfassten Merkmale.

1. Wertebereich:  $-1 \leq r \leq 1$ .

Je näher  $r$  bei  $+1$  oder bei  $-1$  liegt, desto näher liegen die Punkte in der Nähe einer Geraden konzentriert.

2. Ist  $r > 0$ , so werden die Punkte durch eine *steigende* Gerade beschrieben. Man spricht von einem *positiven linearen Zusammenhang* oder einer *positiven linearen Korrelation*.

Ist  $r < 0$ , so werden die Punkte durch eine *fallende* Gerade beschrieben. Man spricht von einem *negativen linearen Zusammenhang* oder einer *negativen linearen Korrelation*.

Ist  $r = 0$ , so stehen die Merkmale in keinem linearen Zusammenhang.

3.  $r$  ist vom verwendeten Maßstab für die beiden Merkmale unabhängig.

**Faustregel:** Gilt  $r \geq 0,8$  bzw.  $r \leq -0,8$ , so spricht man von einem starken linearen Zusammenhang. Dies setzt allerdings voraus, dass die Stichprobe nicht zu klein ist. Bei einem Stichprobenumfang  $n < 5$  hat auch ein betragsmäßig hoher Korrelationskoeffizient wenig Aussagekraft.

### Kausalität und Scheinkorrelation

Eine deutliche lineare Korrelation muss nicht darauf hinweisen, dass eines der beiden Merkmale vom anderen im kausalen Sinn abhängt. So besteht zwischen der Anzahl der Sonnenbrände und dem Verbrauch von Mineralwasser eine positive Korrelation ohne kausalen Hintergrund. Man spricht von einer **Scheinkorrelation** oder Nonsense-Korrelation. Die Korrelation wird in diesem Fall durch eine dritte Größe (Tagestemperatur) hervorgerufen. Nur wenn man aus sachlichen Gründen einen ursächlichen linearen Zusammenhang vermutet, kann der empirische Korrelationskoeffizient dafür oder dagegen sprechen!

### Beispiel 8.5 : $r = 0$ trotz Abhängigkeit

Zeichne das Streudiagramm und berechne den Korrelationskoeffizienten, wenn folgende Stichprobe vorliegt:  $(-2,4)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  und  $(2,4)$ .

#### Lösung

Zwischenergebnisse:  $\sum x_i = 0$ ,  $\sum y_i = 10$ ,

$\sum x_i^2 = 10$ ,  $\sum y_i^2 = 34$ ,  $\sum x_i \cdot y_i = 0$ ; daraus:

$\bar{x} = \frac{0}{5} = 0$ ;  $\bar{y} = \frac{10}{5} = 2$ ;  $s_{xy} = \frac{1}{4} \cdot (0 - 5 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}) = 0$ ;

$r = \frac{0}{s_x \cdot s_y} = 0$ .

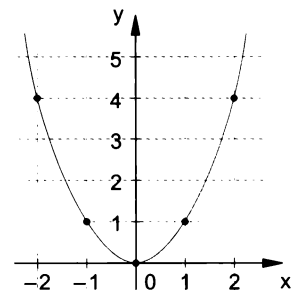


Abb. 8.5

Der empirische Korrelationskoeffizient  $r$  ist ein Maß für den **linearen** Zusammenhang.  $r = 0$  heißt daher, dass kein linearer Zusammenhang besteht. Trotzdem besteht hier ein "perfekter", nichtlinearer Zusammenhang zwischen den  $x$ - und  $y$ -Werten, ausgedrückt durch die Gleichung  $y = x^2$ . Die Punkte liegen exakt auf einer Parabel (Abb. 8.5).



### Test auf Unabhängigkeit zweier Merkmale

Im Folgenden wird angenommen, dass die Werte  $x$  und  $y$  zweier Merkmale wenigstens angenähert **zweidimensional normalverteilt** sind. Dies bedeutet, dass nicht nur die Verteilungen der  $x$ -Werte und der  $y$ -Werte für sich normal sein müssen. Auch die zu einem *festen*  $x$ -Wert gehörenden  $y$ -Werte müssen normalverteilt sein, ebenso die zu einem *festen*  $y$ -Wert gehörenden  $x$ -Werte. Wir bezeichnen mit  $\rho$  den **Korrelationskoeffizienten** zwischen zwei Merkmalen in der **Grundgesamtheit**. Der empirische Korrelationskoeffizient  $r$  dient als Schätzwert für  $\rho$ . Dann gilt:

Sind die Werte  $x$  und  $y$  zweier Merkmale zweidimensional normalverteilt, dann sind die beiden Merkmale **genau dann unabhängig, wenn  $\rho = 0$**  ist, sie also unkorreliert sind.

Es gibt damit auch keine nicht lineare Abhängigkeit, wenn  $\rho = 0$  ist! Im folgenden Beispiel werden zweidimensional normalverteilte Merkmale auf Unabhängigkeit geprüft.

### Beispiel 8.6 : Test auf Unabhängigkeit zweier Merkmale

Acht Autofirmen geben die Werbeausgaben  $x$  in und die Umsätze  $y$  für ein Jahr an:

Firma	x in $10^5$ €	y in $10^8$ €	Firma	x in $10^5$ €	y in $10^8$ €
1	4	6	5	7	8
2	5	5	6	8	9
3	6	9	7	9	13
4	7	10	8	10	12

Kann daraus auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 1\%$  noch an einer Unabhängigkeit der beiden Merkmale festgehalten werden? Es soll angenommen werden, dass die beiden Variablen näherungsweise zweidimensional normalverteilt sind.

### Lösung

Wir berechnen zuerst den empirischen Korrelationskoeffizienten  $r$  als Schätzwert von  $\rho$ :

$$\bar{x} = 7 \cdot 10^5, s_x = 2 \cdot 10^5, \bar{y} = 9 \cdot 10^8, s_y = 2,726 \cdot 10^8, s_{xy} = 4,857 \cdot 10^{13} \Rightarrow r = 0,891$$

Bei diesem hohen Korrelationskoeffizienten ist es bei dieser Stichprobengröße nicht mehr zu erwarten, dass seine Abweichung von null zufallsbedingt ist. Dies zeigt auch der Test.

1. *Schritt:* Hypothesen aufstellen

$$H_0: \rho = 0 \text{ gegen } H_1: \rho \neq 0$$

2. *Schritt:* Prüfgröße berechnen

Als **Prüfgröße** dient  $t_{\text{prüf}} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$  mit  $n$  als Stichprobenumfang.

Mit  $r = 0,891$  und  $n = 8$  ergibt sich als  $t_{\text{prüf}} = 4,808$ .

3. *Schritt:* Kritischen Wert ermitteln

Die Prüfgröße ist **t-verteilt** mit  $f = n - 2$  Freiheitsgraden, wie gezeigt werden kann. Die Prüfgröße  $t_{\text{prüf}}$  wird mit wachsendem  $r$  betragsmäßig größer, was die  $H_0$ -Hypothese immer unglaubwürdiger macht.

**Kritischer Wert:**  $t_{f; 1-\alpha/2}$  mit  $f = n - 2$ .

$$t_{f; 1-\alpha/2} = t_{6; 0,995} = 3,707$$

#### 4. Schritt: Entscheidung

$|t_{\text{prüf}}| > t_{f, 1-\alpha/2}$ :  $H_0$  wird zugunsten von  $H_1$  verworfen.

$|t_{\text{prüf}}| \leq t_{f, 1-\alpha/2}$ :  $H_0$  wird nicht verworfen.

Da  $|t_{\text{prüf}}| > 3,707$ , ist  $H_0$  beim Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  zu verwerfen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Werbeausgaben und die Umsätze stark korrelieren.

#### Anmerkungen:

- (1) Der Test war aufgrund der Fragestellung zweiseitig zu führen. Man kann den Test auch einseitig führen, wenn eine Abhängigkeit in einer Richtung (positive oder negative Korrelation) vermutet wird. Darauf wird nicht mehr eingegangen.
- (2) Bei kleinen Stichprobenumfängen kann es vorkommen, dass auch bei einem höheren  $|r|$ -Wert die Unabhängigkeit der Merkmale durch den Test nicht verworfen werden kann.

### Im Überblick: Lineare Korrelation

Die lineare Korrelationsanalyse untersucht, ob zwischen zwei Merkmalen ein **linearer Zusammenhang** besteht. Dabei werden die beiden Merkmale **gleichrangig** (symmetrisch) behandelt.

Um den **linearen Zusammenhang**  $\rho$  zweier Merkmale zu schätzen, bestimmt man aus einer zweidimensionalen Stichprobe einen Schätzwert, **den empirischen Korrelationskoeffizienten**  $r$ . Diese Zahl liegt zwischen  $-1$  und  $+1$ . Je näher  $r$  bei  $+1$  oder bei  $-1$  liegt, desto stärker wird der lineare Zusammenhang geschätzt.

Sind die beiden Merkmale zweidimensional normalverteilt, so ist ein **linearer Zusammenhang**  $\rho = 0$  gleichwertig mit einer **Unabhängigkeit** der Merkmale. Man kann nun mit Hilfe des empirischen Korrelationskoeffizienten  $r$  auf Unabhängigkeit der Merkmale testen.

### Aufgaben

**8.1** Gegeben ist eine zweidimensionale Stichprobe, die Werte zweier Merkmale von  $n$  Einheiten angibt. Zeichne das Streudiagramm und bestimme den empirischen Korrelationskoeffizienten.

a) (1,2), (2,1), (4,3), (5,3)

b) (0,1), (1,1), (1,2), (2,3)

c) (0,5), (1,3), (2,2), (4,0)

d) (0,5), (1,3), (2,4), (4,2), (4,1), (5,1)

e) (0,3), (1,1), (2,7), (3,6), (4,0), (5,4)

f) (0,0), (1,6), (2,8), (3,6), (4,0)

**8.2** Gibt es einen Zusammenhang zwischen Schuhgröße und Einkommen einer Person? Die folgende Aufgabe simuliert vereinfacht eine diesbezügliche Untersuchung unter Frauen (F) und Männern (M). Stelle das Streudiagramm der beiden Stichproben:

F: (0,4), (1,6), (1,3), (2,5), (2,3) sowie M: (3,6), (4,8), (4,4), (5,7), (5,5)

mit unterschiedlicher Markierung im selben Koordinatensystem dar.

(1) Bestimme nun für *jede* der beiden Stichproben den Korrelationskoeffizienten.

(2) *Vereinige* nun die beiden Stichproben zu einer einzigen Stichprobe und berechne nun den Korrelationskoeffizienten.

Getrennt ergeben sowohl die Frauen- wie auch die Männerstichprobe erwartungsgemäß keine Korrelation zwischen den erwähnten Merkmalen. Vereinigt man die Stichproben, so entsteht eine Scheinkorrelation, da Frauen im Mittel *sowohl* eine kleinere Schuhgröße *als auch* ein kleineres Einkommen als Männer haben.

- 8.3 An 10 Chargen einer bestimmten Stahlsorte wurde der Siliziumgehalt  $x$  (in %) und die Druckfestigkeit  $y$  (in  $10^9$  Pa) gemessen. Es ergab sich:

x	0,20	0,20	0,23	0,25	0,26	0,28	0,29	0,31	0,33	0,35
y	0,52	0,57	0,60	0,55	0,54	0,60	0,58	0,64	0,61	0,65

Zeichne das Streudiagramm und berechne Korrelationskoeffizienten der Stichprobe.

- 8.4 Die folgende Tabelle gibt für eine Anzahl von PKWs die Masse  $x$  (in Tonnen) und die zugehörige festgestellte Fahrtstrecke  $y$  (in km) pro 1 Liter Benzin auf der Autobahn an:

x	1,5	1,8	1,4	2,2	1,3	1,7	1,5	1,7	1,4	1,2
y	13	11	12	10	13	12	11	12	12	14

- a) Bestimme den Korrelationskoeffizienten. Wie lautet das Ergebnis, wenn  $x$  in kg angegeben wäre?
- b) Teste bei  $\alpha = 1\%$  auf Unabhängigkeit zwischen  $x$  und  $y$ .
- 8.5 Um Wolle zu verstärken, wird ihr die Menge  $x$  (in g/kg) einer synthetischen Faser zugesetzt und zu Garn versponnen. Man misst nun die Reisskraft  $y$  (in N) des Garns und erhält in Abhängigkeit von  $x$  folgende Werte:

x	10	10	20	20	30	30	40	40
y	2,2	2,4	2,3	2,6	2,4	2,7	2,8	3,1

- a) Zeichne das Streudiagramm und berechne Korrelationskoeffizienten der Stichprobe.
- b) Teste bei  $\alpha = 1\%$  auf Unabhängigkeit zwischen  $x$  und  $y$ .
- 8.6 In einem Fichtenwald wurden 10 Bäume zufällig ausgewählt und ihr Stammdurchmesser  $x$  (in cm) in Brusthöhe und ihre Höhe  $y$  (in m) gemessen:

x	28	20	27	25	33	25	29	31	23	29
y	23,6	20,1	24,1	22,1	29,1	21,5	25,8	27,0	18,4	25,3

- a) Bestimme den Korrelationskoeffizienten.
- b) Teste bei  $\alpha = 1\%$  auf Unabhängigkeit zwischen Stammdurchmesser und Baumhöhe.
- 8.7 Genügt eine zweidimensional normalverteilte Stichprobe zweier Merkmale  $x$  und  $y$  des Umfangs  $n = 6$  mit  $r = 0,5$ , um die Unabhängigkeit der Merkmale bei  $\alpha = 5\%$  zu verwerfen? Wenn nicht, wie groß müsste  $n$  bei  $r = 0,5$  sein?

## 8.2 Lineare Regression

Aufgabe der Korrelationsrechnung ist es, das Ausmaß der linearen Abhängigkeit zwischen zwei als gleichrangig angesehenen Merkmalen  $x$  und  $y$  anzugeben. Dagegen versucht man in der Regressionsrechnung (auch Regressionsanalyse genannt) die Abhängigkeit einer Größe  $y$  von einer Größe  $x$  anzugeben. Man nennt  $y$  die **Zielgröße** und  $x$  die **Einflussgröße**. Die Größe  $y$  ist eine Zufallsgröße, während  $x$  nun als fest vorgegeben betrachtet wird.

Wir nehmen also an, dass für ein festgehaltenes  $x$  die  $y$ -Werte noch in einem gewissen Ausmaß streuen. Sie sind durch die Angabe des  $x$ -Wertes nicht festgelegt, zu einem festen  $x$ -Wert können bei mehreren Beobachtungen (Messungen) unterschiedliche  $y$ -Werte auftreten. So treten etwa zu einer bestimmten Körpergröße  $x$  unterschiedliche Körpergewichte  $y$  auf. Oder beim zweimaligen Messen eines elektrischen Widerstandes  $R$  bei einer bestimmten Temperatur kann es aufgrund von zufallsbedingten Messfehlern ebenfalls zu unterschiedlichen Werten kommen.

In der *einfachen* Regressionsanalyse versucht man den **durchschnittlichen Einfluss einer Einflussgröße  $x$  auf  $y$**  zu erfassen:  $y = f(x)$ . Die Funktion  $f$  heißt **Regressionsfunktion**. Ist diese Funktion linear, so ist spricht man von einer **linearen Regression**. In diesem Fall gilt also:  $y = \alpha + \beta \cdot x$ .

Diese Schreibweise einer linearen Funktion wird in der Regressionsrechnung der sonst vielfach üblichen Schreibweise  $y = k \cdot x + d$  vorgezogen.

Der Parameter  $\beta$  heißt **Regressionskoeffizient**, der Parameter  $\alpha$  **Regressionskonstante**. In der linearen Regression setzt man ferner voraus, dass die zu einem beliebigen, aber festen Wert  $x$  auftretenden  $y$ -Werte normalverteilt sind mit einer von  $x$  unabhängigen Standardabweichung  $\sigma$ . Die Regressionsgerade  $y = \alpha + \beta \cdot x$  gibt den **Mittelwert** (Erwartungswert) der Zielgröße  $y$  für den Wert  $x$  der Einflussgröße an. (Abb. 8.6)

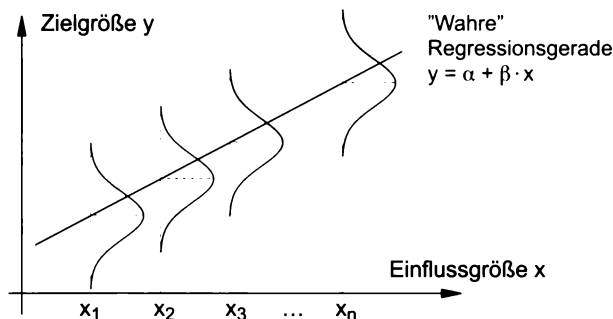


Abb. 8.6 Regressionsgerade der Grundgesamtheit

Der Begriff "Regression" stammt von GALTON<sup>22</sup>, der ihn 1889 einführte. GALTON machte die Beobachtung, dass große Väter auch große Söhne haben, aber so, dass diese Söhne kleiner als ihre Väter sind. Es liegt also gewissermaßen ein Rückschritt (= Regress) zur Durchschnittsgröße vor. Dieses sehr spezielle Beispiel war namensgebend für ein Teilgebiet der Statistik.

Ähnlich wie die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  der Normalverteilung sind auch die unbekannt Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  mit Hilfe einer Stichprobe  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  zu **schätzen**. Auf diese Weise erhält man die (**empirische**) **Regressionsgerade**, die in der Form  $y(x) = a + b \cdot x$  angesetzt wird:  $a$  schätzt  $\alpha$  und  $b$  schätzt  $\beta$ .

$y(x) = a + b \cdot x$  ist der aus der Stichprobe gewonnene Schätzwert für den mittleren Wert (Erwartungswert) der Zielgröße an einer vorgegebenen Stelle  $x$ . Häufig schreibt man daher  $\hat{y}$  statt  $y$ . Beispielsweise ist  $a + b \cdot x_3$  Schätzwert für das Zielgrößenmittel  $\alpha + \beta \cdot x_3$  an der Stelle  $x_3$ .

<sup>22</sup> Francis GALTON (1822 – 1911), britischer Naturforscher

Würde man die Zielgröße ein zweites Mal an den Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  messen, so werden die Werte  $y_1, y_2, \dots, y_n$  im Allgemeinen etwas verschieden von den früheren Werten sein. Dies bedeutet in der Folge, dass sich auch die (empirische) Regressionsgerade etwas ändern wird.

Die Schätzung erfolgt so, dass die Gerade  $y(x) = a + b \cdot x$  einen möglichst guten "Ausgleich" der durch die Stichprobe gegebenen Punktwolke ergibt. Daher spricht man auch von **Ausgleichsrechnung** und bezeichnet die empirische Regressionsgerade auch als **Ausgleichsgerade**.

$y_i - y(x_i)$  ist die Differenz zwischen dem an der Stelle  $x_i$  beobachteten Wert  $y_i$  und dem Schätzwert für den dortigen mittleren Wert. Als Anpassungskriterium der empirischen Regressionsgerade an die Punkte  $P_i(x_i/y_i)$  verlangen wir, dass die **Summe dieser quadrierten Differenzen  $[y_i - y(x_i)]^2$  minimal** ist. Dies ist aber gerade die aus der Mathematik bekannte **Methode der (Summe der) kleinsten Quadrate** (Abb. 8.7). In der Folge erhält man das lineare Gleichungssystem für  $a$  und  $b$  (siehe "Ingenieur-Mathematik 3", Seite 320f):

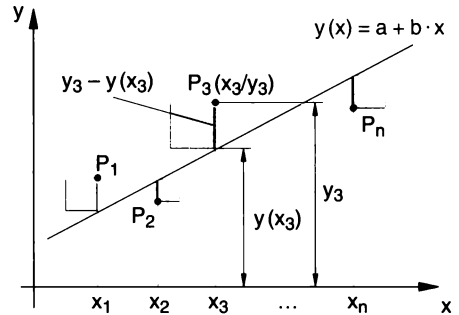


Abb. 8.7 Empirische Regressionsgerade

$$b \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man nach Umformungen unter Verwendung der Mittelwerte  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$ , der Standardabweichungen  $s_x$  und  $s_y$  der beobachteten Werte  $x_i$  und  $y_i$  sowie des empirischen Korrelationskoeffizienten  $r$  (Seite 320):

**Empirische Regressionsfunktion (-gerade)  $y(x) = a + b \cdot x$**

Gegeben ist die Stichprobe:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Dann gilt:

$$\hat{\beta} = b = r \cdot \frac{s_y}{s_x} \quad (\text{empirischer Regressionskoeffizient})$$

$$\hat{\alpha} = a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \quad (\text{empirische Regressionskonstante}).$$

Man kann zeigen:

(1) Die empirische Regressionsgerade liegt so, dass sie die Summe der Differenzen  $y_i - y(x_i)$  zu null ausgleicht, d.h.  $\sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)] = 0$

(2) Die empirische Regressionsgerade geht durch den "Schwerpunkt"  $S(\bar{x}/\bar{y})$  der Punktwolke.

Zeichnet man die Regressionsgerade, so bekommt man eine Vorstellung, wie gut diese den vorhandenen Daten angepasst ist. Die Punkte sollten nur zufällig um die Gerade streuen, es darf keine systematische Abweichung erkennbar sein. Dies wäre beispielsweise der Fall, wenn das Streudiagramm einen "gekrümmten" Eindruck gibt. In diesem Fall ist das Modell der Anpassung durch eine Gerade in Zweifel zu ziehen und etwa an eine quadratische Regressionsfunktion (Regressionsparabel) oder dergleichen zu denken ("nichtlineare Regression").

Wir betrachten nun die Differenz des an der Stelle  $x_i$  beobachteten Wertes  $y_i$  auf den Mittelwert  $\bar{y}$ , also  $y_i - \bar{y}$  (Abb. 8.8). Von dieser Differenz ist der Anteil  $y(x_i) - \bar{y}$  gewissermaßen durch die lineare Regression "erklärt".

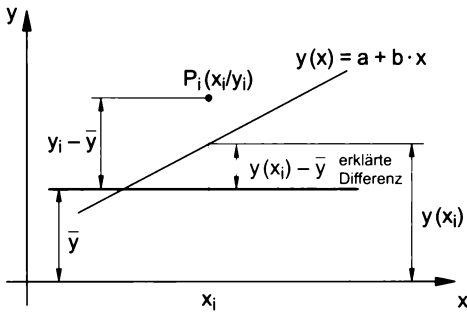


Abb. 8.8 Bestimmtheitsmaß B

Bildet man nun das Verhältnis der Summe der quadrierten Differenzen  $[y(x_i) - \bar{y}]^2$  zur Summe der quadrierten Differenzen  $(y_i - \bar{y})^2$  für alle Einheiten der Stichprobe, so erhält man ein Maß für die *Güte der Anpassung* der Regressionsgerade an die beobachteten Werte. Es wird als (empirisches) Bestimmtheitsmaß  $B$  bezeichnet.

$$\text{Bestimmtheitsmaß } B = \frac{\sum_{i=1}^n [y(x_i) - \bar{y}]^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Im Nenner steht ein Maß für die gesamte, im Zähler für die durch die lineare Regression erklärte Unterschiedlichkeit der Zielgröße. Liegen alle Punkte auf der empirischen Regressionsgerade, so ist dieses Verhältnis gleich 1, da alle beobachteten Werte  $y_i$  mit den Werten  $y(x_i)$  übereinstimmen. Damit erklärt sich auch der Name "Bestimmtheitsmaß". Es gibt einen Schätzwert an, wie viel Prozent der Unterschiedlichkeit der Zielgröße durch das Modell der linearen Regression erklärt werden kann.

Zwischen dem Bestimmtheitsmaß  $B$  und dem Korrelationskoeffizienten  $r$  kann der einfache Zusammenhang  $B = r^2$  hergeleitet werden. Dies gibt zu erkennen, dass  $r$  ein Maß für den linearen Zusammenhang zweier Merkmale  $x$  und  $y$  ist.

Das Bestimmtheitsmaß wird auch mit  $R^2$  bezeichnet.

### Beispiel 8.7 : Grundsätzliches Beispiel

Zu den Werten  $x_i$  einer Größe  $x$  wurden die Werte  $y_i$  der Größe  $y$  an 4 Einheiten gemessen. Es ergaben sich folgende Paare: (1,1), (2,3), (4,3) und (6,5).

Nimm eine lineare Abhängigkeit der Größe  $y$  von der Größe  $x$  an und gib eine Vorhersage, wie groß  $y$  (im Mittel) für  $x = 2,5$  ist.

#### Lösung

Aus  $\sum x_i = 13$ ,  $\sum y_i = 12$ ,  $\sum x_i^2 = 57$ ,  $\sum y_i^2 = 44$ ,

$\sum x_i \cdot y_i = 49$  ergibt sich:

$\bar{x} = 3,25$ ;  $\bar{y} = 3$ ;  $s_x = 2,217$ ;  $s_y = 1,633$ ;

$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot (\sum x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}) = 3,333$ ;

$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0,921$ ;

$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0,678$ ;  $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 0,797$ .

Damit lautet die Gleichung der Regressionsgeraden:  $y(x) = 0,797 + 0,678 \cdot x$ . Schätzwert an der Stelle  $x = 2,5$ :  $y(2,5) = 0,797 + 0,678 \cdot 2,5 = 2,49$ .

Abb. 8.9 zeigt das Streudiagramm und die Regressionsgerade. Da  $r^2 = 0,847$ , wird etwa 85% der Unterschiedlichkeit der  $y_i$ -Werte durch die lineare Regression erklärt, der Rest bleibt dadurch unerklärt.

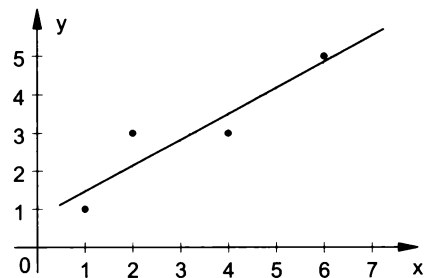


Abb. 8.9

Zuletzt werden noch für einen festen Wert  $x_0$  der Vertrauensbereich für den Mittelwert  $\mu_0 = \alpha \cdot x_0 + \beta$  der Zielgröße<sup>23</sup> sowie der Vorhersagebereich für einen Einzelwert  $y$  angegeben:

Ist  $y(x) = a \cdot x + b$  die Gleichung der empirischen Regressionsgerade,  $f = n - 2$ ,  
 $s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2}$  und  $s_x^2$  die Varianz der  $x$ -Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so gilt:

**(1 -  $\alpha$ )-Vertrauensbereich für den Mittelwert  $\mu_0$  der Zielgröße an einer Stelle  $x_0$ :**

$$y(x_0) - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}} \leq \mu_0 \leq y(x_0) + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}}$$

**(1 -  $\alpha$ )-Vorhersagebereich für einen Einzelwert  $y$  der Zielgröße für einen zukünftigen Wert:**

$$y(x_0) - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}} \leq \mu_0 \leq y(x_0) + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}}$$

Zu beachten ist, dass der Vertrauensbereich ein Intervall für den *Mittelwert*, der Vorhersagebereich ein Intervall für einen *Einzelwert* der Zielgröße ist. Das Intervall des Vorhersagebereiches ist daher bei gleichem  $1 - \alpha$  an einer bestimmten Stelle auch größer als jenes des Vertrauensbereiches für den Mittelwert.

Ferner ist zu beachten, dass beide Berechnungen nur möglich sind, wenn der Wert  $x_0$  "zwischen" den untersuchten Werte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  liegt. Berechnungen dieser Art außerhalb der untersuchten Werte sind äußerst problematisch.

### Beispiel 8.8 : Vertrauensbereich für das Zielgrößenmittel sowie Vorhersagebereich

Zum Beispiel 8.1, Seite 318, ist für  $x_0 = 172$  cm beim Vertrauensniveau 95%

- der Vertrauensbereich für den Mittelwert des Körpergewichtes,
- der Vorhersagebereich für ein Körpergewicht zu bestimmen.

#### Lösung

Zu a) Mit Hilfe der Ergebnisse des Beispiels 8.4, Seite 320, ergeben sich der Regressionskoeffizient  $b$  und die Regressionskonstante  $a$ :

$$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0,894 \cdot \frac{5,924}{5,633} = 0,941 \cdot a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 71,19 - 0,941 \cdot 170,44 = -89,13.$$

Empirische Regressionsgerade:  $y(x) = -89,13 + 0,941 \cdot x$ .

$y(x_0) = 0,941 \cdot 172 - 89,1 = 72,7$  kg ist Schätzwert für das mittlere Körpergewicht bei einer Körpergröße von 172 cm.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2} = \sqrt{\frac{1}{14} \cdot 105,3} = 2,743 \text{ kg.}$$

<sup>23</sup> Der Regressionskoeffizient  $\alpha$  darf nicht mit der Größe  $\alpha$  im Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  verwechselt werden.

$$\sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}} = \sqrt{1 + \frac{(172 - 170,44)^2}{15 \cdot 5,633^2}} = 0,260; \quad t_{14;0,975} = 2,145 \quad (\text{Tab. 2})$$

$$72,66 - 2,145 \cdot 2,743 \cdot 0,260 \leq \mu_0 \leq 72,66 + 2,145 \cdot 2,743 \cdot 0,260 \text{ oder}$$

$$71,1 \text{ kg} \leq \mu_0 \leq 74,2 \text{ kg.}$$

Das Intervall [71,2 kg; 74,2 kg] enthält mit einer Wahrscheinlichkeit 95 % das mittlere Körpergewicht, wenn die Körpergröße  $x_0 = 172$  cm ist.

$$\text{Zu b) } \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{16} + \frac{(172 - 170,44)^2}{15 \cdot 5,633^2}} = 1,033$$

$$72,66 - 2,145 \cdot 2,743 \cdot 1,033 \leq y(x_0) \leq 72,66 + 2,145 \cdot 2,743 \cdot 1,033 \text{ oder}$$

$$66,6 \text{ kg} \leq y(x_0) \leq 78,7 \text{ kg.}$$

Steigt eine Person mit einer Körpergröße von 172 cm auf die Waage, so wird ihr Körpergewicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % vom Intervall [66,6 kg; 78,8 kg] eingeschlossen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plots	List	Calc	Distr	Tests	Ints
grew	gew				1:ZInterval...	
171	75				2:IInterval...	
163	62				3:2-SampZInt...	
172	69				4:1-SampZInt...	
179	82				5:1-PropZInt...	
176	74				6:2-PropZInt...	
164	63				7:LinRegTInt...	
170	72				8:MultRegInt...	
174	74					
gro=<171,163,172,179,176,164,...						
STATVARS		RAD AUTO		FUNC 1/2		

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plots	List	Calc	Distr	Tests	Ints
Linear Regression T Interval						
grew	X List:		grew			
171	Y List:		gew			
163	Freq:		1			
172	Store RegEqn to:		none			
179	Interval:		Response			
176	X Value:		172			
164						
170						
174						
gro=<171,163,172,179,176,164,...						
TYPE • ENTER=OK AND ESC=CANCEL						

Lösung mit Hilfe der Flash-Applikation Statistik:

**1** (1:Flash Apps...) . Danach Eingabe der Körpergrößen und Körpergewichte wie gezeigt.

**7** (7:LinRegTInt); Ausfüllen des Dialogfensters wie gezeigt, unter X Value ist noch der C-Level: 0,95 anzugeben. Nach erhält man den Schätzwert  $\hat{y} = 72,66$  sowie den Vertrauensbereich C Int (= confidence interval) und den Vorhersagebereich Pred Int (= prediction interval).

## Im Überblick: Lineare Regression

Die (einfache) **Regressionsanalyse** ist ein statistisches Verfahren zur Untersuchung der Abhängigkeit einer quantitativen Zielgröße  $y$  von einer quantitativen Einflussgröße  $x$  (Unterschied zur Varianzanalyse:  $x$  kommt nur auf gewissen Stufen vor, ist also qualitativ). Bei der **linearen Regressionsanalyse** nimmt man an, dass die Zielgröße  $y$  im Mittel linear von der Einflussgröße abhängt.

Die Werte der Einflussgröße  $x$  werden vorgegeben:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Zu diesen Werten beobachtet man die Werte  $y_i$  der Zielgröße  $y$ . Davon ausgehend wird mit der **empirischen Regressionsfunktion**  $y = a \cdot x + b$  der **durchschnittliche** lineare Einfluss von  $x$  auf  $y$  geschätzt.

Mit Hilfe dieses Schätzwertes kann für einen festen Wert  $x_0$  der Einflussgröße bei einem Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  der Vertrauensbereich für den dort vorliegenden Mittelwert der Zielgröße sowie der Vorhersagebereich für einen Einzelwert angegeben werden.



#### Aufgaben

- 8.8** Ermittle die Gleichung der Regressionsgerade für die Daten der
- a) Aufgabe 8.4                                b) Aufgabe 8.5  
auf Seite 326 und zeichne die Gerade in das Streudiagramm.
- 8.9** In Aufgabe 8.6 auf Seite 326 wurde der Stammdurchmesser  $x$  sowie die Höhe  $y$  von 10 Fichten gemessen.
- a) Ermittle die Regressionsgerade.  
b) Ermittle die Breite des 95%-Vertrauensbereiches für die mittlere Höhe bei  $x_0 = 27$  cm und  $x_0 = 33$  cm (Mitte und Rand des untersuchten Bereiches).
- 8.10** Die folgende Tabelle zeigt die Leistung  $x$  (in kW) und die Höchstgeschwindigkeit  $y$  (in km/h) an 10 zufällig ausgewählten Mittelklassenautos:

x	83	72	64	84	75	80	76	88	69	77
y	190	180	178	196	187	193	184	198	183	190

- a) Zeichne das Streudiagramm und ermittle die Regressionsgerade.  
b) Ermittle den 95%-Vertrauensbereich für die mittlere Höchstgeschwindigkeit bei einer Leistung von  $x_0 = 77$  kW (nahe  $\bar{x}$ ) sowie von  $x_0 = 87$  kW (nahe  $x_{\max} = 88$  kW).  
c) Ermittle den 95 %-Vorhersagebereich für die Höchstgeschwindigkeit eines Mittelklasseautos bei einer Leistung von  $x_0 = 77$  kW (nahe  $\bar{x}$ ) sowie von  $x_0 = 87$  kW (nahe  $x_{\max} = 88$  kW).
- 8.11** An 10 Chargen einer bestimmten Stahlsorte wurde der Siliziumgehalt  $x$  (in %) und die Druckfestigkeit  $y$  (in  $10^9$  Pa) gemessen. Es ergab sich:

x	0,20	0,20	0,23	0,25	0,26	0,28	0,29	0,31	0,33	0,35
y	0,52	0,57	0,60	0,55	0,54	0,60	0,58	0,64	0,61	0,65

- a) Zeichne das Streudiagramm und ermittle die Regressionsgerade.  
b) Ermittle den 95 %-Vertrauensbereich für die mittlere Druckfestigkeit bei einem Siliziumgehalt  $x_0 = 0,28$ .
- 8.12** Zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten  $\alpha$  eines Drahtes ( $R = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot \vartheta$ ) wird sein OHM'scher Widerstand  $R$  bei verschiedenen Temperaturen gemessen:

$\vartheta$	20	30	40	50	60	70
$R$	42,9	44,9	45,9	48,0	49,0	50,5

Zeichne das Streudiagramm und ermittle die Regressionsgerade  $R = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot \vartheta$ . Bestimme daraus den Temperaturkoeffizienten  $\alpha$ .

- 8.13** An 20 PKWs wurde der Benzinverbrauch  $y$  (in Liter) pro 100 km und der Hubraum  $x$  (in  $\text{cm}^3$ ) wie folgt festgestellt:

x	1571	3385	2802	1960	2445	2526	2186	2931	1846	3451
y	8,8	11,0	9,4	8,4	9,0	10,2	9,1	9,6	8,6	11,4

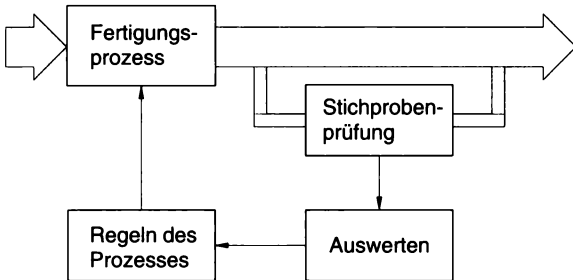
x	2478	1457	1927	1296	2575	1571	2931	2802	1976	2802
y	9,7	8,1	8,8	9,5	10,4	9,1	10,6	9,7	9,4	9,9

- a) Zeichne das Streudiagramm und ermittle die Regressionsgerade.  
b) Ermittle den 95 %-Vertrauensbereich für den mittleren Benzinverbrauch bei einem Hubraum von  $x_0 = 2400$   $\text{cm}^3$  (nahe  $\bar{x}$ ).

## 9 Statistische Methoden des Qualitätsmanagements

### 9.1 Qualitätsregelkarten

Bei einem modernen Qualitätsmanagement steht nicht das fertige Produkt als Ergebnis eines Prozesses im Vordergrund, sondern der Prozess selbst. Im Sinne einer fehlervermeidenden Einstellung ist daher ein laufender Fertigungsprozess so zu *lenken*, dass ständig den Qualitätsforderungen entsprechende Produkte erzeugt werden. Eine solche Prozesslenkung kann auf Grund einer kontinuierlichen 100%-Prüfung oder auf Grund einer periodisch vorgenommenen Stichprobenprüfung erfolgen.



Im letzteren Fall spricht man von einer **statistischen Prozessregelung (SPC, Statistical Process Control)**. Auf Prozessdaten beruhend dient sie der Überwachung *während* der Serienproduktion. Das Grundprinzip der SPC zeigt Abb. 9.1, das den Fertigungsprozess als Teil eines Regelkreises betrachtet.

Abb. 9.1 Statistische Prozessregelung

**Qualitätsregelkarten** sind ein wichtiges Instrument bei der ständigen Überwachung eines Prozesses. Mit ihrer Hilfe versucht man Störungen, d.h. unerwünschte Entwicklungen, möglichst kurz nach ihrem Auftreten zu erkennen. Eine Qualitätsregelkarte stellt das zeitliche Verhalten eines Prozessmerkmals (z.B. die Lage  $\mu$  eines Abfüllgewichtes) basierend auf Stichprobendaten bildhaft dar. Die dabei verwendeten Stichproben werden in regelmäßigen zeitlichen Abständen (je nach Situation etwa in Stundenabständen) dem Prozess entnommen und haben stets den gleichen Umfang.

Äußerlich ist die Qualitätsregelkarte ein Formblatt, wobei allerdings die Darstellung häufig rechnergestützt auf einem Monitor erfolgt; auf der x-Achse werden die Zeitpunkte der Stichprobenentnahme oder die Stichprobennummern, auf der y-Achse beispielsweise die Mittelwerte  $\bar{x}$  der Stichproben aufgetragen. Mit dieser so genannten Mittelwertkarte oder  $\bar{x}$ -Karte wird die Lage  $\mu$  eines normalverteilten Merkmals überwacht.

Auf der Karte ist noch eine Mittellinie  $M$  sowie eine obere und untere **„Eingriffsgrenze“** (OEG = obere Eingriffsgrenze, UEG = untere Eingriffsgrenze) eingezeichnet. Die Eingriffsgrenzen markieren die Glaubwürdigkeitsgrenzen für den ungestörten Prozess. Man setzt sie so fest, dass darin langfristig 99% aller Mittelwerte  $\bar{x}$  liegen. Ein  $\bar{x}$ -Wert außerhalb der Eingriffsgrenzen wird nicht mehr auf die natürliche Streuung des ungestörten Prozesses zurückgeführt, sondern auf eine durch Verschiebung der Lage  $\mu$  hervorgerufene Störung. Es kommt zum **„Eingriff“**, man sucht die Ursache der (sehr wahrscheinlichen) Störung.

Zusätzlich können auf der Qualitätsregelkarte noch **Warn Grenzen** (OWG = obere Warn Grenze, UWG = untere Warn Grenze) eingezeichnet sein, zwischen denen langfristig 95% aller Mittelwerte liegen, wenn der Prozess ungestört ist. Zur Verdeutlichung werden die eingezeichneten Punkte durch einen Streckenzug verbunden.

Meist wird parallel auch die Merkmalsstreuung (Parameter  $\sigma$  eines normalverteilten Merkmals) in einer weiteren Karte mitüberwacht. Dies kann beispielsweise mit Hilfe der s-Karte erfolgen, worauf nicht mehr eingegangen wird.

Wie die  $\bar{x}$ - und die s-Qualitätsregelkarte die Aufgabe haben, anzuzeigen, ob sich  $\mu$  oder  $\sigma$  verändert haben, gibt es Qualitätsregelkarten zur Überwachung der Ausschussrate p oder der mittleren Anzahl  $\mu$  von Fehlern pro Einheit. Darüber hinaus gibt es auch noch Qualitätsregelkarten zur Überwachung, ob ein Prozess hinsichtlich eines Merkmals vorgegebene Grenzwerte einhält.

Im Folgenden wird auf die  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte zur Überwachung der Lage eines normalverteilten Merkmals eingegangen. Dabei wird angenommen, dass die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  aus "Vorläufen" ausreichend gut geschätzt wurden.

**Beispiel 9.1 : Anlegen einer  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte**

Bei der Fertigung von Bildröhren soll der Kathodenstrom überwacht werden. Bei ungestörter Fertigung ist der Kathodenstrom normalverteilt mit  $\mu = 25,00$  mA und  $\sigma = 1,00$  mA. Es soll eine  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte zur Überwachung des Mittelwertes (Erwartungswertes)  $\mu$  für Stichproben des Umfangs  $n = 5$  angelegt werden.

**Lösung**

Die Eingriffsgrenzen OEG und UEG sind die Randwerte jenes symmetrisch um  $\mu$  gelegenen Intervalls, in das der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  im ungestörten Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha = 99\%$  fällt.  $\bar{x}$  liegt daher mit der Wahrscheinlichkeit 0,5% unter UEG und mit der Wahrscheinlichkeit 99,5% über OEG. Da die Mittelwerte von Stichproben gleichen Umfangs  $n$  normalverteilt sind mit den Parametern  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  (Seite 266), gilt:

$$G(OEG; \mu_{\bar{x}}; \sigma_{\bar{x}}) = G\left(\frac{OEG - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 0,995 \Rightarrow \frac{OEG - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = u_{0,995} = 2,576.$$

Daraus ergibt sich mit  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ :  $OEG = \mu + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Aus Symmetriegründen ist  $UEG = \mu - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Für die Berechnung der Warngrenzen OWG und UWG braucht nur  $1 - \alpha = 95\%$  gesetzt werden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha = 95\%$  liegt  $\bar{x}$  im ungestörten Fall zwischen den Warngrenzen. Wegen  $u_{0,975} = 1,960$  erhält man analog:

$OWG = \mu + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  und  $UWG = \mu - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Setzt man noch für die Mittellinie  $M = \mu$ , so gilt:

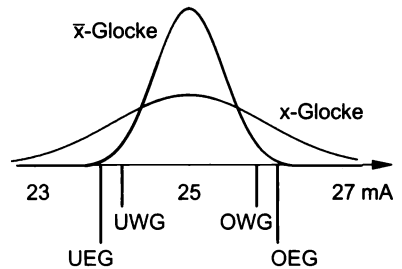


Abb. 9.2 Lage im ungestörten Fall

**Anlegen einer  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte:**

**Eingriffsgrenzen:**  $UEG = \mu - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ;  $OEG = \mu + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Warngrenzen:**  $UWG = \mu - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ;  $OWG = \mu + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Mittellinie:**  $M = \mu$

Setzt man die vorgegebenen Werte für  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $n$  ein, so erhält man:

$\bar{x}$ -Karte:

OEG = 26,15 mA  
 OWG = 25,88 mA  
 M = 25,00 mA  
 UWG = 24,12 mA  
 UEG = 23,85 mA

Abb. 9.3 zeigt die  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte, in der auch bereits Mittelwerte aus laufend entnommenen Stichproben eingezeichnet sind.

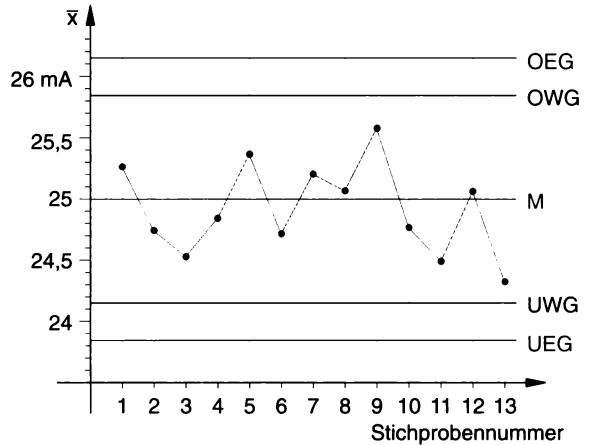


Abb. 9.3  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte

### Beurteilung des Prozesses:

- (1) Liegt  $\bar{x}$  innerhalb der Warngrenzen, so wird das Einhalten der Fertigungslage  $\mu$  angenommen.
- (2) *Eingriff*, wenn  $\bar{x}$  außerhalb der Eingriffsgrenzen liegt.
- (3) Im dritten noch möglichen Fall liegt  $\bar{x}$  außerhalb der Warngrenzen, aber noch innerhalb der Eingriffsgrenzen. Dies bedeutet eine *Warnung*, erhöhte Aufmerksamkeit ist angebracht. Dies kann sich in der sofortigen Entnahme einer weiteren Stichprobe äußern.

Das Führen einer Qualitätsregelkarte bedeutet nichts anderes als die **periodische Durchführung** eines **statistischen Tests**. Im Beispiel 9.1 lauten die Hypothesen:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

Es liegt ein zweiseitiger u-Test wie in Beispiel 7.11, Seite 288, vor. Der Unterschied ist nur äußerlich: Jetzt ist  $\bar{x}$  die Prüfgröße und UEG bzw. OEG ist der kritische Wert. Der Test erfolgt dementsprechend auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ . Die beiden möglichen Fehlentscheidungen sind:

- (1) Fehler 1. Art: Obwohl der Prozess ungestört ist, kommt es zu einem Überschreiten der Eingriffsgrenzen; dies bedeutet einen *blinden Alarm*, der mit Wahrscheinlichkeit 1% erfolgt.
- (2) Fehler 2. Art: Der Prozess ist gestört, es kommt aber zu keinem Überschreiten der Eingriffsgrenzen. Daher wird nicht auf "Eingriff" beurteilt. Man spricht von einem *unterlassenen Alarm*.

### Störung des Prozesses: $\mu \rightarrow \mu^*$

Die Fertigungslage verändere sich von  $\mu$  auf  $\mu^*$  ( $\sigma$  wird als gleichbleibend angenommen). Wie wahrscheinlich zeigt dies eine Stichprobe des Umfangs  $n$  an? Diese Wahrscheinlichkeit wird als **Eingriffswahrscheinlichkeit** bezeichnet.

Beim Führen einer  $\bar{x}$ -Karte erfolgt ein Eingriff, wenn  $\bar{x}$  außerhalb der Eingriffsgrenzen liegt. Bezeichnet man mit  $P_a$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $\bar{x}$  innerhalb der Eingriffsgrenzen bei einer auf  $\mu^*$  veränderten Fertigungslage ist, so gilt:

$$P_a = P(\text{UEG} \leq \bar{x} \leq \text{OEG}) = G\left(\frac{\text{OEG} - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - G\left(\frac{\text{UEG} - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

1 - P<sub>a</sub> ist die Eingriffswahrscheinlichkeit. Daher:

**Eingriffswahrscheinlichkeit 1 - P<sub>a</sub> für eine  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte bei Störung**

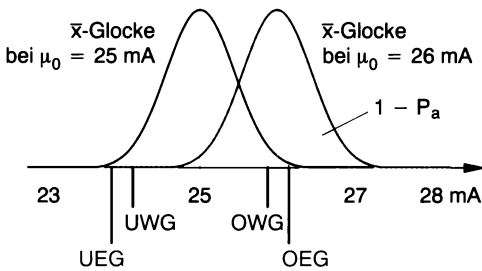
$\mu \rightarrow \mu^*$  ( $\sigma$  konstant):  $1 - P_a = 1 - \left[ G\left(\frac{OEG - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - G\left(\frac{UEG - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \right]$ .

**Beispiel 9.2 : Eingriffswahrscheinlichkeit bei Störung  $\mu \rightarrow \mu^*$**

Berechne die Eingriffswahrscheinlichkeit einer Mittelwertkarte angelegt nach Beispiel 9.1, wenn sich  $\mu$  (bei gleichbleibender Streuung) auf

- a)  $\mu^* = \mu + \sigma = 25,00 \text{ mA} + 1,00 \text{ mA} = 26,00 \text{ mA}$ ,
- b)  $\mu^* = \mu + 2\sigma = 25,00 \text{ mA} + 2,00 \text{ mA} = 27,00 \text{ mA}$  vergrößert.

**Lösung**



OEG = 26,15 mA; UEG = 23,85 mA.

Abb. 9.4 Eingriffswahrscheinlichkeit bei der  $\bar{x}$ -Karte

Zu a)  $1 - P_a = 1 - \left[ G\left(\frac{26,15 - 26,00}{1/\sqrt{5}}\right) - G\left(\frac{23,85 - 26,00}{1/\sqrt{5}}\right) \right] =$   
 $= 1 - [G(0,34) - G(-4,81)] \approx 0,37 = 37\%$

Zu b)  $1 - P_a = 1 - \left[ G\left(\frac{26,15 - 27,00}{1/\sqrt{5}}\right) - G\left(\frac{23,85 - 27,00}{1/\sqrt{5}}\right) \right] =$   
 $= 1 - [G(-1,90) - G(-7,05)] \approx 0,97 = 97\%$

**Im Überblick: Qualitätsregelkarten**

Mit Hilfe von **Qualitätsregelkarten** erfolgt eine stichprobenweise ständige Überwachung eines Prozesses hinsichtlich eines Produktmerkmals: Man entnimmt in regelmäßigen Zeitabständen Stichproben gleichen Umfangs zur Prozessbeurteilung. Dazu muss man zwischen der unvermeidbaren **natürlichen Streuung** und der auf einer Prozessstörung beruhenden **systematischen Abweichung** unterscheiden. Dies erfolgt durch Angabe von **Eingriffsgrenzen**. Überschreitet die Prüfgröße (etwa das Stichprobenmittel bei der Überwachung der Lage  $\mu$  bei einem normalverteilten Merkmal) diese Grenzen, so ist "einzugreifen".

## Aufgaben

- 9.1** Simuliere rechnergestützt das Führen einer nach Beispiel 9.1, Seite 334, angelegten  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte. Verwende dazu Stichproben von normalverteilten Zufallszahlen des Umfangs  $n = 5$  (TI-92/89, MS Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...) und trage die Mittelwerte in die Karte ein. Verwende dazu
- $\mu_0 = 25$  und  $\sigma = 1$ , d.h. der Prozess ist ungestört.
  - $\mu^* = 26$ ,  $\sigma = 1$ , d.h. die Prozesslage  $\mu$  hat sich verschoben. Wie lange dauert es, bis die Karte "anzeigt"?
- 9.2** In Beispiel 9.2, Seite 336, wurde für eine Verschiebung des Mittelwertes  $\mu$  um  $\sigma$  die Eingriffswahrscheinlichkeit bei Verwendung von Stichproben des Umfangs  $n = 5$  berechnet. Wie groß ist diese Eingriffswahrscheinlichkeit, wenn eine  $\bar{x}$ -Karte angelegt und geführt würde für
- $n = 3$
  - $n = 10$ ?
- 9.3** Ein Längenmaß eines in großer Anzahl produzierten Bauteils ist normalverteilt mit dem Mittelwert  $\mu = 40,00$  mm und der Standardabweichung 0,05 mm. Zur Überwachung dieses Maßes wird eine Mittelwert-Qualitätsregelkarte ( $\bar{x}$ -Karte) für einen Stichprobenumfang  $n = 7$  geführt.
- Lege die Qualitätsregelkarte an.
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Vergrößerung des Mittelwertes auf  $\mu^* = 40,05$  mm angezeigt?
  - Man möchte eine Vergrößerung des Mittelwertes auf  $\mu^* = 40,05$  mm mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% bei der nächsten Stichprobe angezeigt wissen. Wie groß muss der Stichprobenumfang sein?
- 9.4** Die Stärke einer galvanisch aufgetragenen Schutzschicht gegen Korrosion wird durch eine  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte für  $n = 5$  überwacht. Die Schichtstärke kann zur Zeit als normalverteilt mit  $\mu = 90,0$   $\mu\text{m}$  und  $\sigma = 3,2$   $\mu\text{m}$  angenommen werden.
- Ermittle die Grenzen der genannten Qualitätsregelkarte.
  - Wie ist zu urteilen, wenn als nächste Stichprobe eine der drei folgenden auftreten würde:  
 Stichprobe 1: 85,9 87,1 92,7 89,2 94,1  
 Stichprobe 2: 94,0 97,8 98,9 94,1 91,0  
 Stichprobe 3: 89,7 97,4 93,2 94,0 90,1
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Verschiebung der Prozesslage  $\mu$  auf 85,0 mm durch die nächste Stichprobe angezeigt?
- 9.5** Für Elektrokabel werden Drähte einer bestimmten Zugfestigkeit gefordert. Eine Untersuchung der Reißlast der Drähte erwies diese als normalverteilt mit  $\mu = 286,0$  N und  $\sigma = 8,0$  N. Zur Überwachung der mittleren Zugfestigkeit  $\mu$  wird eine  $\bar{x}$ -Qualitätsregelkarte für  $n = 8$  eingesetzt.
- Lege die Karte an.
  - Wie ist zu urteilen, wenn als nächste Stichprobe eine der folgenden auftreten würde:  
 Stichprobe 1: 286 284 297 283 288 291 293 280  
 Stichprobe 2: 288 266 277 274 282 280 284 268
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird durch die nächste Stichprobe eine Verminderung der mittleren Zugfestigkeit auf 270,0 N angezeigt?

## 9.2 Statistische Toleranzrechnung

Im Fahrzeugbau werden zur Stoßdämpfung *mehrere* Einzelfedern zu einem Federpaket zusammengesetzt. Bei Abfüllanlagen kann es vorkommen, dass *mehrere* "Füllstöße" nötig sind, um eine bestimmte Füllmenge zu erzielen. Dabei kann interessieren, wie groß die Gesamttoleranz der Dicke des Federpaketes oder jene der Füllmenge ist. Man kann auch umgekehrt fragen, wie groß die einzelnen Toleranzen der Einzelmaße sein müssen, wenn etwa für die Dicke des gesamten Federpaketes oder für die gesamte Füllmenge eine bestimmte Toleranz vorgeschrieben wird.

Allgemein versteht man unter einer **Maßkette** die **Summe** (oder Differenz) von Einzelmaßen, die voneinander *unabhängig* sind. Unter **Toleranz** versteht man jeweils die Differenz zwischen dem oberen Grenzwert (OGW) und dem unteren Grenzwert (UGW) für das Einzelmaß oder die Maßkette.

**Aufgabe der Toleranzrechnung:** Herstellen des Zusammenhanges zwischen den Toleranzen der Einzelmaße und der Toleranz der Maßkette (= Gesamttoleranz oder "Schließtoleranz").

Man unterscheidet grundsätzlich zwei Arten der Toleranzrechnung:

- (1) Die **arithmetische Toleranzrechnung** nimmt die ungünstigste Zusammensetzung der Einzelmaße hinsichtlich der Toleranz für das Endergebnis an (worst-case-Annahme).
- (2) Die **statistische Toleranzrechnung** berücksichtigt die *Wahrscheinlichkeit*, mit der Einzelteile zum Endprodukt zusammengesetzt werden. Dadurch können die Einzeltoleranzen größer sein, was in der Regel ein erheblicher wirtschaftlicher Vorteil ist.

### Beispiel 9.3 : Einführende Überlegungen

Wir nehmen an, dass 5 Stangen mit den Längen  $l_1, l_2, l_3, l_4$  und  $l_5$  lückenlos und geradlinig hintereinander gelegt werden. Jede Länge liege zwischen dem unteren Grenzwert 95 cm und dem oberen Grenzwert 105 cm, so dass für ihre Toleranzen gilt:

$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = 10$  cm. Wie groß ist die Toleranz der Gesamtlänge?

#### Lösung

Unterer Grenzwert der Gesamtlänge:

$$95 \text{ cm} + 95 \text{ cm} + 95 \text{ cm} + 95 \text{ cm} + 95 \text{ cm} = 475 \text{ cm.}$$

Oberer Grenzwert der Gesamtlänge:

$$105 \text{ cm} + 105 \text{ cm} + 105 \text{ cm} + 105 \text{ cm} + 105 \text{ cm} = 525 \text{ cm.}$$

Toleranz  $T_a$  der Gesamtlänge:

$$525 \text{ cm} - 475 \text{ cm} = 5 \cdot (105 \text{ cm} - 95 \text{ cm}) = 50 \text{ cm.}$$

$$\text{Allgemein: } T_a = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 5 \cdot T_1.$$

Bei dieser Rechnung sind die *ungünstigsten* Kombinationen von Längenwerten bei der Summierung berücksichtigt. Man spricht von der **arithmetischen Toleranzrechnung**, bei der die **Einzeltoleranzen addiert** werden. Der Index a der Größe  $T_a$  weist auf "arithmetisch" hin.

Ist  $T_a$  vorgegeben, so ist die Toleranz des Einzelmaßes  $T_1 = \frac{1}{5} \cdot T_a$ .

Tatsächlich wird die Länge einer Stange irgendwo zwischen 95 cm und 105 cm liegen, wobei vermutlich der mittlere Bereich dieses Intervalls stärker besetzt sein wird als die Randbereiche. Es soll nun aber einmal übervorsichtig angenommen werden, dass die Verteilung *gleichmäßig* über das Toleranzintervall ist. Wir teilen dieses Intervall in 10 gleich breite Teilintervalle. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stangenlänge zwischen 95 cm und 96 cm liegt, ist dann  $\frac{1}{10}$ . Wir fragen nun, wie wahrscheinlich es zu einem Zusammenlegen von 5 Stangen aus diesem Längenbereich kommt. Bezeichnet I das Intervall zwischen 95 cm und 96 cm, dann gilt nach dem *UND-Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* für unabhängige Ereignisse:

$P(l_1 \text{ aus I und } l_2 \text{ aus I und } l_3 \text{ aus I und } l_4 \text{ aus I und } l_5 \text{ aus I}) =$

$$P(l_1 \text{ aus I}) \cdot P(l_2 \text{ aus I}) \cdot P(l_3 \text{ aus I}) \cdot P(l_4 \text{ aus I}) \cdot P(l_5 \text{ aus I}) = \left(\frac{1}{10}\right)^5 = 0,00001 = 0,001 \%$$

Eine Gesamtlänge zwischen  $5 \cdot 95 \text{ cm} = 475 \text{ cm}$  und  $5 \cdot 96 \text{ cm} = 480 \text{ cm}$  kommt demnach erwartungsgemäß nur einmal unter 100 000-mal vor! Das heißt auch, dass die Gesamttoleranz verringert werden könnte, wenn man eine kleine Überschreitungswahrscheinlichkeit zulässt. Umgekehrt bedeutet dies, dass man bei vorgegebener Gesamttoleranz die Toleranz der einzelnen Längen  $l_i$  größer halten und damit wirtschaftlicher fertigen kann.

Wir halten fest:

### Arithmetische Toleranzrechnung

Liegt eine Maßkette von  $k$  Einzelmaßen  $y_1, y_2, \dots, y_k$  mit den Toleranzen  $T_1, T_2, \dots, T_k$  vor, so gilt für die **arithmetische Gesamttoleranz**  $T_a$  der Maßkette (= Summe der Einzelmaße):

$$T_a = \sum_{i=1}^k T_i.$$

Die Einzeltoleranzen werden addiert. Sind alle  $k$  Toleranzen  $T_i$  gleich, so ist

$$T_a = k \cdot T_1 \quad \text{bzw.} \quad T_1 = \frac{T_a}{k}.$$

Vor dem Eingehen auf die statistische Toleranzrechnung ist zu klären, welcher Verteilung die **Summe** zweier normalverteilter Größen  $y_1, y_2$  unterliegt. Es gilt, wie man zeigen kann:

### Addition zweier unabhängiger normalverteilter Größen:

Sind zwei unabhängige Zufallsgrößen  $y_1$  und  $y_2$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1, \sigma_1$  bzw.  $\mu_2, \sigma_2$ , so ist auch ihre Summe  $y_1 + y_2$  normalverteilt. Für ihre Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  gilt:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

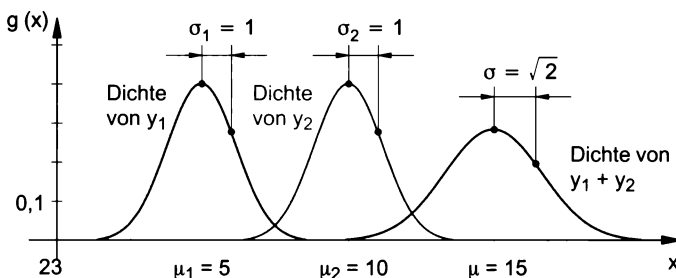


Abb. 9.5 Dichtefunktion der Summe zweier normalverteilter Größen  $y_1, y_2$

Abb. 9.5 zeigt die Dichtefunktion der Summe zweier normalverteilter Größen  $y_1$  und  $y_2$ . Bemerkenswert ist, dass sich nicht die Standardabweichungen, sondern die **Varianzen** der Summanden addieren. Es gilt eine Art "pythagoräischer Lehrsatz" für die Standardabweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .

Die Addition der Varianzen bei einer Summierung gilt über normalverteilte Zufallsgrößen hinaus sogar für *beliebige* unabhängige Zufallsgrößen  $y_1$  und  $y_2$ . Dieses Gesetz heißt dann, angeschrieben für mehr als zwei Summanden, Abweichungsfortpflanzungsgesetz und ist die Grundlage der statistischen Toleranzrechnung.



**Abweichungsfortpflanzungsgesetz**

Sind  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$  die Varianzen von k beliebigen unabhängigen Zufallsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , so gilt für die Varianz  $\sigma^2$  ihrer Summe (Summanden auch negativ möglich):

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$$

Sind alle k Varianzen der Einzelmaße gleich groß, also  $\sigma_i^2 = \sigma_1^2$  für alle i, so folgt:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 = k \cdot \sigma_1^2 \quad \text{oder} \quad \sigma = \sigma_1 \cdot \sqrt{k}$$

Die Standardabweichungen nehmen also nur mit der Wurzel aus k zu. Der Grund ist, dass sich bei der Summierung der Einzelmaße positive und negative Abweichungen vom Sollwert zum Teil in ihrer Wirkung aufheben. Nur positive oder fast nur positive Höchstabweichungen der Einzelmaße werden bei der Summierung selten auftreten. Gleiches gilt für die negativen Höchstabweichungen.

Es folgen nun zwei Modelle für eine statistische Toleranzrechnung, zuerst ein Modell mit "starken" Forderungen, dann ein übervorsichtiges Modell.

**Statistische Toleranzrechnung bei normalverteilten Einzelmaßen**

Modellannahmen:

1. Jedes Einzelmaß  $y_i$  ist normalverteilt und sein Mittelwert  $\mu$  fällt in die Mitte des zugehörigen Toleranzintervalls [UGW, OGW]

2. Ist  $T_i$  die Toleranz des Einzelmaßes  $y_i$  und  $\sigma_i$  die Standardabweichung seiner Normalverteilung, so ist es naheliegend, die Breite des Toleranzintervalles mit der "natürlichen Streubreite" einer Normalverteilung gleichzusetzen:  $T_i = 6 \cdot \sigma_i$ .

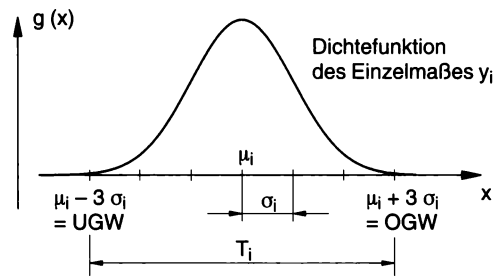


Abb. 9.6 Dichtefunktion eines normalverteilten Einzelmaßes

In diesem Fall ist die *Überschreitungswahrscheinlichkeit* der Toleranz (= Wahrscheinlichkeit für das Unterschreiten des unteren Grenzwertes oder das Überschreiten des oberen Grenzwertes) gleich  $0,27\% \approx 0,3\%$  (siehe Beispiel 6.11 c, Seite 258).

Bei Annahme einer Normalverteilung besteht stets eine gewisse Überschreitungswahrscheinlichkeit, da sich eine Normalverteilung von  $-\infty$  bis  $\infty$  erstreckt. Daher muss diesbezüglich eine Festlegung erfolgen.

Abb. 9.6 zeigt die Dichtefunktion eines Einzelmaßes.

3. Besteht die Maßkette aus den k Einzelwerten  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , so ist auch die Maßkette (= Summe  $y_1 + y_2 + \dots + y_k$ ) normalverteilt. Ihre Standardabweichung sei  $\sigma$ . Es muss nun gesagt werden, was die Gesamttoleranz  $T_s$  (s wie statistisch) sein soll. Wir vereinbaren nun für die Gesamttoleranz die gleiche Überschreitenswahrscheinlichkeit wie für die Einzeltoleranzen, setzen also:  $T_s = 6 \cdot \sigma$ . Dadurch erleichtert sich, wie bald erkenntlich, die Rechnung.

Allgemein wird ferner vereinbart: Bei einer statistische Toleranzrechnung mit *normalverteilten* Einzelmaßen sollen stets die Annahmen 1. bis 3. gelten.

Mit Hilfe des Abweichungsfortpflanzungsgesetzes kann nun leicht ein Zusammenhang zwischen den Einzeltoleranzen  $T_i$  und der statistischen Gesamttoleranz  $T_s$  hergestellt werden. Wegen  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2$  folgt:

$$\left(\frac{T_s}{6}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{6}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{T_k}{6}\right)^2 \quad \text{oder} \quad T_s^2 = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_k^2$$

### Statistische Toleranzrechnung bei normalverteilten Einzelmaßen

Liegt eine Maßkette von  $k$  normalverteilten Einzelmaßen  $y_1, y_2, \dots, y_k$  mit den Toleranzen  $T_1, T_2, \dots, T_k$  vor, so gilt für die statistische Gesamttoleranz  $T_s$  der Maßkette

(= Summe der Einzelmaße):  $T_s^2 = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_k^2$  oder  $T_s = \sqrt{\sum_{i=1}^k T_i^2}$ .

Sind alle  $k$  Toleranzen  $T_i$  gleich, so ist  $T_s = T_1 \cdot \sqrt{k}$  bzw.  $T_1 = \frac{T_s}{\sqrt{k}}$ .

Dabei wird angenommen, dass jede Toleranz  $T_i$  und auch  $T_s$  mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 0,27 % überschritten wird.

### Beispiel 9.4 : Statistische Toleranzrechnung bei normalverteilten Einzelmaßen

Fünf Stangen der normalverteilten Längen  $l_1, l_2, l_3, l_4$  und  $l_5$  werden lückenlos und geradlinig hintereinander gelegt. Jede Länge  $l_i$  beträgt  $(100 \pm 5)$  cm und wird als normalverteilt angenommen.

a) Wie groß ist die statistische Toleranz  $T_s$  der Gesamtlänge  $L$ ?

b) Ermittle die Einzeltoleranz, wenn für die Gesamtlänge  $L = (500 \pm 25)$  cm vorgegeben ist.

#### Lösung

Zu a) Die Einzeltoleranzen sind gegeben

(1)  $T_1 = T_2 = \dots = T_5 = 10$  cm

(2) Mit  $k = 5$  folgt die statistische Gesamttoleranz  $T_s = T_1 \cdot \sqrt{k} = 10 \text{ cm} \cdot \sqrt{5} = 22,4$  cm.  
Zum Vergleich:  $T_a = k \cdot T_1 = 5 \cdot 10 \text{ cm} = 50$  cm.

Das Verhältnis  $\frac{T_s}{T_a}$  beträgt daher  $0,447 \approx 0,45$ . Es wird **Reduktionsfaktor**  $r$  genannt, da es wegen  $T_s = r \cdot T_a$  die Reduktion der statistischen Gesamttoleranz  $T_s$  gegenüber der arithmetischen Gesamttoleranz  $T_a$  angibt.

Zu b) Die Gesamttoleranz ist gegeben

(1) Gesamttoleranz  $T_s = 525 \text{ cm} - 475 \text{ cm} = 50$  cm.

(2) Mit  $k = 5$  folgt  $T_1 = \frac{T_s}{\sqrt{k}} = \frac{50 \text{ cm}}{\sqrt{5}} = 22,4$  cm. Somit:  $l_i = (100 \pm 11,2)$  cm.

### Statistische Toleranzrechnung bei rechteckverteilten Einzelmaßen

Dieses Modell einer **Rechteckverteilung** aller Einzelmaße nimmt an, dass die Werte jedes Einzelmaßes  $y_i$  **gleichverteilt** zwischen ihrem unteren und oberen Grenzwert liegen. Da man davon ausgehen kann, dass die Werte eines Maßes im mittleren Toleranzbereich stärker vertreten sein werden als in dessen Randbereichen, ist dieses Modell schlechter als die Wirklichkeit und daher ein übervorsichtiges Modell. Abb. 9.7a zeigt die Rechteckverteilung eines Einzelmaßes  $y_1$ , dessen Werte einfachheitshalber zwischen 0 und 1 liegen sollen (statt wie im Beispiel 9.3 zwischen 95 cm und 105 cm).

Bemerkenswert sind nun folgende Eigenschaften: Sind  $y_2$  und  $y_3$  weitere Einzelmaße, welche der gleichen Rechteckverteilung wie  $y_1$  unterliegen, so lässt sich zeigen, dass  $y_1 + y_2$  eine Dreiecksverteilung (Abb. 9.7b) und  $y_1 + y_2 + y_3$  eine glockenförmige Verteilung (näherungsweise bereits eine Normalverteilung, Abb. 9.7c) besitzen.

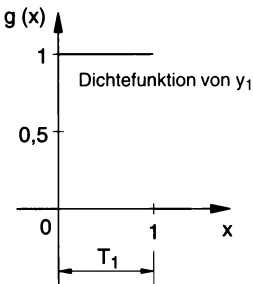


Abb. 9.7a

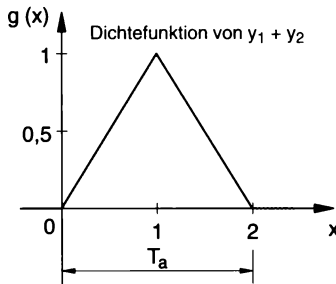


Abb. 9.7b

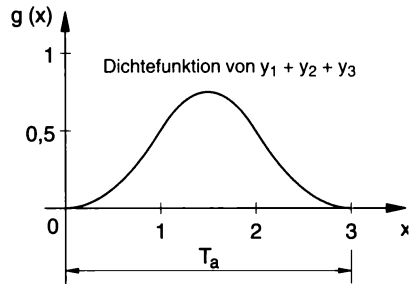


Abb. 9.7c

Je mehr rechteckverteilte Einzelmaße addiert werden, desto besser ist nach dem Zentralen Grenzwertsatz der Statistik die Näherung durch eine Normalverteilung. Ab einer Maßkette von etwa  $k = 4$  rechteckverteilten Einzelmaßen kann praktisch ausreichend genau mit einer Normalverteilung gearbeitet werden.

Die statistische Toleranzrechnung geht nun wieder davon aus, dass die angestrebte Gesamttoleranz  $T_s$  mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit  $p$  überschritten werden kann. Dadurch lässt sich der Zusammenhang zwischen den Einzeltoleranzen  $T_i$  und  $T_s$  wieder verhältnismäßig leicht herstellen, wenn alle Einzelmaße der gleichen Rechteckverteilung unterliegen.

Man kann herleiten, dass  $\sigma_1^2 = \frac{T_1^2}{12}$  die Varianz einer Rechteckverteilung der Länge  $T_1$  ist. Addiert man  $k$  gleichartige Einzelmaße, so ist die Varianz der Summe der Rechtecksverteilungen nach dem

Abweichungsfortpflanzungsgesetz gleich  $\sigma_R^2 = k \cdot \frac{T_1^2}{12}$ . Daraus folgt  $\sigma_R = \frac{T_1 \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot \sqrt{3}}$ .

$T_a = k \cdot T_1$  ist die arithmetische Gesamttoleranz und  $T_s$  die gesuchte statistische Gesamttoleranz. Lässt man bei einer Normalverteilung mit der Standardabweichung  $\sigma$  eine Überschreitungswahrscheinlichkeit  $p$  von  $T_s$  zu, so ist  $T_s = 2 \cdot u_{1-p/2} \cdot \sigma$ . Setzt man darin näherungsweise  $\sigma = \sigma_R$ , so ergibt sich nach Kürzen die so genannte

**Statistische Toleranzrechnung bei rechteckverteilten Einzelmaßen**

Liegt eine Maßkette von  $k$  rechteckverteilten Einzelmaßen  $y_1, y_2, \dots, y_k$  mit gleich großen Toleranzen  $T_1$  vor, so gilt für die **statistische Gesamttoleranz**  $T_s$  der Maßkette (= Summe der Einzelmaße) bei  $k \geq 4$ :  $T_s = r \cdot T_a = r \cdot k \cdot T_1$  mit dem

**Reduktionsfaktor** gegenüber der arithmetischen Gesamttoleranz  $T_a$ :  $r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}}$ .

Dabei ist  $p$  die (kleine) Wahrscheinlichkeit, mit der die Gesamttoleranz  $T_s$  überschritten wird.

**Beispiel 9.5 : Statistische Toleranzrechnung bei rechteckverteilten Einzelmaßen**

Fünf Stangen der Längen  $l_1, l_2, l_3, l_4$  und  $l_5$  werden lückenlos hintereinander gelegt. Jede Länge beträgt  $(100 \pm 5)$  cm und wird als rechteckverteilt angenommen.

- a) Wie groß ist die statistische Toleranz  $T_s$  der Gesamtlänge  $L$ , wenn eine Überschreitenswahrscheinlichkeit von 1% akzeptiert werden kann?
- b) Ermittle die Einzeltoleranz, wenn für die Gesamtlänge  $L = (500 \pm 25)$  cm vorgegeben ist, wobei die Toleranz der Gesamtlänge mit Wahrscheinlichkeit  $p = 1\%$  überschritten werden darf.

**Lösung****Zu a) Die Einzeltoleranzen sind gegeben**

- (1)  $T_1 = T_2 = \dots = T_5 = 10 \text{ cm}$
- (2) Arithmetische Gesamttoleranz  $T_a = k \cdot T_1 = 5 \cdot 10 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$ .
- (3)  $p = 0,01$ ;  $1 - \frac{p}{2} = 0,995$ ;  $u_{0,995} = 2,576$ ; Reduktionsfaktor:  $r = \frac{2,576}{\sqrt{3 \cdot 5}} = 0,665$ .
- (4) Statistische Gesamttoleranz  $T_s = r \cdot T_a = 33,2 \text{ cm}$ . Somit:  $L = (500 \pm 16,6) \text{ cm}$ .

*Anmerkung:*

Ein Vergleich mit der statistischen Toleranzrechnung bei Normalverteilung (Beispiel 9.4 a)) ist möglich, wenn  $p = 0,27\%$  ist:  $u_{1-p/2} = 3$ ;

Reduktionsfaktor  $r = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot 5}} = 0,775$ ; daraus  $T_s = r \cdot T_a = 38,7 \text{ cm}$ .

**Zu b) Die Gesamttoleranz ist gegeben**

- (1) Gesamttoleranz (Schließtoleranz)  $T_s = 525 \text{ cm} - 475 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$ .
- (2) Da  $p = 1\%$ , ist nach a) der Reduktionsfaktor  $r = 0,665$ .
- (3) Wegen  $T_s = r \cdot k \cdot T_1$  folgt  $T_1 = \frac{T_s}{r \cdot k} = \frac{50 \text{ cm}}{0,665 \cdot 5} = 15,0 \text{ cm}$ .  
Somit:  $l_i = (100 \pm 7,5) \text{ cm}$ .

**Im Überblick: Statistische Toleranzrechnung**

Bei der **arithmetische Toleranzrechnung** werden die Toleranzen der Einzelmaße addiert. Dadurch werden auch extrem unwahrscheinliche Kombinationen in der Summierung von Einzelmaßen berücksichtigt, was bei den Einzelmaßen zu unwirtschaftlich engen Toleranzen führt.

Kennzeichen einer **statistische Toleranzrechnung** ist es, dass sie eine oft vertretbare geringfügige Überschreitungswahrscheinlichkeit der Gesamttoleranz zulässt. Dies wirkt sich in einer deutlichen Aufweitung der Toleranzen gegenüber jenen aus, die sich aus der arithmetischen Toleranzrechnung ergeben.

Die **statistische Toleranzrechnung mit normalverteilten Einzelmaßen** ist einfach zu rechnen und führt zu besonders großen Einzeltoleranzen. Sie ist ein optimistisches Modell.

Von praktischer Bedeutung ist die **statistische Toleranzrechnung mit rechteckverteilten Einzelmaßen**. Das Modell der Rechteckverteilung bedeutet ein vorsichtigeres Vorgehen als nötig, da die Werte jedes Einzelmaßes **gleichverteilt** zwischen seinem unteren und oberen Grenzwert angenommen werden. Damit steht man auf der "sicheren Seite".

Statistische Toleranzrechnung kann auch mit trapez- oder dreiecksverteilten Einzelmaßen vorgenommen werden.

**Aufgaben**

- 9.6** Gegeben sind zwei Zufallsgrößen  $y_1$  und  $y_2$ , die einer Normalverteilung mit  $\mu_1 = 20$ ,  $\sigma_1 = 3$  bzw.  $\mu_2 = 30$ ,  $\sigma_2 = 4$  unterliegen. Wie ist ihre Summe  $y_1 + y_2$  verteilt? Zeichne die Graphen der Dichtefunktionen von  $y_1$ ,  $y_2$  sowie von  $y_1 + y_2$ .

- 9.7** Gegeben sind drei identisch rechteckverteilte (d.h. gleichverteilte) Zufallsgrößen  $y_1$ ,  $y_2$  und  $y_3$  mit einer von Null verschiedenen Dichte zwischen 95 und 105. Simuliere rechnergestützt (TI-92/89, MS Excel unter Extras/Analyse-Funktionen/ Zufallszahlengenerierung, Mathcad, ...) mit Hilfe von ganzzahlig abgeschnittener, gleichverteilt zwischen 95 und 105 liegender Zufallszahlen die
- a) Verteilung der Summe  $y_1 + y_2$ ;                      b) Verteilung der Summe  $y_1 + y_2 + y_3$ .
- 9.8** Packungen zu 5 kg werden in einer Abfüllanlage durch 5 Füllstöße zu je 1 kg abgefüllt. Die Füllmenge je Füllstoß beträgt  $(1,00 \pm 0,01)$  kg. Bestimme für eine 5 kg-Packung
- a) die arithmetische Gesamttoleranz  $T_a$ ;  
b) die statistische Gesamttoleranz  $T_s$  bei normalverteilten Füllstößen;  
c) die statistische Gesamttoleranz  $T_s$  bei rechteckverteilten Füllstößen, wenn  $p = 0,27\%$  und  $p = 1\%$ .
- 9.9** In einer Abfüllanlage für Lacke können nur Füllstöße von 1 l realisiert werden. Ein Kunde bestellt 4 l-Kanister mit der Forderung, dass 2% der Kanisterfüllmengen außerhalb  $(4,00 \pm 0,04)$  l liegen dürfen. Wie groß ist die Toleranz für den einzelnen Füllstoß
- a) bei arithmetischer Toleranzrechnung;  
b) bei statistischer Toleranzrechnung bei rechteckverteilten Füllstößen.
- 9.10** Für die Dämpfung eines Fahrzeugs werden Federpakete aus 6 übereinandergelegten gleichartigen Einzelfedern verwendet. Die Dicke einer Einzelfeder ist gleich  $(7,00 \pm 0,10)$  mm. Berechne die Dicke der Federpakete mit Angabe der Toleranz
- a) mit arithmetischer Toleranzrechnung;  
b) mit statistischer Toleranzrechnung bei normalverteilten Einzelfederdicken;  
c) mit statistischer Toleranzrechnung bei rechteckverteilten Einzelfederdicken, wenn 1% der Federpakete die Toleranz überschreiten dürfen.
- 9.11** Für die Dämpfung eines Fahrzeugs werden Federpakete aus 6 übereinander gelegten gleichartigen Einzelfedern verwendet. Für die Dicke des Federpaketes ist  $(42,0 \pm 0,1)$  mm vorgegeben. Berechne die Dicke einer Einzelfeder bei Angabe der Toleranz
- a) mit arithmetischer Toleranzrechnung;  
b) mit statistischer Toleranzrechnung bei normalverteilten Einzelfederdicken;  
c) mit statistischer Toleranzrechnung bei rechteckverteilten Einzelfederdicken, wenn 0,5% der Federpakete die Toleranz überschreiten dürfen.
- 9.12** Zehn gleichartige Blechstreifen werden zu einem Paket zusammengelegt. Als Dicke des Blechpaketes ist  $(10,0 \pm 0,2)$  mm vorgegeben. Berechne die Dicke eines Blechstreifens bei Angabe der Toleranz
- a) mit arithmetischer Toleranzrechnung;  
b) mit statistischer Toleranzrechnung bei normalverteilten Blechdicken;  
c) mit statistischer Toleranzrechnung bei rechteckverteilten Blechdicken, wenn 1% der Blechpakete die Toleranz überschreiten dürfen.
- 9.13** Für die Breiten dreier Abstandshalter auf einer Welle sind folgende Angaben bekannt:  $(10,0 \pm 0,1)$  mm,  $(20,0 \pm 0,2)$  mm,  $(50,0 \pm 0,4)$  mm. Berechne die statistische Gesamttoleranz bei normalverteilten Breiten.
- 9.14** Eine Welle ist in eine Bohrung einzusetzen. Für den Durchmesser der Bohrung ist  $D = (12,50 \pm 0,10)$  mm, für jenen der Welle  $d = (12,30 \pm 0,05)$  mm bekannt. Berechne
- a) die arithmetische Toleranz der Größe  $D - d$ ;  
b) die statistische Toleranz der Größe  $D - d$ , wenn  $D$  und  $d$  normalverteilt sind.

## 9.3 Annahmestichprobenprüfung

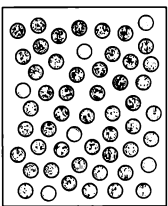
Ein Abnehmer kann versuchen, sich gegenüber einem Lieferanten durch eine stichprobenweise "Eingangsprüfung", eine **Annahmestichprobenprüfung**, abzusichern, was die Qualität der gelieferten Produkte betrifft. Solche Prüfungen können auch als Zwischen- oder Endprüfungen in einem Unternehmen erfolgen.

Im Folgenden kann nur auf die einfachste Form einer Annahmestichprobenprüfung, die so genannte **Einfach-Stichprobenprüfung auf fehlerhafte Einheiten**, eingegangen werden, an der aber viele grundlegende Eigenschaften einer Annahmestichprobenprüfung aufgezeigt werden können. Dabei wird einem Prüfling (einer Lieferung) von  $N$  Einheiten eine *Zufallsstichprobe* von  $n$  Einheiten entnommen (Abb. 9.8). Ist die Anzahl  $x$  der dabei gefundenen fehlerhaften Einheiten nicht zu hoch, kann man annehmen, dass das Prüfling entsprechend gut ist. Folgende beide Fragen sind also zu beantworten:

1. Wie viele Einheiten soll die Stichprobe umfassen?
2. Wie viele Einheiten dürfen davon höchstens fehlerhaft sein? Diese Höchstzahl, die mit  $c$  bezeichnet, heißt **Annahmezahl**.

Eine **Einfach-Stichprobenprüfung** (die Beurteilung auf Annahme oder Rückweisung erfolgt auf Grund einer einzigen Stichprobe) läuft nach folgender Prüfanweisung ab:

Prüfling



Stichprobe

Stichprobenumfang  $n$ ,  
davon  $x$  fehlerhaft

Entnimm dem Prüfling  $n$  Einheiten.

Ist  $x \leq c$ , so nimm das Prüfling an,  
sonst weise es zurück.

Kurzschreibweise dieser Prüfanweisung:  $n - c$

Losumfang  $N$ ,  
davon  $d$  fehlerhaft

$x \leq c$ : Annahme  
 $x > c$ : Rückweisung

Abb. 9.8 Einfach-Stichprobenprüfung

### Beispiel 9.6 : Annahmewahrscheinlichkeit bei einer Einfach-Stichprobenprüfung

Lose von Stanzteilen werden stichprobenweise nach der Anweisung  $n - c = 50 - 1$  geprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme eines Prüflinges, wenn in diesem der Anteil  $p$  fehlerhafter Einheiten gleich 0,5%, 1%, 2%, 3%, 5% 8% oder 10% ist? Vorausgesetzt ist eine Prüflinggröße  $N = 1000$  Stanzteile.

#### Lösung

$p$	$P_a$
0,005	0,9739
0,01	0,9106
0,02	0,7358
0,03	0,5553
0,05	0,2794
0,08	0,0827
0,10	0,0338

Eine Annahme erfolgt, wenn die Anzahl  $x$  fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe *höchstens* gleich 1 ist. Da das Verhältnis  $n/N = 50/1000 < 0,1$  ist, kann für die Verteilung der Anzahl  $x$  fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe die Binomialverteilung statt der hypergeometrischen Verteilung genommen werden. Bezeichnet  $P_a$  die Annahmewahrscheinlichkeit des Prüflinges, so gilt:

$P_a = G(1; n, p)$  mit  $n = 50$ .

MC

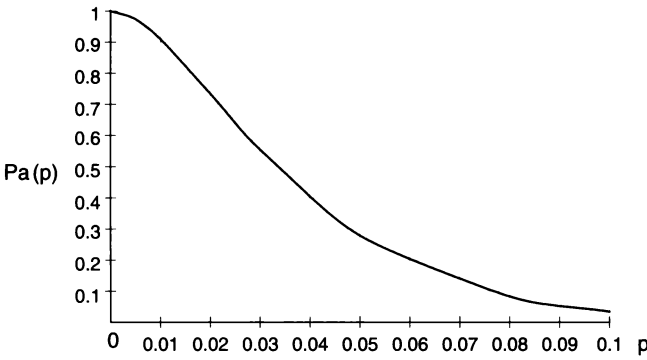


Abb. 9.9 Operations-Charakteristik der Anweisungen  $n - c = 50 - 1$

$$Pa(p) := \text{pbinom}(1, 50, p)$$

$$p := 0,0.001 \dots 0.10$$

$$Pa(0.01) = 0.9106$$

In Abb. 9.9 wurde die Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a$  in Abhängigkeit vom Anteil  $p$  fehlerhafter Einheiten im Los graphisch dargestellt. Die so erhaltene Kurve heißt **Operations-Charakteristik (OC)** oder **Annahmekennlinie** der verwendeten Stichproben-

anweisung. Die OC fällt von  $P_a = 1$  streng monoton auf null ab. Wesentlich ist, dass *auch gute Lose* (d.h. solche mit kleinen Fehleranteilen  $p$ ) *zurückgewiesen und auch schlechte Lose* (hohe  $p$ -Werte) *angenommen* werden.

**Die Bewertung einer Stichprobenprüfanweisung erfolgt anhand ihrer OC:**

- (1) Der **Lieferant** wird interessiert sein, Lose zu liefern, deren Fehleranteil  $p$  im Bereich mit einer hohen Annahmewahrscheinlichkeit (etwa  $P_a \geq 90\%$ ) liegt.
- (2) Der **Abnehmer** wird interessiert sein, dass Lose ab einem bestimmten höheren Fehleranteil nur mit geringer Wahrscheinlichkeit (etwa  $P_a < 10\%$ ) angenommen werden.
- (3) Kann die Stichprobenprüfanweisung eine dieser Interessenslagen nicht erfüllen, werden Lieferant und Abnehmer eine andere, passende Prüfanweisung vereinbaren.

Erfüllen mehrere Stichprobenanweisungen die Bedingungen (1) und (2), so ist aus wirtschaftlichen Gründen jene mit dem kleinsten Stichprobenumfang vorzuziehen.

Eine OC sollte *schnell* auf kleine Werte abfallen, was bei höherem Stichprobenumfang  $n$  immer besser erfüllt ist.

Abb. 9.10 zeigt die OC einer 100%-Prüfung. Links von der "Gutgrenze"  $p_0$  besteht sichere Annahme, rechts sichere Zurückweisung. Die OC einer Stichprobenprüfung kann sich diesem Ideal nur annähern.

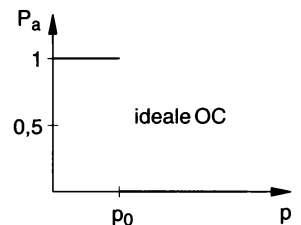


Abb. 9.10 Ideale OC

Wir halten fest:

**Annahmewahrscheinlichkeit bei einer Einfach-Stichprobenprüfanweisung  $n - c$**   
 $P_a = G(c; n, p)$   
 Die OC gibt Auskunft über die Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a$ , wenn der Fehleranteil im Los  $p$  wäre (tatsächlich ist er ja im Allgemeinen nicht bekannt).

In der Praxis wählt man geeignete Stichprobenprüfanweisungen meist aus einem Stichprobensystem. Für die Prüfung auf fehlerhafte Einheiten wird für eine *fortlaufende* Lieferung von Losen am Häufigsten das **AQL-Stichprobensystem ISO 2859** verwendet. Für eine Stichprobenprüfanweisung, die zu einem bestimmten AQL (Acceptable Quality Level) gehört, ist für  $p \leq \text{AQL}$  eine hohe Annahmewahrscheinlichkeit, meist über 90% verbunden.

## Im Überblick: Annahmestichprobenprüfung

Die einfachste Annahmestichprobenprüfung ist die **Einfach-Stichprobenprüfung auf fehlerhafte Einheiten**. Dabei wird einem Prüfling eine Zufallsstichprobe des Umfangs  $n$  entnommen. Ist die dabei gefundene Anzahl  $x$  fehlerhafter Einheiten höchstens gleich einer **Annahmezahl**  $c$ , so erfolgt die "Annahme" des Loses, ansonsten wird es zurückgewiesen.

Die Bewertung einer Stichprobenprüfung erfolgt anhand ihrer **Operations-Charakteristik (OC)** oder **Annahmekennlinie**. Sie gibt die Abhängigkeit der Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a$  von der Qualitätslage im Prüfling an.

### Aufgaben

- 9.15** Berechne die Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a$  für  $p = 0,01; 0,02; 0,04$  sowie  $0,06$  und skizziere damit die OC der Stichprobenprüfanweisung  
 a)  $n - c = 50 - 1$                       b)  $n - c = 100 - 2$                       c)  $n - c = 200 - 4$ .  
 Man erkennt, dass bei zunehmendem Stichprobenumfang  $n$  die OC steiler wird, also die "Prüfschärfe" zunimmt.
- 9.16** Eine Gießerei beliefert einen Abnehmer mit kleinen Gussteilen. Die Gießerei weiß, dass der Anteil fehlerhafter Gussteile um 2% liegt. Der Abnehmer möchte gegen Lose mit einem Fehleranteil ab 7% wirksam geschützt sein. Erfüllt die Stichprobenprüfung nach der Anweisung  $n - c = 80 - 2$  die Interessen von Lieferant und Abnehmer?
- 9.17** Es soll ein einfaches Modell einer Führerscheinprüfung erstellt werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass einem Kandidaten zufällig  $n = 60$  Fragen aus einem Fragenkatalog von insgesamt 1000 Fragen gestellt werden. Natürlich möchte ein gut vorbereiteter Prüfungskandidat die Prüfung bestehen. Dies wird auch eine gewisse kleine Unkenntnis einschließen. Nimm an, dass diese Unkenntnis höchstens 50 Fragen oder 5% betragen darf. Andererseits haben natürlich die übrigen Verkehrsteilnehmer ein Recht, dass die Prüfung einen schlecht vorbereiteten Kandidaten auch als solchen erkennt und zurückweist. Es soll angenommen werden, dass jemand als schlecht vorbereitet gilt, wenn er 150 Fragen oder 15% nicht beantworten kann. Bis zu höchstens welcher Anzahl  $c$  (= Annahmezahl) nicht gewusster Fragen sollte die Prüfung als "Bestanden" gewertet werden?
- 9.18** Eine Anweisung mit  $c = 0$  wird gefühlsmäßig oft als streng empfunden. Zeige jedoch, dass die beiden Anweisungen  $48 - 0$  und  $110 - 2$  den Abnehmer etwa gleich gut vor Fehleranteilen über 5% schützen.
- 9.19** Ein Abnehmer prüft Lose des Umfangs zwischen 1000 und 6000 längere Zeit hindurch nach folgendem Prüfplan (Beispiel für einen veralteten Prozentstichprobenplan):  
 (1) Entnimm zufällig 5% der Einheiten des Prüflinges.  
 (2) Wenn davon höchstens 2% fehlerhaft sind, nimm das Los an, sonst weise es zurück. Ist der Abnehmer bei den angegebenen Losgrößen wirksam, d.h. durch eine Annahmewahrscheinlichkeit unter 10%, gegen Fehleranteile ab 4% geschützt?
- 9.20** Eine (schlechte) Daumenregel lautet: Entnimm dem Los zufällig 10% seiner Einheiten. Sind alle fehlerfrei, so nimm das Los an, sonst weise es zurück. Berechne die Annahmewahrscheinlichkeit für Losumfänge  $N = 50$  und  $N = 1000$  bei  $p = 10\%$  Fehleranteil im Los.



## 9.4 Zuverlässigkeitsprüfung

Zuverlässigkeitsprüfungen können in der Regel nur *stichprobenweise* durchgeführt werden. Dies liegt einerseits daran, dass solche Prüfungen in der Regel mit der Zerstörung oder Teilschädigung der geprüften Einheiten enden und andererseits zeit- oder kostenaufwendig sind.

Lebensdauererwartungen lassen sich oft praktisch ausreichend genau durch Verändern der Parameter einer einzigen Verteilung darstellen, der so genannten **WEIBULL<sup>24</sup>-Verteilung**. Setzt man keine Mindestlebensdauer voraus, so besitzt sie zwei Parameter  $T$  und  $b$ .

### WEIBULL-Verteilung

$$\text{Dichtefunktion: } g(t) = \frac{b}{T} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}; \quad \text{Verteilungsfunktion } G(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}, \quad t \geq 0$$

Bezeichnungen:

$t$  **Lebensdauervariable** (braucht keine "echte" Zeit zu sein, sondern kann etwa auch die Länge einer Fahrstrecke oder die Anzahl von Lastwechseln sein)

$G(t)$ , **Ausfallwahrscheinlichkeit** (Verteilungsfunktion); Wahrscheinlichkeit, dass eine auch  $F(t)$  Einheit bis zur Zeit  $t$  ab Anwendungsbeginn ausfällt.

$R(t)$  **Überlebenswahrscheinlichkeit** oder **Zuverlässigkeit**; Wahrscheinlichkeit, dass eine Einheit bis zur Zeit  $t$  ab Anwendungsbeginn zuverlässig funktioniert, erwarteter Anteil, der  $t$  "überlebt" (engl. reliability, Zuverlässigkeit). Es gilt:  
 **$R(t) = 1 - G(t)$ .**

$T > 0$  **Charakteristische Lebensdauer**:  $G(T) = 1 - e^{-\left(\frac{T}{T}\right)^b} = 1 - e^{-1} = 0,632$  bzw.  $R(T) = 1 - G(T) = 0,368$ ; dies gilt unabhängig vom zweiten Parameter  $b$ .  $T$  ist somit erwartungsgemäß die Zeit, bis zu der 63,2% aller Einheiten ausfallen bzw. die ca. 36,8% aller Einheiten überleben.

$b > 0$  **Ausfallsteilheit**; Formparameter, der das Ausfallverhalten (Früh-, Zufalls- oder Verschleissausfälle) beschreibt; in der Praxis ist meist  $\frac{1}{4} \leq b \leq 5$ .

Im Gegensatz zu den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  der Normalverteilung sind die beiden Parameter  $T$  und  $b$  der WEIBULL-Verteilung nicht einfach geometrisch deutbar.

Bei praktischen Aufgabenstellungen ist es meist günstiger, statt der Verteilungsfunktion  $G(t)$  die Überlebenswahrscheinlichkeit  $R(t)$  zu verwenden:

$$\text{Überlebenswahrscheinlichkeit } R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}, \quad t \geq 0$$

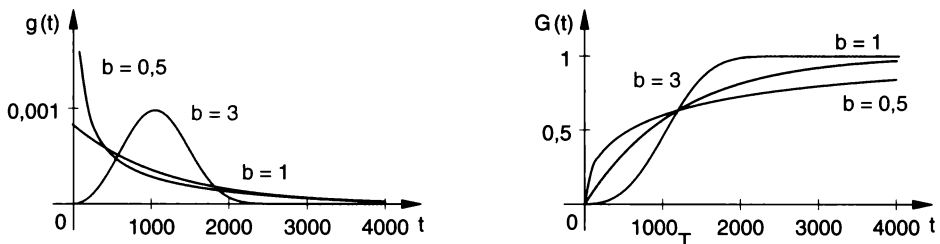


Abb. 9.11 Dichte- und Verteilungsfunktionen mit gleichem  $T$

<sup>24</sup> Wallodi WEIBULL (1887 – 1979), schwedischer Techniker

In Abb. 9.11 sind die Dichte- und Verteilungsfunktion von WEIBULL-Verteilungen bei gleichem  $T$  für verschiedene Werte der Ausfallsteilheit  $b$  gezeichnet. Bei  $b$ -Werten um 3,6 verliert die Dichtefunktion  $g(t)$  der WEIBULL-Verteilung ihre "Schiefe" und kann dann um diesen  $b$ -Wert durch die Normalverteilung angenähert werden. Man erkennt weiters, dass  $G(T)$  gleich 0,632 unabhängig von  $b$ .

Für die mittlere Lebensdauer  $\mu$  ("Lebenserwartung") gilt bei Vorliegen einer WEIBULL-Verteilung:

$$\text{Mittlere Lebensdauer } \mu = a \cdot T \quad \text{mit} \quad a = \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)$$

Dabei ist  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$  ( $x > 0$ ), die so genannte Gammafunktion, eine der wichtigsten nicht elementaren Funktionen. Ist  $x$  eine natürliche Zahl, so gilt:  $\Gamma(x + 1) = x!$ , also etwa  $\Gamma(5) = 4! = 24$ . Die Werte von  $a$  liegen in der Praxis tabelliert vor. Die mittlere Lebensdauer ("Lebenserwartung")  $\mu$  ist nicht mit der charakteristischen Lebensdauer zu verwechseln. Die Parameter  $T$  und  $b$  können durch eine graphische Auswertung von Lebensdauerwerten geschätzt werden (Auswertung im "WEIBULL- oder Lebensdauer-Netz").

### Beispiel 9.7 : Berechnung zur WEIBULL-Verteilung

Eine Auswertung von Lebensdauerdaten einer großen Anzahl gleichartiger PKW ergab das Vorliegen einer WEIBULL-Verteilung mit  $T = 11,3$  Jahren und  $b = 2,9$ .

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht ein PKW eine Lebensdauer von 5 Jahren?
- Welche Lebensdauer wird von 90% der PKW erreicht?
- Wie groß ist die mittlere Lebensdauer  $\mu$ ?

#### Lösung

Zu a)  $R(5) = e^{-\left(\frac{5}{11,3}\right)^{2,9}} = 0,91 = 91\%$ .

Zu b)  $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{11,3}\right)^{2,9}} = 0,9$ .

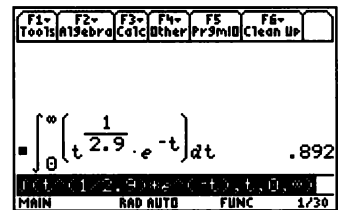
Nach Logarithmieren dieser Gleichung und anschließendem Wurzelziehen erhält man:

$$t = 11,3 \cdot \sqrt[2,9]{-\ln 0,9} = 5,2 \text{ Jahre.}$$

Zu c) Die Bestimmung des Faktors  $a$  kann mit dem Rechner erfolgen.

$$a = \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2,9} + 1\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2,9}} \cdot e^{-t} dt = 0,892$$

$$\mu = a \cdot T = 0,892 \cdot 11,3 = 10,1 \text{ Jahre.}$$



Die WEIBULL-Verteilung mit  $b = 1$  heißt auch Exponentialverteilung. Durch Einsetzen von  $b = 1$  in die entsprechenden Formeln ergibt sich:

#### Exponentialverteilung

$$g(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}; \quad G(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}; \quad R(t) = e^{-\frac{t}{T}}; \quad \mu = T.$$

Die Exponentialverteilung ist eine WEIBULL-Verteilung mit *konstanter* Ausfallrate. Diese gibt zu einem Zeitpunkt  $t$  die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Einheit in der nächsten (kleinen) Zeiteinheit ausfällt. Konstante Ausfallrate bedeutet, dass diese unabhängig vom "Lebensalter" des Bauteils ist; Bauteile, deren Lebensdauer exponentialverteilt ist, **altern nicht!** Eine weitere Eigenschaft ist, dass die **charakteristische Lebensdauer gleich der mittleren Lebensdauer** ist.

### Im Überblick: Zuverlässigkeitsprüfung

Zuverlässigkeit ist Qualität auf Zeit. Die Zuverlässigkeit eines Produktes hängt von vielen Zufallsgrößen ab, weshalb Zuverlässigkeitsaussagen immer Wahrscheinlichkeitsaussagen sind. Mit der **WEIBULL-Verteilung** als universeller Verteilung ist es oft möglich, Zuverlässigkeitsaussagen zu machen.

Die WEIBULL-Verteilung besitzt, wenn es keine ausfallfreie Zeit gibt, zwei Parameter: die **charakteristische Lebensdauer  $T$**  und die **Ausfallsteilheit  $b$** . Ist  $b = 1$ , so heißt die WEIBULL-Verteilung auch Exponentialverteilung. Sie beschreibt Zufallsausfälle, die vom Alter unabhängig sind.

### Aufgaben

- 9.21** Geräte unterliegen einer Weibull-Verteilung mit  $b = 2$ . Bei einer Garantiezeit von 0,5 Jahren beträgt die Anzahl der Störfälle (Reklamationen) 0,4 %. Auf wie viel Prozent würden die Reklamationen erwartungsgemäß steigen, wenn die Garantiezeit auf 1 Jahr erhöht würde?
- 9.22** Mechanische Bauelemente sind weibullverteilt mit einer charakteristischen Lebensdauer von  $1,00 \cdot 10^5$  h und einer Ausfallsteilheit von 2,8.
- Schätze den Anteil, der eine Betriebsdauer von  $8,0 \cdot 10^4$  h erreicht.
  - Wie groß ist ihre mittlere Lebensdauer?
  - Welche Zeit wird erwartungsgemäß von 90 % der Bauelemente erreicht?
- 9.23** Die Auswertung der Lebensdauerdaten von mechanischen Bauteilen führte zur Annahme einer WEIBULL-Verteilung mit einer charakteristischen Lebensdauer von  $2,0 \cdot 10^5$  Lastwechseln und einer Ausfallsteilheit von 1,4. Wie groß ist die mittlere Lebensdauer?
- 9.24** Die mittlere Lebensdauer eines elektronischen Bauteils beträgt 10000 h. Für die Lebensdauer kann eine Exponentialverteilung angenommen werden.
- Wie hoch ist der Anteil der Bauteile, der die Einsatzdauer von 10000 h überschreitet?
  - Bis zu welcher Zeit sind 5 % der Bauteile ausgefallen?
- 9.25** Leuchtdioden sind, wie eine Auswertung ergab, in guter Näherung exponentialverteilt. Ihre mittlere Lebensdauer wurde mit  $1,8 \cdot 10^3$  h Stunden gefunden. Welcher Anteil von Dioden wird vor Erreichen von 1700 Betriebsstunden ausfallen?
- 9.26** Die Lebensdauer eines elektronischen Bauteils unterliegt einer Exponentialverteilung mit der charakteristischen Lebensdauer 5000 h. Wie groß ist ihre mittlere Lebensdauer?
- 9.27** Bauelemente einer bestimmten Art besitzen eine charakteristische Lebensdauer von  $4,0 \cdot 10^4$  h. Dies ist auch ihre mittlere Lebensdauer.
- Welcher Anteil ist nach  $1,0 \cdot 10^4$  Stunden ausgefallen?
  - Welche Zeit wird erwartungsgemäß von 90 % der Bauteile überschritten?

## 10 Moderne Hilfsmittel

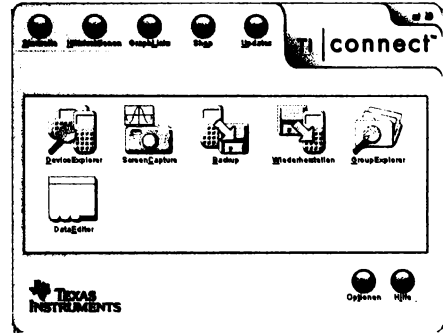
Alle im Folgenden angeführten Programme, Hinweise oder Beispiele beziehen sich auf die Rechner Voyage 200 sowie TI-89.

<b>Binomialverteilung</b> Rekursive Berechnung von $g(x; n, p)$ und $G(x; n, p)$ Aufruf durch $bv()$	<b>Poisson-Verteilung</b> Rekursive Berechnung von $g(x; \mu)$ und $G(x; \mu)$ Aufruf durch $pv()$
<pre> bv() Prgm Local x,n,p,q,g,gg,k ClrIO Dialog Title "Binomialverteilung" Request "x",x : Request "n",n Request "p (in %)",p EndDlog expr(x)→x : expr(n)→n : expr(p)→p p/100→p:1-p→q q^n → g : g → gg If x &gt; 0 Then   For k,0,x-1     (n-k)/(k+1)*p/q*g→g     gg+g→gg   EndFor EndIf Output 20,30,"g ="&amp;string(round(g,4)) Output 40,30,"G ="&amp;string(round(gg,4)) Disp " ", " ", " " ... weiter mit F5" EndPrgm </pre>	<pre> pv() Prgm Local x,μ,g,gg,k ClrIO Dialog Title "Poisson-Verteilung" Request "x",x : Request "μ",μ EndDlog expr(x)→x: expr(μ)→μ e^(-μ)→g : g→gg If x &gt; 0 Then   For k,0,x-1     μ/(k+1)*g→g     gg+g →gg   EndFor EndIf Output 20,30,"g ="&amp;string(round(g,4)) Output 40,30,"G ="&amp;string(round(gg,4)) Disp " ", " ", " " ... weiter mit F5" EndPrgm </pre>
<b>Standardisierte Normalverteilung (u-Verteilung)</b>	
<b>Berechnung von <math>G(u)</math> nach Beispiel 3.9, Seite 97</b> Aufruf durch $uv()$	<b>Berechnung des p-Quantils <math>u_p</math> nach Seite 259,</b> $p \geq 0,5$ ; Aufruf durch $invuv()$
<pre> uv() PRGM Local u,g,y,i,k ClrIO Dialog Title "Stand.Normalvert.(u-Vert.)" Request "u",u EndDlog expr(u)→u u→g : u→y : 2→i : 1→k While abs(y) &gt; 0.00001 -y*u*k/i→y k+2→k : i+2→i : y/k→y : g+y→g EndWhile 0.5+g/√(2*π)→g Output 20,40,"u ="&amp;string(u) Output 40,40,"G ="&amp;string(round(g,4)) Disp " ", " ", " " ... weiter mit F5" EndPrgm </pre>	<pre> invuv() PRGM Local p,a0,a1,a2,k,b1,b2,b3,t,c,d ClrIO Dialog Title "p-Quantil der u-Verteilung" Request "p",p EndDlog expr(p)→p 2.515517→a0 : 0.802853→a1 0.010328→a2 : 1.432788→b1 0.189269→b2 : 0.001308→b3 √(-2*ln(1-p))→t a0+t*(a1+t*a2)→c 1+t*(b1+t*(b2+t*b3))→d t-c/d→u Output 20,40,"p ="&amp;string(p) Output 40,40,"u ="&amp;string(round(u,4)) Disp " ", " ", " " ... weiter mit F5" EndPrgm </pre>


### TI Connect Software

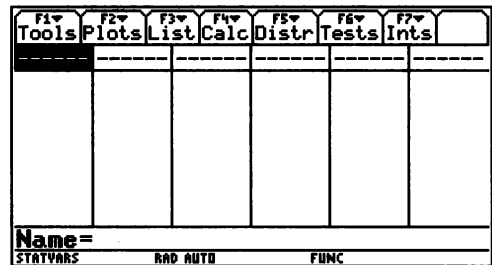
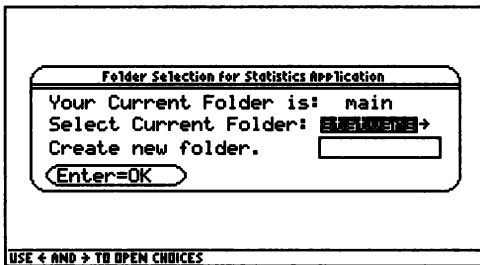
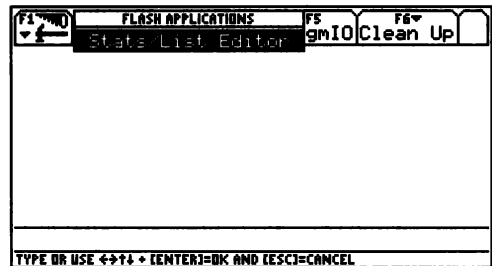
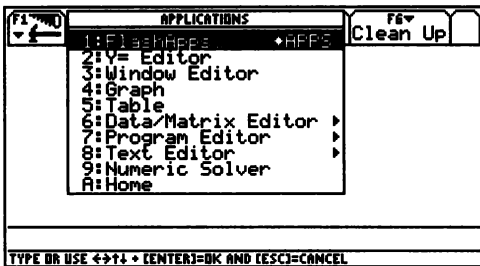
Auf der mit dem Taschenrechner mitgelieferten CD befindet sich unter anderem die *TI Connect Software*. Mit Hilfe dieser Software kann eine Verbindung des Taschenrechners mit dem Computer sowie mit dem Internet hergestellt werden. Das Übertragen bzw. das Herunterladen von Daten, Betriebssystemen und Taschenrechner-Softwareanwendungen wird dadurch sehr einfach.

Nach Anklicken des Symbols  auf der Desktop-Arbeitsfläche des PCs erscheint die Startseite der Software mit sechs Symbolen. Mit dem **DeviceExplorer** kann man Daten zwischen dem Taschenrechner und dem Computer oder umgekehrt übertragen. Die Funktionsweise ist gleich, wie beim Arbeiten mit zwei Explorer-Fenstern in Windows. Mit **ScreenCapture** können Displaybilder aufgezeichnet werden. **Backup** dient zum Sichern von Taschenrechnerdateien (außer Flash-Anwendungen) auf dem Computer. Mit **Wiederherstellen** werden Dateien auf dem Taschenrechner wiederhergestellt, die zuvor als Backup gesichert wurden. Mit dem **GroupExplorer** können Dateien zu Gruppen zusammenstellt und diese Gruppen anschließend zwischen dem Taschenrechner und dem Computer oder umgekehrt übertragen werden. Mit dem **DataEditor** können Listen-, Zahlen- und Matrizen-dateien erstellt, editiert und geändert werden.



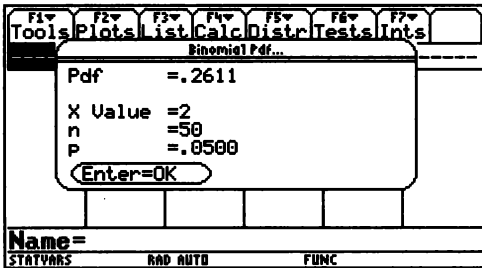
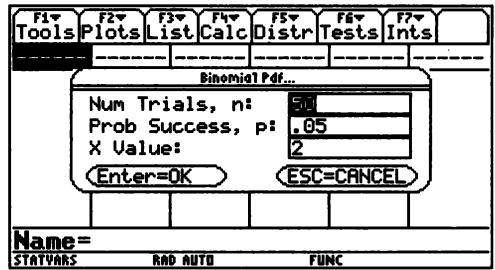
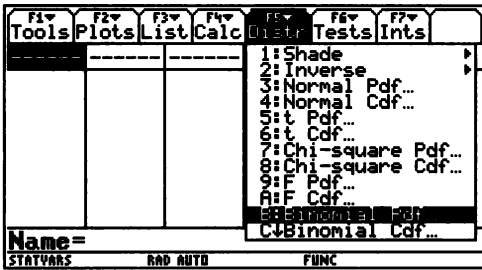
### Verwenden der Statistik-Software

Die Flash-Applikationen sind mit der Taste  aufrufbar.



Es ist empfehlenswert, als Folder statsvars zu wählen, um die bei der Ausführung dieser Applikation erzeugte Vielzahl an Variablen stets in einem eigenen Folder abzulegen.

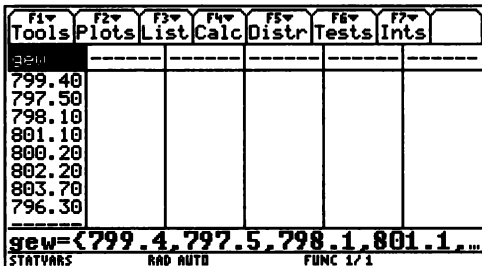
Binomialverteilung:  $g(x = 2; n = 50; p = 5\%) = ?$



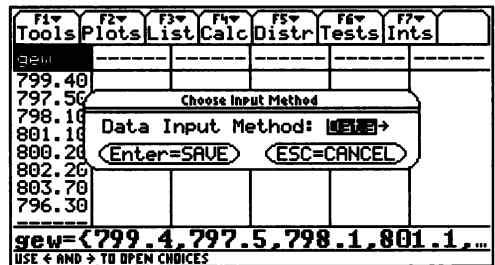
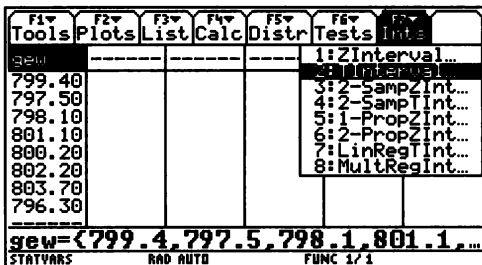
Mit **B** (B: Binomial Pdf) öffnet man ein Fenster zur Eingabe von x, n (Number of Trials) und p (Probability Success, "Erfolgswahrscheinlichkeit").

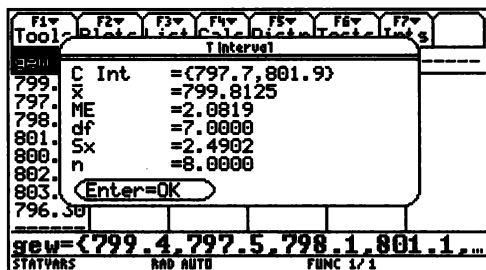
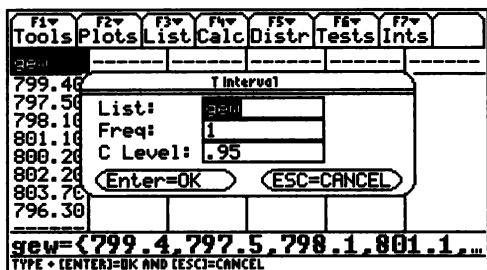
PdF steht für probability density function, CdF für cumulative distribution function (Verteilungsfunktion).

Vertrauensbereich (engl. confidence interval) für  $\mu$  bei unbekanntem  $\sigma$  (Beispiel 7.7, Seite 283)



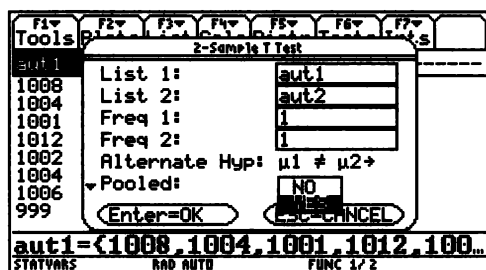
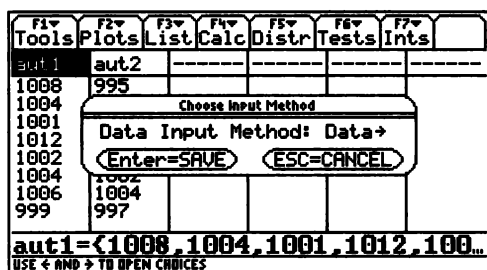
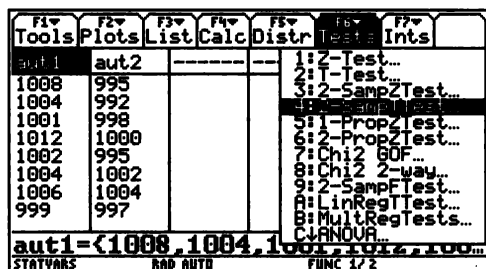
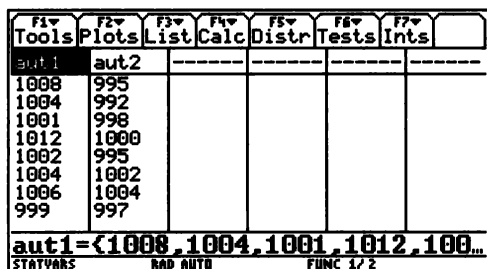
Mit **1** (1:1-Var Stats) öffnet man ein Fenster zur Eingabe einer Stichprobe. Sie wird unter dem Namen gew (wie Abfüllgewicht) eingegeben.





Mit **2** (2:T-Interval) öffnet man wieder ein Fenster. Bei Data Input Method wählt man Data, da Daten in Form einer Stichprobe vorliegen. Würde man Stats wählen, so sind Stichprobenkennwerte einzugeben. In einem weiteren Fenster gibt man den Namen der Stichprobe und das Vertrauensniveau (confidence level)  $1-\alpha$  ein.

**Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben (Beispiel 7.15, Seite 299)**



Nach Eingabe der beiden Stichproben aut1 und aut2 öffnet man mit **4** (4:2-SampTTest) ein Fenster und wählt Data für die Dateneingabe. Im folgenden Fenster gibt man die Namen der beiden Stichproben ein und wählt als Alternativhypothese  $\mu_1 \neq \mu_2$  (schon voreingestellt). Unter Pooled (Stichproben zusammenlegen) wird YES gewählt, wenn man die Gleichheit der Standardabweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  annehmen darf (F-Test vorher!).

Als Testergebnis wird u.a. der Wert der Prüfgröße  $t_{\text{prüf}}$  und der P-Wert angezeigt. Ist  $P < \alpha$ , so wird  $H_0$  zugunsten von  $H_1$  verworfen. Angezeigt wird ferner die "zusammengelegte" Standardabweichung  $S_{xp}$ , die Wurzel aus dem Mittel von  $s_1^2$  und  $s_2^2$ .

# Tabellen

**Tabelle 1: Verteilungsfunktion  $G(u)$  der  $u$ -Verteilung (Standardnormalverteilung)**

Tabelle mit Schrittweite  $\Delta u = 0,01$ .

Für negative  $u$ -Werte gilt:  $G(-u) = 1 - G(u)$ . Für  $u \geq 4$  ist  $G(u) \approx 1$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

## Quantile $u_p$ :

p	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
$u_p$	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,576	3,0902	3,2905

Es gilt:  $u_p = -u_{1-p}$

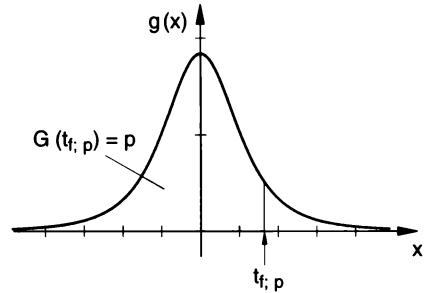


**Tabelle 2: Quantile  $t_{f; p}$  der t-Verteilung**

$t_{f; p}$ : p-Quantil

= x-Wert, bis zu dem der Inhalt der Fläche unter dem Graph der Dichtefunktion  $g(x)$  gleich  $p$  ist

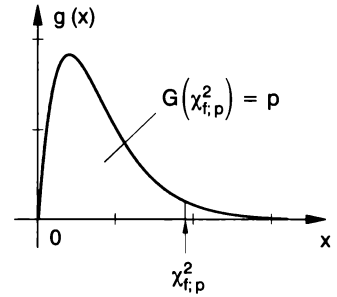
Es gilt:  $t_{f; p} = -t_{f; 1-p}$



f	$t_{f; 0,90}$	$t_{f; 0,95}$	$t_{f; 0,975}$	$t_{f; 0,99}$	$t_{f; 0,995}$	$t_{f; 0,999}$
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
35	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
45	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
75	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643	3,202
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

**Tabelle 3: Quantile  $\chi^2_{f;p}$  der Chi-Quadrat-Verteilung**

$\chi^2_{f;p}$  · p-Quantil  
 = x-Wert, bis zu dem der Inhalt der Fläche unter der Dichtefunktion  $g(x)$  gleich  $p$  ist



f	$\chi^2_{f;0,005}$	$\chi^2_{f;0,01}$	$\chi^2_{f;0,025}$	$\chi^2_{f;0,05}$	$\chi^2_{f;0,10}$	$\chi^2_{f;0,90}$	$\chi^2_{f;0,95}$	$\chi^2_{f;0,975}$	$\chi^2_{f;0,99}$	$\chi^2_{f;0,995}$
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
35	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
45	24,31	25,90	28,37	30,61	33,35	57,51	61,66	65,41	69,96	73,17
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
55	31,73	33,57	36,40	38,96	42,06	68,80	73,31	77,38	82,29	85,75
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

**Tabelle 4a: Quantile  $F_{f_1, f_2; p}$  der F-Verteilung für  $p = 0,95$**

$f_2 = 1$	$f_1 = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18	20	24	30	40	60	120
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	247	248	249	250	251	252	253
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,69	8,67	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,84	5,82	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,60	4,58	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,92	3,90	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,49	3,47	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,20	3,17	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	2,99	2,96	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,83	2,80	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,70	2,67	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,60	2,57	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,51	2,48	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,44	2,41	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,38	2,35	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,33	2,30	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,29	2,26	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,25	2,22	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,21	2,18	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,18	2,15	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,13	2,10	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,09	2,05	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	1,99	1,96	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,82	1,78	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,80	1,78	1,73	1,69	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35

**Tabelle 4b: Quantile  $F_{f_1, f_2, p}$  der F-Verteilung für  $p = 0,975$**

$f_2 = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18	20	24	30	40	60	120	
648	799	864	900	922	937	948	957	963	969	973	977	980	983	987	990	993	997	1001	1006	1010	1014	
38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	
17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,4	14,3	14,3	14,3	14,2	14,2	14,2	14,1	14,1	14,0	14,0	13,9	
12,2	10,6	10,0	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,79	8,75	8,72	8,68	8,63	8,59	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	
10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,57	6,52	6,49	6,46	6,40	6,36	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,41	5,37	5,33	5,30	5,24	5,20	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,71	4,67	4,63	4,60	4,54	4,50	4,47	4,41	4,36	4,31	4,25	4,20
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,24	4,20	4,16	4,13	4,08	4,03	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,73
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,91	3,87	3,83	3,80	3,74	3,70	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,66	3,62	3,58	3,55	3,50	3,45	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,47	3,43	3,39	3,36	3,30	3,26	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,32	3,28	3,24	3,21	3,15	3,11	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,20	3,15	3,12	3,08	3,03	2,98	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,09	3,05	3,01	2,98	2,92	2,88	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	3,01	2,96	2,92	2,89	2,84	2,79	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,93	2,89	2,85	2,82	2,76	2,72	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,87	2,82	2,79	2,75	2,70	2,65	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,81	2,77	2,73	2,70	2,64	2,60	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,76	2,72	2,68	2,65	2,59	2,55	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,72	2,68	2,64	2,60	2,55	2,50	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,47	2,43	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,59	2,54	2,50	2,47	2,41	2,36	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,28	2,23	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,15	2,11	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,22	2,17	2,13	2,09	2,03	1,98	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98	1,92	1,87	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43

# Statistische Formelsammlung

**Verteilungsfunktion** diskreter Verteilungen:  $G(x) = g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(x)$ ;

Wahrscheinlichkeit für *höchstens*  $x$  fehlerhafte Einheiten bzw. Fehler in der Stichprobe

**Hypergeometrische Verteilung:**  $g(x; N, d, n) = \frac{\binom{d}{x} \cdot \binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, d)$

Näherung durch Binomialverteilung mit  $p = \frac{d}{N}$ , wenn  $n < \frac{N}{10}$

**Binomialverteilung:**  $g(x; n; p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, n$

Schätzung von  $p$  aus einer Stichprobe von  $n$  Einheiten, davon  $x$  fehlerhaft:

Schätzwert für  $p$ :  $\hat{p} = \frac{x}{n}$ ;

$(1-\alpha)$ -Vertrauensbereich für  $p$ :  $p_{un} \leq p \leq p_{ob}$  mit  $G(x-1; n, p_{un}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ,

$$G(x; n, p_{ob}) = \frac{\alpha}{2}$$

Wenn Näherung durch die Normalverteilung möglich:  $p_{ob,un} = \hat{p} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$

**Poisson-Verteilung:**  $g(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$

Schätzung der mittleren Fehleranzahl  $\mu$  pro Einheit aus einer Stichprobe von  $n$  Einheiten, wobei  $x$  die Fehleranzahl auf allen  $n$  Einheiten ist:

Schätzwert für  $\mu$ :  $\hat{\mu} = \frac{x}{n}$ ;

$(1-\alpha)$ -Vertrauensbereich für die mittlere Fehleranzahl  $\mu_S$  pro Stichprobe des Umfangs  $n$ :

$$\mu_{un} \leq \mu_S \leq \mu_{ob} \quad \text{mit} \quad \mu_{un} = \frac{1}{2} \chi_{f, \alpha/2}^2 \quad \text{mit} \quad f = 2x; \quad \mu_{ob} = \frac{1}{2} \chi_{f, 1-\alpha/2}^2 \quad \text{mit} \quad f = 2(x+1).$$

Daraus der  $(1-\alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\mu$ :  $\frac{\mu_{un}}{n} \leq \mu \leq \frac{\mu_{ob}}{n}$ .

**Normalverteilung:**  $g(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ; Verteilungsf.:  $G(x; \mu; \sigma) = \int_{-\infty}^x g(t; \mu; \sigma) dt$

(1) Standardisierte Normalverteilung ( $u$ -Verteilung):  $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ ;

$$G(u) = \int_{-\infty}^u g(t) dt \quad (\text{Tab. 1}); \quad G(x; \mu; \sigma) = G(u) \quad \text{mit} \quad u = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

(2) Sind die Werte eines Merkmals normalverteilt mit  $\mu$  und  $\sigma$ , so sind die **Mittelwerte**  $\bar{x}$  von Stichproben mit gleichem Umfang  $n$  normalverteilt mit  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  und  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

(3)  $(1-\alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\mu$ ,

$$\text{wenn } \sigma \text{ bekannt: } \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{wenn } \sigma \text{ unbekannt: } \bar{x} - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(4)  $(1-\alpha)$ -Vertrauensbereich für  $\sigma$ :  $s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f, 1-\alpha/2}^2}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f, \alpha/2}^2}}$

**Tests über den Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung:**  $H_0: \mu = \mu_0$  gegen  $H_1: \mu \neq \mu_0$ .

a) Einstichproben u-Test (z-Test):  $u_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ ;  $H_0$  verwerfen, wenn  $|u_{\text{prüf}}| > u_{1-\alpha/2}$

b) Einstichproben t-Test:

$$H_0: t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}; H_0 \text{ verwerfen, wenn } |t_{\text{prüf}}| > t_{f, 1-\alpha/2} \text{ mit } f = n - 1$$

**Zweistichprobentests bei normalverteilten Merkmalen:** Die beiden Stichproben sollen gleichen Umfang  $n$  haben.

a) F-Test:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  gegen  $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ;  $F_{\text{prüf}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , größere Varianz im Zähler i

$$H_0 \text{ verwerfen, wenn } F_{\text{prüf}} > F_{f_1; f_2; 1-\alpha/2} \text{ mit } f_1 = f_2 = n - 1$$

b) t-Test für unabhängige Stichproben (Voraussetzung: gleiche Standardabweichungen  $\sigma_1, \sigma_2$ ):

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ gegen } H_1: \mu_1 \neq \mu_2;$$

$$t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d} \text{ mit } s_d = \sqrt{\frac{1}{n}(s_1^2 + s_2^2)}; H_0 \text{ verwerfen, wenn } |t_{\text{prüf}}| > t_{f, 1-\alpha/2} \text{ mit } f = 2n - 2$$

**Vergleich zweier Anteile:** Die beiden Stichproben sollen gleichen Umfang  $n > 40$  haben.

$$H_0: p_1 = p_2 \text{ gegen } H_1: p_1 \neq p_2; u_{\text{prüf}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{2\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}} \text{ mit } \hat{p}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\hat{p}_1 + \hat{p}_2);$$

$$H_0 \text{ verwerfen, wenn } |u_{\text{prüf}}| > u_{1-\alpha/2}$$

**Linearer Zusammenhang zweier Zufallsgrößen  $x, y$ :**

Gegeben ist eine Stichprobe von  $n$  Paaren  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

(1) Empirischer Korrelationskoeffizient  $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$  mit  $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$   
sowie  $s_x$  und  $s_y$  als Standardabweichungen der  $x_i$ - bzw.  $y_i$ -Werte.

(2) Test auf Unabhängigkeit zweier Merkmale  $x, y$ :  $H_0: \rho = 0$  gegen  $H_1: \rho \neq 0$

$$t_{\text{prüf}} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, H_0 \text{ verwerfen, wenn } |t_{\text{prüf}}| > t_{f, 1-\alpha/2} \text{ mit } f = n - 2$$

(3) Empirische Regressionsgerade  $y(x) = a + b \cdot x$ , wenn  $x$  die Einflussgröße und  $y$  die Zielgröße ist:  $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ ,  $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$ .

(4) Empirisches Bestimmtheitsmaß  $B = \frac{\sum_{i=1}^n [y(x_i) - \bar{y}]^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ ;  $B = r^2$

(5)  $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereich für den Mittelwert  $\mu_0$  der Zielgröße  $y$  an einer Stelle  $x_0$ :

$$y(x_0) - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}} \leq \mu_0 \leq y(x_0) + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}}$$

$$\text{mit } f = n - 2 \text{ und } s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2}$$

(6)  $(1 - \alpha)$ -Vorhersagebereich für einen Einzelwert der Zielgröße für einen zukünftigen Wert  $x_0$ :

$$y(x_0) - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}} \leq \mu_0 \leq y(x_0) + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}}$$

f und s wie in (4).

### Einfaktorielle Varianzanalyse:

Der Einfluss eines Faktors A wird auf a Stufen (a Normalverteilungen) untersucht. Auf jeder Stufe, auch Gruppe genannt, soll es n Werte geben.

$H_0$ : Alle  $\mu_i$  sind gleich *gegen*  $H_1$ : Nicht alle  $\mu_i$  sind gleich.

$Q_A, Q_R$  Summe der quadrierten Abweichungen zwischen bzw. innerhalb der Gruppen,

$$s_A^2 = \frac{Q_A}{f_A} \text{ mit } f_A = a - 1, \quad s_R^2 = \frac{Q_R}{f_R} \text{ mit } f_R = a \cdot (n - 1); \quad F_{\text{prüf}} = \frac{s_A^2}{s_R^2}$$

$H_0$  verwerfen, wenn  $F_{\text{prüf}} > F_{f_A; f_R; 1-\alpha}$

### Einfach-Stichprobenprüfung n - c auf fehlerhafte Einheiten:

Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a = G(c; p)$ ;

p ist der Fehleranteil im Prüfling und G die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung.

### Mittelwert-Qualitätsregelkarte:

Eingriffsgrenzen:  $OEG/UEG = \mu \pm 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Warngrenzen:  $OWG/UWG = \mu \pm 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Mittellinie:  $M = \mu$ .

Eingriffswahrscheinlichkeit bei Störung  $\mu \rightarrow \mu^*$ :

$$1 - P_a = 1 - \left[ G\left(\frac{OEG - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - G\left(\frac{UEG - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \right] \text{ mit G als Verteilungsfunktion der u-Verteilung.}$$

### Statistische Toleranzrechnung:

Es liege eine Maßkette von k Einzelmaßen mit den Toleranzen  $T_1, T_2, \dots, T_k$  vor.

(1) *Arithmetische Gesamttoleranz*  $T_a = \sum_{i=1}^k T_i$  bzw.  $T_a = k \cdot T_i$ , wenn alle  $T_i = T_1$

(2) *Statistische Gesamttoleranz bei normalverteilten Einzelmaßen*:  $T_s = \sqrt{\sum_{i=1}^k T_i^2}$  bzw.

$$T_s = T_1 \cdot \sqrt{k}, \text{ wenn alle } T_i = T_1$$

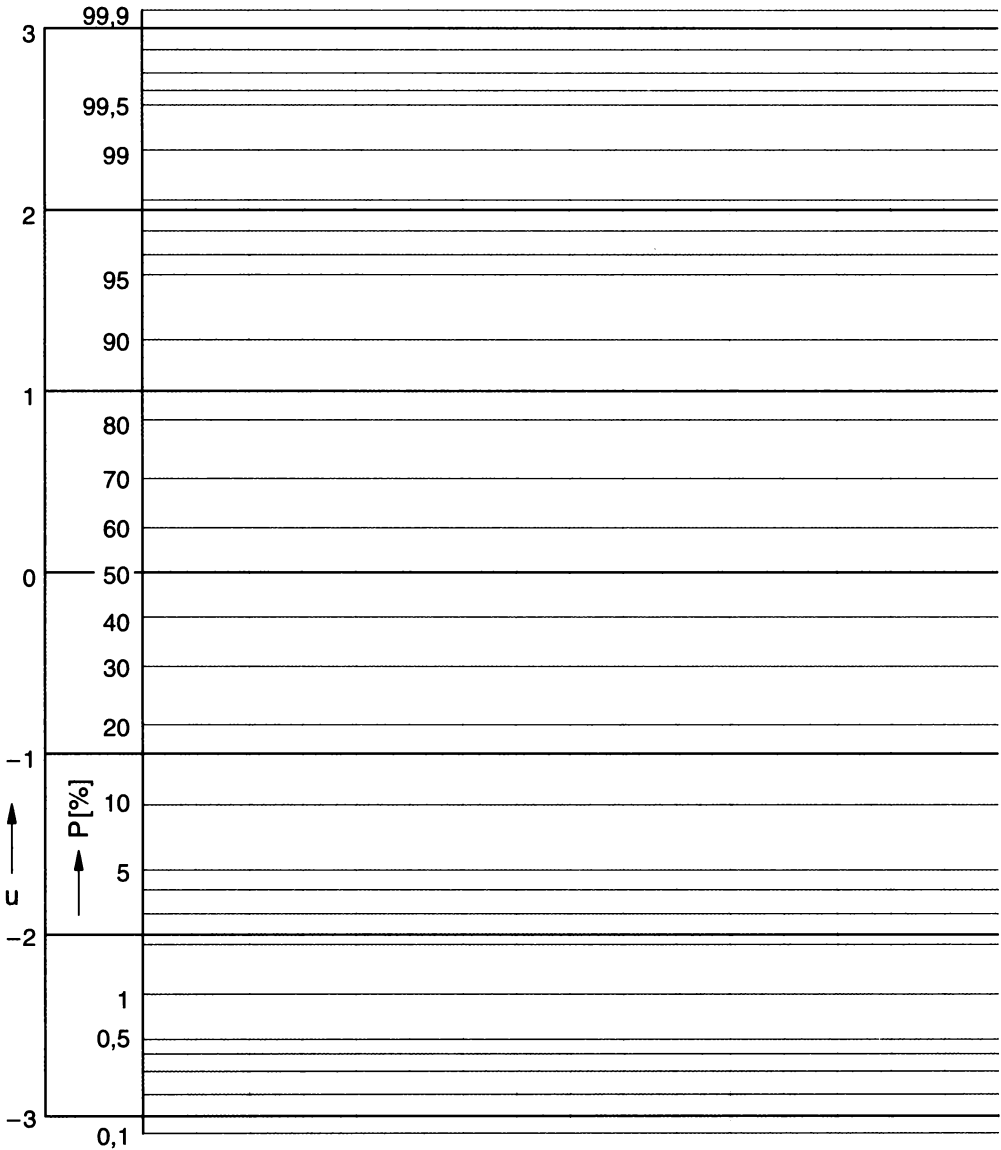
(3) *Statistische Gesamttoleranz bei k rechteckverteilten Einzelmaßen* gleicher Toleranz  $T_1$  ( $k \geq 4$ ):

$$T_s = r \cdot T_a = r \cdot k \cdot T_1 \text{ mit } r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}}. \text{ p ist die Überschreitungswahrscheinlichkeit der Gesamttoleranz } T_s.$$

**Weibull-Verteilung:** Überlebenswahrscheinlichkeit  $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^b}$ ,  $t \geq 0$ ; mittlere Lebensdauer  $\mu = \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right) \cdot T$

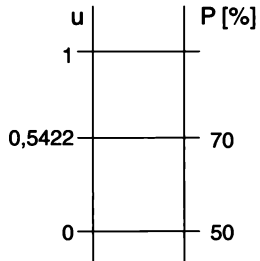
Exponentialverteilung (= Weibull-Verteilung mit  $b = 1$ ):  $R(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ ,  $t \geq 0$ ;  $\mu = T$

# Wahrscheinlichkeitsnetz



**Hinweis zum Anfertigen eines Wahrscheinlichkeitsnetzes:**

Um beispielsweise die Marke 70% auf der P-Achse einzuzeichnen, wird zuerst das Quantil  $u_{0,70} = 0,5244$  auf der u-Achse aufgetragen. P = 70% liegt in gleicher Höhe auf der P-Achse.





# Literaturverzeichnis

- Altmann, S., Schlayer, D., Lehr- und Übungsbuch Elektrotechnik, Fachbuchverlag Leipzig 1995, ISBN 3-343-00869-9
- AMMU-Aussendungen (Arbeitsgruppe für Modernen Mathematik Unterricht), Bundesministerium für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten, Wien
- Birnbaum, H., Denkmann, N., Analysis-Training, Harri Deutsch, 1987, ISBN 3-87144-964-4
- Brauch/Dreyer/Haacke, Mathematik für Ingenieure, 8. Auflage, Teubner, 1995, ISBN 3-519-46500-0
- Brigham, E.O., FFT Schnelle Fourier-Transformation, 5. Auflage, 1992, ISBN 3-486-22242-2
- Föllinger, O., Laplace-, Fourier- und z-Transformation, 7. Auflage, Hüthig, 2000, ISBN 3-7785-2706-1
- Franzkowsky/Görler/Kleppmann/Lampey/Richter/Wagner, Lehrgangsunterlagen zum Block ST/QII der Deutschen Gesellschaft für Qualität, 1998
- Girod/Rabenstein/Steger, Einführung in die Systemtheorie, Teubner, 1997, ISBN 3-519-06194-5
- Goldstein/Schneider/Siegel, Finite Mathematics, 6<sup>th</sup> Edition, Prentice-Hall 1998, ISBN 0-13-741877-9
- Graf/Henning/Stange/Wilrich, Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik, 3. Auflage, Springer, 1987, ISBN 3-540-16901-6
- Greuel, O., Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker, 12. Auflage, Hanser Verlag, München 1990, ISBN 3-446-15369-1
- Haager, W., Regelungstechnik, 2. Auflage, hpt-Verlag, 1979, ISBN 3-209-00928-7
- Hörhager, M., Partoll, H., Mathcad Einführung, Version 7, Addison-Wesley, ISBN 3-8273-1343-0
- Jordan D., Smith, P., Mathematical Techniques, 2<sup>nd</sup> Edition, Oxford U.P., 1997, ISBN 0-19-856461-9
- Klein, B., Mannewitz, F., Statistische Tolerierung, Vieweg, 1993, ISBN 3-528-06563-X
- Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, 8<sup>th</sup> Edition, Wiley, 1999, ISBN 0-471-33328-X
- Kreyszig, E., Statistische Methoden und ihre Anwendungen, 3. Aufl., Vandenhoeck, Göttingen 1968
- Lindner/Brauer/Lehmann, Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik, 7. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig 1998, ISBN 3-446-18976-9
- Löhr, H., Beispiele und Aufgaben zur Laplace-Transformation, Vieweg, 1979, ISBN 3-528-04082-3
- Mann/Schiffelgen/Froriep, Einführung in die Regelungstechnik, 7. Auflage, Verlag Hanser, München 1997, ISBN 3-446-17672-1
- Montgomery, C., Runger, G., Applied Statistics and Probability for Engineers, 2<sup>nd</sup> Edition, Wiley, 1999, ISBN 0-471-17027-5
- Oppenheim, A., Willsky, A., Signals & Systems, 2<sup>nd</sup> Ed., Prentice Hall, 1997, ISBN 0-13-651175-9
- Papula, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Übungen, 3. Auflage, Vieweg, 1994, ISBN 3-528-24355-4
- Paul, R., Elektrotechnik u. Elektronik f. Informatiker, Bd. 1, Teubner, 1994, ISBN 3-519-02126-9
- Preuß, W., Wenisch, G., Lehr- und Übungsbuch Mathematik  
für Elektro- und Automatisierungstechniker, Fachbuchverlag Leipzig 1998, ISBN 3-446-18978-5  
für Informatiker, Fachbuchverlag Leipzig 1997, ISBN 3-446-18702-2  
für Wirtschaft und Finanzwesen, Fachbuchverlag Leipzig 1998, ISBN 3-446-18887-8
- Scheithauer, R., Signale und Systeme, Teubner, 1998, ISBN 3-519-06425-1
- Schlüter, G., Regelung technischer Systeme – interaktiv. Grundlagen zeitkontinuierlicher Systeme. Fachbuchverlag Leipzig 2001, ISBN 3-446-21781-9
- Stingl, P., Mathematik für Fachhochschulen, 6. Auflage, Hanser 1999, ISBN 3-446-21077-6
- Storm, R., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik und Statistische Qualitätskontrolle, 10. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig 1995, ISBN 3-343-00871-0
- Teschl/Teschl, Mathematik für Informatiker, zweibändig, 2. Auflage, Springer 2007, ISBN 3-540-70824-3
- Timischl, W., Qualitätssicherung, Statistische Methoden, 3. Aufl., Hanser 2002, ISBN 3-446-18591-7
- Triola, M., Elementary Statistics, 7<sup>th</sup> Edition, Addison-Wesley Longman 1998, ISBN 0-201-85920-3
- Weber, H., Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure, 3. Auflage, Teubner 1992, ISBN 3-519-02983-9
- Weber, H., Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik, 6. Auflage, Teubner Studienskripten 1990, ISBN 3-519-00141-1
- Weißgerber, W., Elektrotechnik für Ingenieure, 3. Bd., Vieweg 1991, ISBN 3-528-04918-9
- Westermann, T., Mathematik für Ingenieure mit Maple, Band 2, Springer 1997, ISBN 3-540-61248-3

# Stichwortverzeichnis

## A

Abtasttheorem v. SHANNON 114  
Abweichungsfortpflanzungs-  
gesetz 340  
Abzähltechniken 28 ff  
- Kombination 29 f, 32  
- Permutation 28, 32  
- Variation 31 f  
Additionssatz, POISSON-  
Verteilung 249  
Ähnlichkeitssatz 214 f  
Allgemeine Lösung einer  
Differentialgleichung 124 f,  
140 ff, 152, 154, 167  
Alternativhypothese 288  
Alternierende Reihe 84  
Amplitudenspektrum 193  
AND-Glied 45  
Anfangs- und Endwertsatz 217  
Anfangswertaufgaben 125,  
129, 139 f, 142, 155  
Annahmekennlinie 346  
Annahmestichprobenprüfung  
345 ff  
Annahmewahrscheinlichkeit  
346  
Annahmezahl 345  
Aperiodischer Grenzfall 164 f  
Approximation v. Funktionen 94  
Arithm. Gesamtteranz 339  
Arithmetische Toleranz-  
rechnung 338 f  
Assoziativgesetze der Schalt-  
algebra 48  
Ausblendeigenschaft 189  
Ausfallssteilheit 348  
Ausfallswahrscheinlichkeit 348  
Ausgleichsgerade 328

## B

Basislösung 59  
Basisvariable 59  
Baum 76  
Biegelinie 126 f  
Bildbereich 181, 196, 208  
Binomialkoeffizient 29  
Binomialverteilung 242 ff, 353  
- Erwartungswert 243  
- Näherung der hypergeome-  
trischen Verteilung 245, 265

- Näherung durch POISSON-  
verteilung 250  
- Näherung durch Normal-  
verteilung 265  
- Rekursionsformel 243

## C

Charakt. Gleichung 139, 152 ff  
Charakt. Lebensdauer 348  
 $\chi$ -Quadratverteilung 267

## D

Dämpfungssatz 212  
De MORGAN'sche Gesetze 49 f  
Delta-Impuls 188 f, 190, 200  
Differentialgleichungen 122 ff  
- 1.Ordnung 129 ff, 138 ff  
- 2.Ordnung 151 ff  
- allgemeine Lösung 124 f,  
140 ff, 152, 154, 167  
- Anfangswertaufgabe 125,  
129, 139 f, 142, 155  
- charakt. Gleichung 139, 152 ff  
-, gewöhnliche 123  
- Grundbegriffe 122  
-, inhomogene 138 f, 151f  
-, inhomogene 140 ff, 154 ff,  
180 ff  
- komplexer Lösungsansatz  
157 f  
- Lösung durch LAPLACE-  
Transformation 223 ff  
-, lineare 138 ff  
- Lösungsansatz 142, 155, 157f  
- mit konstanten Koeffizienten  
138 ff, 151 ff  
- Numerische Lösung 177 ff  
- partikuläre Lösung 124 f, 140 f  
- Randwertaufgabe 126  
- Richtungsfeld 127  
- spezielle Lösung 125  
- Störfunktion 142, 151, 155  
- Trennung der Variablen 129 ff  
Differentiationssatz 215 f  
Disjunktion 45 f  
Disjunktive Normalform 52 ff  
Diskrete Verteilungen 236 ff  
- Binomialverteilung 242 ff  
- Hypergeometrische Vertei-  
lung 236 ff

- Poissonverteilung 247 ff  
Distributivgesetze d. Schalt-  
algebra 48  
Dualitätsprinzip der Schalt-  
algebra 48

## E

Eingriffsgrenze 333 f  
Eingriffswahrscheinlichkeit 335f  
Einstichprobenstest 288 ff  
-, einseitiger 288 f  
-, zweiseitiger 290, 293 ff  
Einzeltoleranz 338, 341, 343  
Elektrischer Reihenschwing-  
kreis 167  
Ellipse 10 ff  
- Brennpunkteigenschaft 12  
- Fadenkonstruktion 10  
- Mittelpunktsleichung 10 ff  
- und Gerade 25  
- und Kegelschnitte 26  
Empirische Kovarianz 320  
Empirischer Korrelations-  
koeffizient 320 ff  
Empirisches Bestimmtheits-  
maß 329  
Erwartungswert 239, 243, 254  
Erzwungene Schwingung 172 f  
EULER'sches Streckenzug-  
verfahren 177 f  
Exponentialansatz 139, 151 ff,  
Exponentialverteilung 349 f  
Exponentielles Abklingen 131 f,  
200

## F

Feder-Masse-System 160 ff,  
167  
Fehler  
- 1. Art 291  
- 2. Art 291  
FFT 117 f  
FISHER-Verteilung 301 f  
FOURIER-Integral 196  
Fourierreihen 101 ff  
- Fourierkoeffizienten 101,  
103 f, 107, 115  
- Amplituden-Phasenform 102  
- Sinus-Kosinusform 101  
- Komplexe Form 192 ff

- Num. FOURIER-Analyse 114 ff
- Fouriertransformation 117 ff, 192 ff
- diskrete 118 f
- Eigenschaften 202 f
- Frequenzverschiebungssatz 203
- Linearität 203
- schnelle 117 f
- Symmetrie 202
- Tabelle 204
- FOURIER-Transformierte 196
- Berechnung 198 f, 201
- Eigenschaften 202 f
- Freie Schwingung 162 ff
- Freiheitsgrade 267, 282, 302
- Frequenzbereich 196
- Frequenzgang 170, 234
- F-Test 301, 303
- F-Verteilung 301 f

## G

- Geometrische Reihe 82
- Gesamttoleranz 341, 343
- arithmetische 339
- statistische 341 f
- Gewöhnliche Differentialgleichungen 123
- Graphen 75 ff
- Ecken 75
- Kanten 75
- Knoten 75
- Grenzwertsatz v. POISSON 250
- Grundgesamtheit 236, 270

## H

- Homogene Differentialgleichungen
- 1. Ordnung 138 f
- 2. Ordnung 151, 161
- Hyperbel 15 ff
- Asymptoten 15 f
- Mittelpunktsleichung 15 f
- Hyperbelfunktionen 17
- Hypergeom. Verteilung 236 ff
- Erwartungswert 238 f
- Rekursionsformel 237
- Verteilungsfunktion 239 f
- Hypothesentest 288 ff, 297 ff
- Fehler 1. Art 291
- Fehler 2. Art 291

- Inhomogene Differentialgleichungen 138
- 1. Ordnung 140 ff
- 2. Ordnung 154 ff
- Integrationsatz der LAPLACE-Transformation 216
- Irrtumswahrscheinlichkeit 270

## K

- Kegelschnitte 4 ff
- Ellipse 4, 10 ff
- Hyperbel 4, 15 ff
- Kreis 4 ff
- Parabel 4, 20 ff
- Klirrfaktor 102
- Kombination 29 f, 32
- Komplexer Lösungsansatz bei einer Differentialgleichung 157 f
- Kongruenzregeln 36 ff
- Konjunktion 45 f
- Konjunktive Normalform 54
- Kontaktschaltungen 47
- Arbeitskontakt 47
- Ruhekontakt 47
- Kontinuierliches Spektrum 195
- Konvergenzkriterium 84
- Konvergenzradius 89 f
- Konvergenzsatz für geometrische Reihe 82
- Konvidenzintervall 270
- Korrelationskoeffizient
- Empirischer 320 ff
- Korrespondenztabelle LAPLACE-Transform. 218
- Kreis 4 ff
- in allgemeiner Lage 4 f
- Ortskurve 5 ff
- Ursprungskreis 4 f
- Kriechfall 163
- Kritischer Weg 78
- Kritischer Wert 289 f, 292 ff, 303, 305, 310, 314, 324

## L

- LAPLACE-Experiment 236
- LAPLACE-Transformation 207 ff
- Ähnlichkeitssatz 214 f
- Anfangs- u. Endwertsatz 217
- Anwendungen 223 ff
- Dämpfungssatz 212
- Differentiationsatz 215 f

- Integrationssatz 216
- Korrespondenztabelle 218
- LAPLACE-Transformierte 207, 220
- Rücktransformation 217 ff
- Summen- u. Faktorregel 211
- Zeitverschiebungssatz 212 f
- Laplacetransformierte 220
- LEIBNIZ-Kriterium 86
- Lineare Differentialgleichungen 138 ff
- 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 138 ff
- 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 151 ff
- Lineare Korrelation 318 ff
- Lineare Optimierung 58 ff
- Simplexmethode 58 ff
- Lineare Regression 327 ff
- Linienelement 127
- Linienspektrum 102, 195, 197
- Literaturverzeichnis 364
- Logistisches Wachstum 134
- LTI-Systeme 232 ff

## M

- MAC-LAURIN-Reihe 91
- Maßkette 338
- Mechanische Schwingung 165 f
- Messreihe 285 f
- Mittellinie 334
- Mittlere Lebensdauer 349
- Moderne Hilfsmittel – Statistiksoftware
- Binomialverteilung 351, 353
- Poissonverteilung 351
- stand. Normalverteilung 351
- Vertrauensbereich 353
- Zweistichproben-t-Test 354
- Modul 35
- Modulare Arithmetik 35
- Multiplikationssatz 236

## N

- Netzplan 77 ff
- kritischer Weg 78
- kritischer Vorgang 78
- Netzwerke 75 ff, 180, 182, 184, 226
- NEWTON'sches Abkühlungsgesetz 143 f
- NEWTON'sches Erwärmungsgesetz 143 f
- NICHT-Glied 45

- Nichtlineare Differentialgleichungen 151  
 Nichtlineare Gleichungssysteme 24 ff  
 Normalverteilung 253 ff  
 - Erwartungswert 254  
 - Mittelwert 254  
 - Quantile 259  
 - Standardabweichung 254  
 - Standardisierte 256 ff  
 NOT-Glied 45  
 Nullhypothese 288  
 Num. FOURIER-Analyse 114 ff  
 Numerische Lösung von Differentialgleichungen 177 ff
- O**
- ODER-Glied 45  
 Operationscharakteristik 346  
 OR-Glied 45  
 Originalbereich 181, 196, 208  
 Ortskurve 5 ff  
 - e. komplexen Leitwertes 6 f  
 - Kreis als Ortskurve 5 f  
 - Inversion einer Geraden 7  
 - Widerstands Ortskurve 8
- P**
- Parabel 20 ff  
 - Scheitelgleichung 20 f  
 Partikuläre Lösung einer Differentialgleichung 124 f, 140 f  
 Permutationen 28, 32  
 PIVOT-Element 61, 66  
 Pivotspalte 61f, 66, 69  
 Pivotszeile 61f, 66, 69  
 Poissonverteilung 247 ff  
 - Additionssatz 249  
 - als Grenzfall der Binomialverteilung 249 f  
 - als Näherung der Binomialverteilung 250  
 - Grenzwertsatz 250  
 - Näherung durch Normalverteilung 265  
 - Rekursionsformel 248  
 Potenzreihen 89 ff  
 Prüfgröße 289, 303, 305, 309, 314, 324  
 Punktschätzung 270  
 P-Wert eines Tests 291
- Q**
- Qualitätsregelkarten 333 ff  
 - Anlegen 334  
 - Eingriffsgrenzen 333 f  
 - Warngrenzen 333 f  
 Quantile 259, 282 ff  
 Quotientenkriterium 85
- R**
- Randwertaufgabe 126  
 RC-Glied 145 ff, 229 f  
 Reduktionsfaktor 341  
 Regressionsgerade 327 f  
 Regressionskoeffizient 327  
 Regressionskonstante 327  
 Resonanz 170 f  
 Rest 35  
 Restklassen 35  
 Richtungsfeld 127  
 RSA-Verschlüsselungsalgorithmus 36, 38 ff  
 RUNGE-KUTTA-Verfahren 178
- S**
- Schaltalgebra 44 ff  
 - Assoziativgesetze 48  
 - de MORGAN'sche Gesetze 49 f  
 - Disjunktion 45 f  
 - Distributivgesetze 48  
 - Konjunktion 45f  
 - Negation 45  
 - Nichtglied 45  
 - OR-Glied 45  
 - Rechenregeln 48 f  
 - UND-Glied 45  
 - Verschmelzungsgesetze 48  
 - Volldisjunktion 52  
 - Vollkonjunktion 52  
 Schaltfunktionen 44 ff, 47 ff, 51 f  
 Schaltvariable 44  
 Schätzwert für  
 -  $\mu$  bei Normalverteilung 267  
 -  $\sigma$  bei Normalverteilung 268  
 -  $\sigma^2$  bei Normalverteilung 268  
 -  $p$  bei Binomialverteilung 271  
 -  $\mu$  bei POISSON-Verteilung 278  
 Scheinkorrelation 323  
 Schließende Statistik 270 ff, 285, 291  
 Schwingfall 163  
 Schwingungen 160 ff  
 - Elektrischer Reihenschwingkreis 160 f, 165 f, 167, 172 f  
 -, erzwungene 172 f  
 - Feder-Masse-System 160 ff, 166 f  
 -, freie 162 ff  
 - Frequenzgang 170, 234  
 -, mechanische 165 f  
 - Resonanz 170 f  
 - Schwingfall 163 f  
 - Kriechfall 163 f  
 - Aperiodischer Grenzfall 164  
 Signale 187 ff  
 - Delta-Impuls 188 ff  
 - Sprungfunktion 187, 190  
 Signifikanzniveau 289  
 Signifikanztest 288  
 Simplexalgorithmus 61 f, 64, 66 f  
 Simplexmethode 58 ff  
 - Austauschschritt 61, 66, 69  
 - Basislösung 59  
 - Basisvariable 59  
 - Nichtbasisvariable 59  
 - Pivotelement 61, 66  
 - Pivotspalte 61 f, 66, 69  
 - Pivotzeile 61 f, 66, 69  
 - Schlupfvariable 65  
 - Simplextableau 60 ff  
 - Strukturvariable 59  
 - Transportproblem 68 ff  
 Sprungfunktion 187, 190  
 Standardisierte Normalverteilung 256 ff  
 Statist. Formelsammlung 360 ff  
 Statist. Gesamtteranz 341  
 Statist. Prozessregelung 333  
 Statist. Toleranzrechnung 338 ff  
 Stetige Verteilungen  
 -  $\chi$ -Quadrat-Verteilung 267  
 - Exponentialverteilung 349 f  
 - Normalverteilung 253 ff  
 - t-Verteilung 281  
 - WEIBULL-Verteilung 348  
 Stichprobe 30, 236, 270 f, 289, 297, 299  
 -, zweidimensionale 320  
 Stichprobenstandardabweichung 268  
 Stichprobenvarianz 303  
 Störfunktion 138, 142, 151, 155  
 Streckenzugverfahren von EULER 177 f  
 Streudiagramm 318 f

## T

Tabellen 355 ff

- FOURIER-Transformation 204
- LAPLACE-Transformation 218
- Quantile der  $\chi$ -Quadratverteilung 357
- Quantile d. F-Verteilung 358 f
- Quantile der t-Verteilung 356
- Verteilungsfunktion 355 (Standardnormalverteilung)
- Taylorpolynom 91
- Taylorreihe 91 ff
- Test, statistischer
- Einstichproben-t-Test 293 f
- F-Test 301, 303f
- t-Test für unabhängige Stichproben 301, 304 ff
- Unabhängigkeit zweier Merkmale 324 ff
- u-Test 288, 292 f
- Vergleich zweier Anteile 309 ff
- z-Test 288 ff
- Toleranzrechnung
- Abweichungsfortpflanzungsgesetz 340
- , arithmetische 338 f
- , statistische 338 ff
- Transformationen 180 ff
- Fouriertransformation 192 ff
- Laplacetransformation 207 ff
- Transportproblem 68 ff
- Trennung der Variablen 129 ff
- t-Test, Einstichproben- 293 f
- t-Test für unabhängige Stichproben 301, 304 ff
- t-Verteilung 281 f

## U

- Überlebenswahrscheinlichkeit 348
- Übertragungsfunktion 233 f
- UND-Glied 45
- Unendliche Reihen 82 ff
- , alternierende 84
- , geometrische 82
- Konvergenzkriterium 84
- Konvergenzsatz 82

- LEIBNIZ-Kriterium 86
- Quotientenkriterium 85
- Ursprungskreis 4 f
- u-Test 288, 292 f
- u-Verteilung 256

## V

- Varianzanalyse 303, 312 ff
- einfache 312 ff
- doppelte 312
- Variation 31 f
- Verschlüsselung 35 ff
- RSA-Verschlüsselungsalgorithmus 38 ff
- Verteilung
- der Mittelwerte 266 ff
- der Stichprobenvarianzen 267
- Verteilung von Stichprobenkenngrößen 271 ff
- Vertrauensbereich
- für  $\mu$  bei Normalverteilung 280 f, 283 f
- für  $\sigma$  bei Normalverteilung 284 f
- für  $\mu$  bei Poissonverteilung 278 f
- für  $\mu_0$  bei linearer Regression 330
- für p bei Binomialverteilung 271 ff
- Volldisjunktion 52
- Vollkonjunktion 52
- Vorhersagebereich 330
- Voyage 200 (TI-89)
- Binomialverteilung 244, 272, 351, 353
- Differentialgleichungen 130, 134, 157, 165
- FOURIER-Reihe 106, 109, 116
- Hypergeometrische Verteilung 238
- Kombination 32
- Korrelationskoeffizient 322
- LAPLACE-Transformation 210
- Lineare Regression 331
- Modulorechnen 37f
- Nichtlineares Gleichungssystem 25

- Partialbruchzerlegung 219
- POISSON-Verteilung 248, 351
- Quantile der  $\chi$ -Quadratverteilung 284
- Quantile d. F-Verteilung 304
- Quantile der t-Verteilung 282
- Simplex-Austauschschritt 63 f
- standardisierte Normalverteilung 351
- TAYLOR-Reihe 93
- Varianzanalyse 315
- Vertrauensbereich 353
- Zweistichproben-t-Test 354

## W

- Wahrscheinlichkeitsnetz 263 f, 297 ff, 363
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen 236 ff
- Binomialverteilung 243 ff
- Hypergeometrische 237 ff
- Normalverteilung 253 ff
- POISSON-Verteilung 247 ff
- Warngrenze 333 f
- WEIBULL-Verteilung 348
- Ausfallssteilheit 348
- Ausfallswahrscheinlichkeit 348
- mittlere Lebensdauer 349
- Überlebenswahrscheinlichkeit 348
- Widerstandsortskurve 8

## Z

- z-Test 288 ff
- Zeitbereich 196, 208
- Zeitverschiebungssatz 212 f
- Zentraler Grenzwertsatz 253
- Zufallsstichprobe 288
- Zuverlässigkeitsprüfung 348 ff
- Zweiseitiger Vergleich 309 ff
- Zweistichprobentests 301 ff
- F-Test 301, 303 f
- t-Test für unabhängige Stichproben 301, 304 ff
- Vergleich zweier Anteile 309 ff